தமிழ்நாடு அரசு

கணக்கு

ஒன்பதாம் வகுப்பு

தீண்டாமை
மனிதநேயமற்ற செயல் – பெருங்குற்றம்

பள்ளிக் கல்வித்துறை

தமிழ்நாடு அரசு
இலவசப் பாடநூல் வழங்கும்
திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்பட்டது
(விற்பனைக்கு அன்று)

முதல் பதிப்பு – 2011
மறுபதிப்பு – 2012
(பொதுப் பாடத்திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்பட்ட நூல்)

குழுத்தலைவர்

முனைவர். ஏ. சந்திரசேகரன்
இணைப் பேராசிரியர்
கணிதத்துறை
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி)
தமிழ்நாடு அரசு, சென்னை – 600005

மேலாய்வாளர்கள்

முனைவர். ச. ஆ. சேட்டு
இணைப் பேராசிரியர்
கணிதத்துறை
D.G. வைணவக் கல்லூரி
அரும்பாக்கம், சென்னை – 600106.

திரு. சீனி. செல்வரங்கம்
விரிவுரையாளர் (தேர்வுநிலை)
கணிதத்துறை
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி)
தமிழ்நாடு அரசு, சென்னை – 600005.

முனைவர். இரா. சுவாமிநாதன்
முதல்வர்
ஸ்ரீ வித்யா கிரி மெட்ரிக். பள்ளி
புதுவயல்
சிவகங்கை மாவட்டம் – 630108.

நூலாசிரியர்கள்

திரு. மு. மதிவாணன்
தலைமை ஆசிரியர்
அரசு உயர்நிலைப் பள்ளி
பொம்மஅள்ளி, காரிமங்கலம்
தர்மபுரி மாவட்டம்– 635111.

திரு. இல. ஆசைத்தம்பி
முதுகலை பட்டதாரி ஆசிரியர்
அரசு மகளிர் மேல்நிலைப் பள்ளி
பாலக்கோடு
தர்மபுரி மாவட்டம் – 636808.

திரு. அ. செந்தில்குமார்
பட்டதாரி ஆசிரியர்
அரசு மகளிர் மேல்நிலைப் பள்ளி
விழுப்புரம் – 605602.

திரு. ம. குழந்தைவேலு
பட்டதாரி ஆசிரியர்
அரசு மகளிர் மேல்நிலைப் பள்ளி
விழுப்புரம் – 605602.

திரு. தா. ஸ்டீபன் குமார்
பட்டதாரி ஆசிரியர்,
டவுட்டன் ஆண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி
சென்னை – 600007.

திருமதி அ. கிருஷ்ணவேணி
முதுகலை பட்டதாரி ஆசிரியர்
வனவாணி மெட்ரிக் மேல்நிலைப் பள்ளி
IIT வளாகம், சென்னை–600036.

கணினி தட்டச்சு, வரைகலை, அட்டைப்படம் : **வி. ஜேம்ஸ் ஆபிரகாம், ர. லஷ்மி**

பாடநூல் அச்சாக்கம்
தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் கழகம்
கல்லூரிச் சாலை, சென்னை – 600 006.

விலை : ₹

இந்நூல் 80 ஜி.எஸ்.எம். மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது

வெப் ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர் :

முன்னுரை

சீரிளமைத் திறம் வியந்து செயல் மறந்து வாழ்த்துதுமே!

–மனோன்மணீயம் பெ. சுந்தரனார்

சமூக நீதியை உறுதி செய்யவும் தமிழ்நாட்டில் உள்ள அனைத்து பள்ளிகளிலும் தரமான கல்வியைக் கொடுக்கவும் தமிழக அரசு பொதுப்பாடத் திட்டத்தைக் அறிமுகப்படுத்தியுள்ளது. இதனையே மிக முக்கிய கருத்தாக கொண்டும் கணிதவியலில் ஏற்படும் மாற்றங்களை மாணவர்கள் எவ்வாறு எதிர்கொள்ளச் செய்வது என்பதைக் கருத்தில் கொண்டும் இப்புத்தகம் தேசிய பாடத்திட்ட அமைப்பு (NCF) 2005 இன் கட்டமைப்பில் உள்ளவாறு கல்லூரி மற்றும் பள்ளிகளில் பணியாற்றும் ஆசிரியர்களை உள்ளடக்கிய வல்லுநர் குழுவால் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.

கணிதம் என்பது மிகவும் சிக்கலான கருத்துக்களை மிக எளிய வார்த்தைகளால் புரியவைக்கும் ஒரு மொழியாகும். கணிதத்தின் துணையோடும் சிந்தனைத் திறன் மூலமும் 10^{-9} (Nano) போன்ற மிகச்சிறிய எண்களையும் 10^{100} (Googolplex) போன்ற மிகப்பெரிய எண்களையும் மனிதன் தன் கட்டுப்பாட்டுப் பகுதியில் கொணரமுடியும். மடிக்கணினி போன்ற இப்பாடநூல் பன்னிரெண்டு தலைப்புகளைக் கொண்ட ஒரு முக்கியத் தொகுப்பாகும். ஒவ்வொரு பாடப்பகுதியும் மிகச் சுருக்கமான முகவுரைகளையும், எளிதில் புரிந்து கொள்ளும்படியான விளக்கங்களையும் கொண்டு ஆரம்பிக்கின்றன. மாணவர்களை ஊக்குவிக்கம் பொருட்டு ஒவ்வொரு அத்தியாயத்தின் தொடக்கத்திலும் சிறந்த கணித வல்லுநர்களின் முக்கிய பங்களிப்பு பற்றி விளக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் சுருக்கமான வரையறைகள், முக்கிய கருத்துக்கள், தேற்றங்கள் மற்றும் பயிற்சி கணக்குகள் ஆகியன இப்பாடநூலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு அத்தியாயத்தின் இறுதியிலும் அப்பாடத்தில் மாணவர்கள் என்னென்ன கற்றறிந்தனர் என்பதை சுருக்கமாக நினைவூட்டப்படுகிறது. வழக்கமான கணக்கீடுகளிலிருந்து மாணவர்கள் சற்று கடினமான கணக்கீடுகளை செய்வதற்கு இப்பாடநூல் உதவும் என நம்புகிறோம்.

கணிதவியலின் தேவையைப் பற்றி தெரிந்து கொள்ளவும், அதனை எளிதாக புரிந்து கொள்ளவும் வாழ்க்கையோடு தொடர்புடைய கணக்குகள் கையாளப்பட்டுள்ளன. இத்தகைய வாழ்க்கையோடு தொடர்புடைய கணக்குகள், முக்கிய கருத்துகள், வரையறைகள் மற்றும் தேற்றங்களை எளிதாகப் புரிந்து கொள்ள ஏதுவாக எடுத்துக்காட்டுகளுடன் மிக எளிய அமைப்பில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இத்தகைய எடுத்துக்காட்டுகளை புரிந்து கொள்வதோடு மட்டுமல்லாமல், வரையறைகள் எக்காரணங்களுக்காக கொடுக்கப்பட்டுள்ளன என்பதை தெளிவாக அறிந்துகொள்ளுதல் வேண்டும். இதன் மூலம் சிக்கலான கணக்குகளை வெவ்வேறு வழிகளில் எளிதாக எவ்வாறு தீர்ப்பது என்பதை அறிய இது வழிவகுக்கும்.

இப்பாடநூல் கண்ணைக் கவரும் வண்ணங்களைக் கொண்டு அச்சிடப்பட்டுள்ளதால் மாணவர்கள் கணிதப் பாடத்தின் அழகை ரசிக்கவும், தங்களது கருத்துகளை மற்றவர்களுடன் பரிமாறிக்கொள்ளவும் மற்றும் புதிய கருத்துகளை உருவாக்கவும் வழிவகை செய்யும் என நம்புகிறோம். ஒரு மாணவன் தான் சந்திக்கும் ஒரு சராசரி மனிதனுக்கு, தான் கற்ற கணிதத்தை எளிதாக புரியவைக்காத வரையில் அம்மாணவன் கணிதக் கொள்கையை தெளிவாக அறிந்துவிட்டதாக நாம் கருத முடியாது. எனவே கணிதம் என்பது வெறும் கணக்கீடுகளை மட்டுமே செய்வது அல்ல அது அறிவு சார் பகுதியை முறையாக செயல்படுத்தவும் உதவுகிறது என்பது தெளிவாகிறது.

எனவே கணிதத்தின் சிறப்பைப் பாராட்டவும் அதன் மதிப்பைத் தெரிந்து கொள்ளவும் இந்நூலில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள அடிப்படை கணிதவியலை கற்க வேண்டும். யார் கணிதத்தை மிக ஆழ்ந்து கற்கின்றாரோ அவர் கணிதத்தின் முக்கியத்துவத்தையும், பயன்பாட்டையும் அறிவர்.

கணிதத்தைப் படிப்பதும், படைப்பதும் ஒருவரின் வாழ்வின் சிறப்பம்சமாகும். விசித்திரமானதுமல்ல, விந்தையானதுமல்ல கணிதம். வாழ்க்கையை சிறக்கவைக்க உதவும் ஒரு இசைக்கருவி. அதனை மீட்டும் ஞானத்தைப் பெறுவோம், மகிழ்வோம்! மலர்வோம்! வளர்வோம்!! வாழ்வோம்!!!.

முனைவர் ஏ. சந்திரசேகரன்
மற்றும் ஆசிரியர் குழு

குறியீடுகள்

$=$	சமம் (equal to)
$\neq$	சமமில்லை (not equal to)
$<$	விடக்குறைவு (less than)
$\leq$	குறைவு அல்லது சமம் (less than or equal to)
$>$	விட அதிகம் (greater than)
$\geq$	அதிகம் அல்லது சமம் (greater than or equal to)
$\approx$	சமானமான (equivalent to)
$\cup$	சேர்ப்பு (union)
$\cap$	வெட்டு (intersection)
$\mathbb{U}$	அனைத்துக் கணம் (universal Set)
$\in$	உறுப்பு (belongs to)
$\notin$	உறுப்பல்ல(does not belong to)
$\subset$	தகு உட்கணம் (proper subset of)
$\subseteq$	உட்கணம் (subset of or is contained in)
$\not\subset$	தகு உட்கணமல்ல (not a proper subset of)
$\not\subseteq$	உட்கணமல்ல (not a subset of or is not contained in)
A' (or) A^c	A-ன் நிரப்புக்கணம் (complement of A)
$\varnothing$ (or) $\{\ \}$	வெற்றுக்கணம் அல்லது இன்மை கணம் (empty set or null set or void set)
$n(A)$	ஆதிஎண் அல்லது செவ்வெண் (number of elements in the set A)
$P(A)$	A-ன் அடுக்குக் கணம் (power set of A)
$\|\|^{ly}$	இதே போன்று (similarly)
$\mathrm{P}(A)$	A என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு (probability of the event A)
Δ	சமச்சீர் வித்தியாசம் (symmetric difference)
$\mathbb{N}$	இயல் எண்கள் (natural numbers)
$\mathbb{W}$	முழுஎண்கள் (whole numbers)
$\mathbb{Z}$	முழுக்கள் (integers)
$\mathbb{R}$	மெய்யெண்கள் (real numbers)
$\triangle$	முக்கோணம் (triangle)
$\angle$	கோணம் (angle)
$\perp$	செங்குத்து (perpendicular to)
$\|\|$	இணை (parallel to)
$\Longrightarrow$	உணர்த்துகிறது (implies)
$\therefore$	எனவே (therefore)
$\because$	ஏனெனில் (since (or) because)
$\|\ \ \|$	தனிமதிப்பு (absolute value)
$\simeq$	தோராயமாக சமம் (approximately equal to)
$\|$ (or) :	அதன்படி அல்லது என்றவாறு (such that)
$\equiv$ (or) $\cong$	சர்வசமம் (congruent)
$\equiv$	முற்றொருமை (identically equal to)
π	பை (pi)
$\pm$	மிகை அல்லது குறை (plus or minus)
■	தேற்றம் முடிவு (end of the proof)

பொருளடக்கம்

1 கணவியல்

No one shall expel us from the paradise that Cantor has created for us

- DAVID HILBERT

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- கணத்தை வரையறுத்தல்
- விவரித்தல் முறை, கணக்கட்டமைப்பு முறை மற்றும் பட்டியல் முறையில் கணங்களைக் குறிப்பிடுதல்
- பல்வேறு வகையான கணங்களை அடையாளம் காணல்
- கணச்செயல்களை புரிந்து கொள்ளுதல்
- கணங்கள் மற்றும் கணச்செயல்களை வென்படங்களில் குறிக்கக் கற்றுக்கொள்ளுதல்
- $n(A \cup B)$-க்கான சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி எளிய கணக்குகளைச் செய்தல்

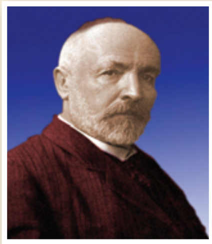
1.1 அறிமுகம்

கணிதவியலில் முக்கிய பங்காற்றுவதும் அனைத்து பிரிவுகளிலும் பயன்படுத்தப்படுவதும் கணம் என்ற கருத்தாகும்.

கணிதவியலின் அனைத்து வடிவங்களையும் கணங்களாக கருத முடியும் என்பதால், கணிதவியலில் கணக்குறியீடு முறை ஒரு வசதியான அமைப்பாக கருதப்படுகிறது. கணக்கொள்கைகளைப் புரிந்து கொள்வதன் மூலம் கணிதவியல் கருத்துக்களை ஓர் அமைப்பாகக் கருதி, அவற்றை ஒழுங்குபடுத்தி கணங்களாக எழுதவும், தர்க்க ரீதியாகப் புரிந்து கொள்ளவும் முடியும். பின்னர், இவ்வகுப்பில் இயல் எண்கள், விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் மெய்யெண்களை எவ்வாறு கணங்களாக எழுதலாம் என நாம் படிக்க உள்ளோம். இப்பாடப்பகுதியில், கணக்கொள்கைகள் பற்றியும், கணவியலின் சில அடிப்படைச்செயல்கள் பற்றியும் படிக்கலாம்.

1.2 கணங்களை விளக்குதல்

புத்தகங்களின் தொகுப்பு, மாணவர்களின் குழு, ஒரு நாட்டில் உள்ள மாநிலங்களின் பட்டியல், நாணயங்களின் தொகுப்பு போன்றவற்றில் தொகுப்பு அல்லது குழு என்ற சொற்களை நாம் அடிக்கடி பயன்படுத்துகிறோம். பொருட்களின் தொகுப்பு அல்லது குழு என்பவற்றை கணித முறையில் குறிப்பிடும் முறையே கணமாகும்.



ஜார்ஜ் கேண்டர்
(1845-1918)

கணவியலின் அடிப்படைக்கருத்துக்கள் ஜார்ஜ் கேண்டர் *(Georg Cantor)* என்ற ஜெர்மன் நாட்டு கணிதவியல் அறிஞரால் உருவாக்கப்பட்டது. பூரியர் தொடர் எனப்படும் ஒரு வகை முடிவிலி தொடர் குறித்து அவர் ஆராய்ந்தார். அதனடிப்படையில் நவீன கணிதவியல் பகுப்பாய்வுகளின் அடிப்படையாக கணவியல் அமைந்துள்ளது என பெரும்பாலான கணிதவியல் அறிஞர்கள் ஏற்றுக் கொண்டனர். கேண்டரின் இப்பணியானது பிற்காலத்தில் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட கணிதவியல் தர்க்க முறைக்கு அடிப்படையாக அமைந்தது.

முக்கிய கருத்து **கணம்**

நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட பொருட்களின் தொகுப்பு கணம் எனப்படும். கணத்தில் உள்ள பொருட்கள் அக்கணத்தின் உறுப்புகள் எனப்படும்.

ஒரு கணம் ‘நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது’ என்பது கணிதவியலில் கணத்தின் ஒரு முக்கியமான பண்பாகும். அதாவது, கொடுக்கப்பட்ட எந்தவொரு பொருளும் அக்கணத்தின் ஒரு உறுப்பாகும் அல்லது உறுப்பாகாது என தெளிவாக குறிப்பிடுவதாகும்.

மேலும், ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் வெவ்வேறானவை. அதாவது எந்த இரு உறுப்புகளும் சமமல்ல.

பின்வரும் தொகுப்புகளில் எவை நன்கு வரையறுக்கப்பட்டவை?

(1) உன் வகுப்பில் உள்ள ஆண் மாணவர்களின் தொகுப்பு.

(2) 2,4,6,10 மற்றும் 12 என்ற எண்களின் தொகுப்பு.

(3) தமிழ் நாட்டில் உள்ள அனைத்து மாவட்டங்களின் தொகுப்பு.

(4) நல்ல திரைப்படங்களின் தொகுப்பு.

(1), (2) மற்றும் (3) ஆகியவை நன்கு வரையறுக்கப்பட்டவை. ஆகவே அவை கணங்களாகும். (4) ஆனது நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது அல்ல. ஏனெனில், ‘நல்ல திரைப்படம்’ என்ற வார்த்தை நன்கு வரையறுக்கப்படவில்லை. எனவே, (4) கணமாகாது.

பொதுவாக, கணங்களை A, B, C போன்ற ஆங்கில பெரிய எழுத்துக்களால் குறிப்போம். கணத்தின் உறுப்புகளை a, b, c போன்ற ஆங்கில சிறிய எழுத்துக்களால் குறிப்போம்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\in$	‘-ன் ஒரு உறுப்பு’ அல்லது ‘-ல் உள்ளது’

x என்பது கணம் A–ன் உறுப்பு என்பதை $x \in A$ என எழுதுவோம்.

$\notin$	‘-ன் ஒரு உறுப்பல்ல’ அல்லது ‘-ல் இல்லை’

x என்பது கணம் A-ன் உறுப்பல்ல என்பதை $x \notin A$ என எழுதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{1, 3, 5, 9\}$ என்ற கணத்தைக் கருதுக.

1 என்பது கணம் A-ன் உறுப்பாகும். இதனை $1 \in A$ என எழுதலாம்.

3 என்பது கணம் A-ன் உறுப்பாகும். இதனை $3 \in A$ என எழுதலாம்.

8 என்பது கணம் A-ன் உறுப்பல்ல. இதனை $8 \notin A$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.1

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ என்க. காலியிடங்களை $\in$ அல்லது $\notin$ என்ற பொருத்தமான குறியிட்டு நிரப்புக.

(i) 3 .... A (ii) 7 .... A (iii) 0 ...... A (iv) 2 ...... A

தீர்வு
(i) $3 \in A$ ($\because$ 3 **என்பது** A-**ன் உறுப்பாகும்**)

(ii) $7 \notin A$ ($\because$ 7 **என்பது** A-**ன் உறுப்பல்ல**)

(iii) $0 \notin A$ ($\because$ 0 **என்பது** A-**ன் உறுப்பல்ல**)

(iv) $2 \in A$ ($\because$ 2 **என்பது** A-**ன் உறுப்பாகும்**)

1.3 கணத்தைக் குறிப்பிடும் முறை (Representation of a Set)

ஒரு கணத்தினை பின்வரும் மூன்று வழிகளில் அல்லது முறைகளில் ஏதேனும் ஒன்றால் குறிப்பிடலாம்.

(i) விவரித்தல் முறை அல்லது வருணனைமுறை (Descriptive Form)
(ii) கணக்கட்டமைப்பு முறை அல்லது விதி முறை (Set-Builder Form or Rule Form)
(iii) பட்டியல் முறை அல்லது அட்டவணை முறை (Roster Form or Tabular Form)

1.3.1 விவரித்தல் முறை

முக்கிய கருத்து **விவரித்தல் முறை**

கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளை வார்த்தைகளால் தெளிவாக விவரிக்கும் முறை 'விவரித்தல்' அல்லது 'வருணனை முறை' எனப்படும்.

எவை கணத்தின் உறுப்புகள் மற்றும் கணத்தின் உறுப்புகள் அல்ல என்பதைச் சுருக்கமாகவும், தெளிவாகவும் தெரிவிப்பதாக விவரித்தல் முறை அமைய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) அனைத்து இயல் எண்களின் கணம்.
(ii) 100 ஐ விடக் குறைவான பகா எண்களின் கணம்.
(iii) அனைத்து ஆங்கில எழுத்துக்களின் கணம்.

1.3.2 கணக்கட்டமைப்பு முறை

முக்கிய கருத்து **கணக்கட்டமைப்பு முறை**

ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் நிறைவு செய்யும் பண்புகளின் அடிப்படையில் கணத்தைக் குறிப்பிடும் முறை கணக்கட்டமைப்பு முறையாகும்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

'$\vert$' அல்லது '$:$'	'அதன்படி' அல்லது 'என்றவாறு'

A = $\{x : x$ என்பது CHENNAI என்ற சொல்லில் உள்ள ஓர் எழுத்து$\}$

இக்கணத்தினை, "x என்பது CHENNAI என்ற சொல்லில் உள்ள ஓர் எழுத்து என்றவாறுள்ள எல்லா x-ன் கணம் A" எனப்படிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $\mathbb{N} = \{x : x$ ஒரு இயல் எண்$\}$

(ii) $P = \{x : x$ என்பது 100ஐ விடக் குறைவான ஒரு பகா எண்$\}$

(iii) $A = \{x : x$ ஒரு ஆங்கில எழுத்து$\}$

1.3.3 பட்டியல் முறை

முக்கிய கருத்து	பட்டியல் முறை
ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளை { } என்ற ஒரு சோடி அடைப்பிற்குள் பட்டியலிடுவது பட்டியல் முறை அல்லது அட்டவணை முறை என்றழைக்கப்படுகிறது.	

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) A என்பது 11ஐ விடக் குறைவாக உள்ள இரட்டைப்படை இயல் எண்களின் கணம் என்க. இக்கணத்தினைப் பட்டியல் முறையில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

(ii) $A = \{x : x$ ஒரு முழு (Integer) மற்றும் $-1 \leq x < 5\}$

இக்கணத்தினைப் பட்டியல் முறையில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

குறிப்பு

(i) பட்டியல் முறையில் கணத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரேயொரு முறை மட்டுமே பட்டியலிடப்பட வேண்டும். வழக்கமாக ஒரு கணத்தில் ஏற்கனவே வந்த உறுப்புகள் மீண்டும் வராது.

(ii) "COFFEE" என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் கணம் A என்க.
அதாவது, A={ C, O, F, E }. பட்டியல் முறையில் எழுதப்பட்டுள்ள A என்ற கணத்தின் பின்வரும் தொகுப்புகள் பொருத்தமற்றவை.

{C, O, E} (எல்லா உறுப்புகளும் பட்டியலிடப்படவில்லை)

{C, O, F, F, E} (F என்ற எழுத்து இருமுறை பட்டியலிடப்பட்டுள்ளது)

(iii) பட்டியல் முறையில் குறிப்பிடும்போது ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளை எந்த வரிசையிலும் எழுதலாம். எனவே 2, 3 மற்றும் 4 ஆகியவற்றை உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணத்தினை பின்வருமாறு பொருளுடைய (பொருத்தமான) பட்டியல் அமைப்புகளாக எழுதலாம்.

$\{2, 3, 4\}$ $\{2, 4, 3\}$ $\{4, 3, 2\}$

மேற்கண்ட கணங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒரே கணத்தைக் குறிக்கின்றன.

(iv) ஒரு கணமானது முடிவிலா அல்லது முடிவுறு ஆனால் அதிக எண்ணிக்கையிலான உறுப்புகளைப் பெற்றிருந்தால், பட்டியலிடப் பட்ட உறுப்புகளின் அமைப்பு தொடர்ந்து செல்லும் என்பதை $\{5, 6, 7, \cdots\}$ அல்லது $\{3, 6, 9, 12, 15, \cdots, 60\}$ என்பவற்றில் உள்ளது போன்று '$\cdots$' என்ற மூன்று தொடர்புள்ளிகளால் (*ellipsis*) குறிப்பிடுவோம்.

(v) ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் முழு அமைப்பையும் புரிந்து கொள்ளும் வகையில் போதுமான விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் மட்டுமே ‘$\cdots$’ என்ற தொடர்ச்சியான மூன்று புள்ளிகளைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

கணங்களைக் குறிப்பிடும் பல்வேறு முறைகள்

விவரித்தல் முறை	கணக்கட்டமைப்பு முறை	பட்டியல் முறை
அனைத்து ஆங்கில உயிரெழுத்துகளின் கணம்	$\{x : x$ ஒரு ஆங்கில உயிரெழுத்து$\}$	$\{a, e, i, o, u\}$
15-க்கு குறைவாகவோ அல்லது சமமாகவோ உள்ள ஒற்றைப்படை மிகைமுழு எண்களின் கணம்	$\{x : x$ ஒரு ஒற்றைப்படை எண் மற்றும் $0 < x \leq 15\}$	$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$
0-க்கும் 100-க்கும் இடையில் உள்ள முழு கன எண்களின் (Perfect Cube numbers) கணம்	$\{x : x$ ஒரு முழு கன எண் மற்றும் $0 < x < 100\}$	$\{1, 8, 27, 64\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.2

பின்வரும் கணங்களின் உறுப்புகளைப் பட்டியல் முறையில் எழுதுக

(i) 7-ன் மடங்குகளாக உள்ள மிகை முழுக்களின் கணம்.

(ii) 20 ஐ விடக் குறைவான பகா எண்களின் கணம்.

தீர்வு (i) 7-ன் மடங்குகளாக உள்ள மிகை முழுக்களின் கணத்தைப் பட்டியல் முறையில் $\{7, 14, 21, 28, \cdots\}$ என எழுதலாம்.

(ii) 20 ஐ விடக் குறைவாக உள்ள பகா எண்களின் கணத்தைப் பட்டியல் முறையில் $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.3

$A = \{x : x$ ஒரு இயல் எண் $\leq 8\}$ என்ற கணத்தைப் பட்டியல் முறையில் எழுதுக.

தீர்வு $A = \{x : x$ ஒரு இயல் எண் $\leq 8\}$.

இக்கணத்தில் உள்ள உறுப்புகள் 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

எனவே, பட்டியல் முறையில் இக்கணத்தினை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.4

பின்வரும் கணங்களை கணக்கட்டமைப்பு முறையில் குறிப்பிடுக.

(i) X = {ஞாயிறு, திங்கள், செவ்வாய், புதன், வியாழன், வெள்ளி, சனி}

(ii) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\right\}$

தீர்வு (i) X = {ஞாயிறு, திங்கள், செவ்வாய், புதன், வியாழன், வெள்ளி, சனி}

X என்ற கணம் வாரத்தின் எல்லா நாட்களையும் கொண்டுள்ளது.

எனவே, X என்ற கணத்தை கணக்கட்டமைப்பு முறையில் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

$X = \{x : x$ வாரத்தின் ஒருநாள்$\}$

(ii) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\right\}$. கணம் A-ல் உள்ள உறுப்புகளின் பகுதிகள் $1, 2, 3, 4, \cdots$ ஆகும்.

எனவே, A என்ற கணத்தை கணக்கட்டமைப்பு முறையில் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

$$A = \left\{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

1.3.4 ஆதி எண் அல்லது செவ்வெண் (Cardinal Number)

முக்கிய கருத்து	**ஆதி எண்**
ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அக்கணத்தின் ஆதி எண் அல்லது செவ்வெண் எனப்படும்.	

குறியீட்டைப் படித்தல்

$n(A)$	A என்ற கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

A என்ற கணத்தின் ஆதி எண்ணை $n(A)$ எனக் குறிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ என்ற கணத்தை எடுத்துக் கொள்க.

கணம் A-ல் 7 உறுப்புகள் உள்ளன.

எனவே, A என்ற கணத்தின் ஆதி எண் 7 ஆகும்.

அதாவது, $n(A) = 7$

எடுத்துக்காட்டு 1.5

பின்வரும் கணங்களின் ஆதி எண்ணைக் காண்க

(i) $A = \{x : x$ என்பது 12-ன் ஒரு பகாகாரணி$\}$

(ii) $B = \{x : x \in \mathbb{W}, x \leq 5\}$

தீர்வு (i) 12-ன் காரணிகள் 1, 2, 3, 4, 6, 12. 12-ன் பகா காரணிகள் 2, 3.

பட்டியல் முறையில் கணம் Aஐ பின்வருமாறு எழுதலாம். $A = \{2, 3\}$ எனவே, $n(A) = 2$.

(ii) $B = \{x : x \in \mathbb{W}, x \leq 5\}$

பட்டியல் முறையில் கணம் Bஐ பின்வருமாறு எழுதலாம். $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

கணம் B-ல் ஆறு உறுப்புகள் உள்ளன. எனவே, $n(B) = 6$

1.4 கணங்களின் பல்வேறு வகைகள் (Different kinds of Sets)

1.4.1 வெற்றுக்கணம் (Empty Set)

முக்கிய கருத்து — **வெற்றுக்கணம்**

உறுப்புகள் இல்லாத கணம் வெற்றுக்கணம் அல்லது இன்மைகணம் அல்லது வெறுமைகணம் என்றழைக்கப்படும்

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\varnothing$ அல்லது $\{\ \}$	வெற்றுக்கணம் அல்லது இன்மைகணம் அல்லது வெறுமைகணம்

வெற்றுக்கணத்தை $\varnothing$ அல்லது $\{\ \}$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{x : x < 1, x \in \mathbb{N}\}$ என்ற கணத்தைக் கருதுக.

1ஐ விடக் குறைவான இயல் எண் எதுவும் இல்லை.

எனவே, A என்ற கணத்தில் உறுப்புகள் எதுவும் இல்லை.

$\therefore\ A = \{\ \}$

நினைவு கூர்ந்து விடையளி !
$n(\varnothing) = ?$

குறிப்பு எண்ணியலில் ‘பூச்சியம்’ என்ற மெய்யெண் முக்கிய பங்கு வகிக்கிறது. அதைப் போலவே கணவியலில், வெற்றுக்கணம் $\varnothing$ ஆனது முக்கிய பங்காற்றுகிறது.

1.4.2 முடிவுறு கணம் (Finite set)

முக்கிய கருத்து — **முடிவுறு கணம்**

ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை பூச்சியம் அல்லது முடிவுறு (எண்ணிக்கைக்குட்பட்ட) எண் எனில், அக்கணம் முடிவுறு கணம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) 8-க்கும் 9-க்கும் இடைப்பட்ட இயல் எண்களின் கணம் A என்க.
8-க்கும் 9-க்கும் இடையில் எந்த இயல் எண்ணும் இல்லை.

எனவே, $A = \{\ \}\ \therefore\ n(A) = 0$.

A என்பது முடிவுறு கணமாகும்.

(ii) $X = \{x : x$ ஒரு முழு மற்றும் $-1 \leq x \leq 2\}$ என்ற கணத்தை கருதுக

பட்டியல் முறையில் X என்ற கணத்தை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$X = \{-1, 0, 1, 2\}$. $\therefore n(X) = 4$

எனவே, X ஒரு முடிவுறு கணமாகும்.

குறிப்பு முடிவுறு கணத்தின் ஆதி எண் முடிவுறு எண்ணாகும்.

1.4.3 முடிவிலா கணம் (Infinite set)

முக்கிய கருத்து	முடிவிலா கணம்
ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முடிவுறு எண் அல்ல எனில், அக்கணம் முடிவிலா அல்லது முடிவுறாக் கணமாகும்	

எடுத்துக்காட்டாக,

பின்வரும் கணத்தைக் கருதுக.

முழு எண்களின் கணம் $\mathbb{W}$ ஐ பட்டியல் முறையில் $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ என எழுதலாம்.

முழு எண்களின் கணம் முடிவிலா எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளைக் கொண்டிருப்பதால், $\mathbb{W}$ முடிவிலா கணமாகும்.

குறிப்பு முடிவிலா கணத்தின் ஆதி எண் முடிவுறு எண் அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 1.6

பின்வரும் கணங்களில் முடிவுறு மற்றும் முடிவிலா கணங்கள் எவை எனக் கூறுக.

(i) $A = \{x : x$ என்பது 5-ன் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}\}$

(ii) $B = \{x : x$ ஒரு இரட்டைப் பகாஎண்$\}$

(iii) 50 ஐ விடப் பெரிய மிகை முழுக்களைக் கொண்ட கணம்.

தீர்வு (i) $A = \{x : x$ ஒரு 5-ன் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}\}$. பட்டியல் முறையில் இக்கணத்தை எழுத,

$A = \{5, 10, 15, 20, ...\}$

$\therefore A$ என்ற கணம் முடிவிலா கணமாகும்.

(ii) $B = \{x : x$ ஒரு இரட்டைப் பகாஎண்$\}$.

பகா எண்களில் 2 மட்டுமே இரட்டைப் பகாஎண் ஆகும்.

பட்டியல் முறையில் B என்ற கணத்தை பின்வருமாறு எழுதலாம்

$B = \{ 2 \}$. எனவே, B முடிவுறு கணமாகும்.

(iii) X என்பது 50 ஐ விடப்பெரிய மிகை முழுக்களின் கணம் என்க.

பட்டியல் முறையில் X என்ற கணத்தை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$X = \{51, 52, 53, ...\}$

கணம் X எண்ணற்ற உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ளது. எனவே, X முடிவிலா கணமாகும்.

1.4.4 ஒருறுப்புக் கணம் (Singleton set)

முக்கிய கருத்து	ஒருறுப்புக் கணம்
ஒரேயொரு உறுப்பை மட்டும் கொண்டுள்ள கணம் ஒருறுப்புக் கணம் என்றழைக்கப்படும்.	

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{x : x$ ஒரு முழு மற்றும் $1 < x < 3\}$ கணத்தைப் பட்டியல் முறையில் எழுத, $A = \{ 2 \}$ எனக் கிடைக்கும்.

கணம் A ஒரேயொரு உறுப்பைக் கொண்டுள்ளது.

ஆகவே, A ஒருறுப்புக் கணமாகும்.

குறிப்புரை

பின்வருவன அனைத்தும் ஒரே கணமல்ல என்பதை புரிந்து கொள்வது இன்றியமையாததாகும்.

(i) வெற்றுக்கணம் $\varnothing$

(ii) வெற்றுக் கணத்தை மட்டும் ஒரு உறுப்பாகக் கொண்ட கணம் $\{\varnothing\}$

(iii) பூச்சியத்தை மட்டும் ஒரு உறுப்பாகக் கொண்ட கணம் $\{0\}$

1.4.5 சமான கணங்கள் (Equivalent sets)

முக்கிய கருத்து — **சமான கணம்**

A, B என்ற இரு கணங்களில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை சமம் எனில், அவை சமான கணங்கள் எனப்படும்.

A, B என்ற கணங்கள் சமான கணங்கள் எனில், $n(A) = n(B)$ ஆகும்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\approx$	சமானமான

A, B என்பன சமானமானவை எனில், $A \approx B$ என எழுதலாம்

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{ 7, 8, 9, 10 \}$ மற்றும் $B = \{ 3, 5, 6, 11 \}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக.

இங்கு $n(A) = 4$ மற்றும் $n(B) = 4$.

$\therefore A \approx B$

1.4.6 சம கணங்கள் (Equal sets)

முக்கிய கருத்து	சம கணம்

A, B என்ற இரு கணங்களில் உள்ள உறுப்புகள் அவை எழுதப்பட்டுள்ள வரிசையைப் பொருட்படுத்தாமல் சரியாக அதே உறுப்புக்களைக் கொண்டிருந்தால், அவை சம கணங்கள் எனப்படும். அவ்வாறு இல்லையெனில், அவை சமமற்ற கணங்கள் எனப்படும்.

A, B என்ற கணங்கள் சமம் எனில்,

(i) கணம் A-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் கணம் B-ன் உறுப்பாகவும் இருக்கும்.

(ii) கணம் B-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் கணம் A-ன் உறுப்பாகவும் இருக்கும்

குறியீட்டைப் படித்தல்

$=$	சமம்	A, B என்ற கணங்கள் சமம் எனில், $A = B$ என எழுதலாம்.
$\neq$	சமமல்ல	A, B என்ற கணங்கள் சமமற்றவை எனில், $A \neq B$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{ a, b, c, d \}$ மற்றும் $B = \{ d, b, a, c \}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக.

A, B என்ற கணங்கள் சரியாக அதே உறுப்புகளைப் பெற்றுள்ளன.

$\therefore A = B$

குறிப்பு A, B என்ற கணங்கள் சமம் எனில், $n(A) = n(B)$ ஆகும். ஆனால் $n(A) = n(B)$ எனில் A, B என்ற கணங்கள் சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

எனவே, சம கணங்கள் அனைத்தும் சமான கணங்களாகும். ஆனால், சமான கணங்கள் அனைத்தும் சம கணங்களாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 1.7

கொடுக்கப்பட்ட $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ மற்றும்

$B = \{x : x$ என்பது இரண்டின் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}$ மற்றும் $x \leq 14\}$

ஆகியன சமகணங்களா எனக் கூறுக.

தீர்வு $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ மற்றும்

$B = \{x : x$ என்பது இரண்டின் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}$ மற்றும் $x \leq 14\}$

பட்டியல் முறையில் எழுத, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

A, B என்ற இரு கணங்களும் சரியாக அதே உறுப்புகளைப் பெற்றுள்ளதால், $A = B$ ஆகும்.

1.4.7 உட்கணம் (Subset)

முக்கிய கருத்து **உட்கணம்**

கணம் A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் கணம் B-ன் உறுப்பாகவும் இருக்குமானால், A ஆனது B-ன் ஓர் உட்கணமாகும். இதனைக் குறியீட்டில் $A \subseteq B$ என எழுதலாம்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\subseteq$	உட்கணம் அல்லது உள்ளடங்கியது

$A \subseteq B$ என்பதை 'A என்பது B-ன் உட்கணம்' அல்லது 'A என்பது B-ல் உள்ளடங்கியது' எனப் படிப்போம்.

$\nsubseteq$	உட்கணமல்ல அல்லது உள்ளடங்காதது

$A \nsubseteq B$ என்பதை 'A என்பது B-ன் உட்கணமல்ல' அல்லது 'A என்பது B-ல் உள்ளடங்காதது' எனப் படிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{7, 8, 9\}$ மற்றும் $B = \{ 7, 8, 9, 10 \}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக. இங்கு கணம் A-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் கணம் B-ன் உறுப்பாகவும் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

எனவே, A என்பது B-ன் உட்கணமாகும். அதாவது, $A \subseteq B$.

குறிப்பு

(i) ஒவ்வொரு கணமும் தனக்குத்தானே உட்கணமாகும். அதாவது, A என்ற எந்தவொரு கணத்திற்கும் $A \subseteq A$ ஆகும்.

(ii) வெற்றுக்கணம் எந்தவொரு கணத்துக்கும் உட்கணமாகும். அதாவது, A என்ற எந்தவொரு கணத்திற்கும் $\varnothing \subseteq A$.

(iii) $A \subseteq B$ மற்றும் $B \subseteq A$ எனில், $A = B$ ஆகும். இதன் மறுதலையும் உண்மை. அதாவது, $A = B$ எனில், $A \subseteq B$ மற்றும் $B \subseteq A$ ஆகும்.

(iv) ஒவ்வொரு கணமும் ($\varnothing$ ஐத்தவிர) குறைந்தபட்சம் அக்கணத்தையும், $\varnothing$ யையும் இரு உட்கணங்களாகக் கொண்டிருக்கும்.

1.4.8 தகு உட்கணம் (Proper subset)

முக்கிய கருத்து **தகு உட்கணம்**

$A \subseteq B$ மற்றும் $A \neq B$ என்றவாறு இருப்பின், கணம் A ஆனது கணம் B-ன் தகு உட்கணம் எனப்படும். இதனைக் குறியீட்டில் $A \subset B$ என எழுதலாம். B என்பது A-ன் மிகை கணம் (Super set) எனப்படும்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\subset$	தகு உட்கணம்

$A \subset B$ என்பதை 'A என்பது B-ன் தகு உட்கணம்' எனப் படிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{5, 7, 8\}$ மற்றும் $B = \{ 5, 6, 7, 8 \}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக.

இங்கு, A-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் B-ன் உறுப்பாகும். மேலும் $A \neq B$.

எனவே, A என்பது B-ன் தகு உட்கணமாகும்.

குறிப்பு

(i) தகு உட்கணம், மிகை கணத்தைவிட குறைந்தபட்சம் ஒரு உறுப்பையாவது குறைவாகப் பெற்றிருக்கும்.

(ii) எந்தவொரு கணமும் அக்கணத்திற்கே தகு உட்கணமாகாது.

(iii) வெற்றுக்கணம் $\varnothing$ ஆனது அக்கணத்தைத்தவிர மற்ற எல்லா கணங்களுக்கும் தகு உட்கணமாகும். [வெற்றுக்கணம் $\varnothing$-க்கு தகு உட்கணம் இல்லை] அதாவது, $\varnothing$ஐத் தவிர மற்ற எந்தவொரு கணம் A-வுக்கும் $\varnothing \subset A$ ஆகும்.

(iv) $\in$ மற்றும் $\subseteq$ என்ற குறியீடுகளுக்கான வேறுபாட்டை புரிந்து கொள்வது அவசியமாகும். $x \in A$ என்ற குறியீடு, x என்பது A-ன் உறுப்பு என்பதைக் குறிப்பிடுகிறது. $A \subseteq B$ என்ற குறியீடு, A என்பது B-ன் உட்கணம் என்பதைக் குறிப்பிடுகிறது.

எனவே, $\varnothing \subseteq \{a, b, c\}$ என்பது சரியானது. ஆனால், $\varnothing \in \{a, b, c\}$ என்பது சரியல்ல.

$x \in \{x\}$, என எழுதுவது சரியானது. ஆனால், $x = \{x\}$ அல்லது $x \subseteq \{x\}$ என எழுதுவது சரியல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 1.8

பின்வரும் கூற்றுகளை உண்மையாக்க, காலியிடங்களில் $\subseteq$ அல்லது $\nsubseteq$ என்ற குறிகளைக் கொண்டு நிரப்புக.

(a) $\{4, 5, 6, 7\}$ ----- $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ (b) $\{a, b, c\}$ ----- $\{b, e, f, g\}$

தீர்வு (a) $\{4, 5, 6, 7\}$ என்ற கணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ என்ற கணத்தின் உறுப்பாகவும் உள்ளது.

எனவே, காலியிடத்தில் $\subseteq$ என்ற குறியை இடுக.

அதாவது, $\{4, 5, 6, 7\} \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\}$

(b) $a \in \{a, b, c\}$ ஆனால், $a \notin \{b, e, f, g\}$

எனவே, காலியிடத்தில் $\nsubseteq$ என்ற குறியை இடுக.

அதாவது, $\{a, b, c\} \nsubseteq \{b, e, f, g\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.9

பின்வரும் கூற்றுகளை உண்மையாக்க $\subset, \subseteq$ என்ற குறியீடுகளில் எதை காலியிடங்களில் இடவேண்டும் எனத் தீர்மானிக்க.

(i) $\{8, 11, 13\}$ ----- $\{8, 11, 13, 14\}$

(ii) $\{a, b, c\}$ ------, $\{a, c, b\}$

தீர்வு (i) $\{8, 11, 13\}$ என்ற கணத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $\{8, 11, 13, 14\}$ என்ற கணத்தின் உறுப்பாகவும் உள்ளதால், காலியிடத்தில் $\subseteq$ என்ற குறியை இடவேண்டும்.

$\therefore \{8,11,13\} \subseteq \{8,11,13,14\}$

மேலும் $14 \in \{8, 11, 13, 14\}$. ஆனால் $14 \notin \{8, 11, 13\}$

எனவே, $\{8,11,13\}$ என்ற கணம் $\{8,11,13,14\}$ என்ற கணத்தின் தகு உட்கணமாகும். ஆதலால், காலியிடத்தில் $\subset$ என்ற குறியையும் இடலாம்.

$\therefore \{8,11,13\} \subset \{8,11,13,14\}$

(ii) $\{a, b, c\}$ என்ற கணத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பும், $\{a, c, b\}$ என்ற கணத்தின் உறுப்பாகவும் உள்ளது.

எனவே, இவ்விரு கணங்களும் சம கணங்களாகும். $\{a, b, c\}$ என்பது $\{a, c, b\}$ என்ற கணத்தின் தகு உட்கணமாகாது.

எனவே, காலியிடத்தை $\subseteq$ என்ற குறியைக் கொண்டு மட்டுமே நிரப்ப முடியும்.

1.4.9 அடுக்குக்கணம் (Power Set)

முக்கிய கருத்து	அடுக்குக்கணம்
A என்ற கணத்தின் அனைத்து உட்கணங்களையும் கொண்ட கணம், அக்கணத்தின் அடுக்குக்கணம் எனப்படும்.	
குறியீட்டைப் படித்தல்	
$P(A)$	A-ன் அடுக்குக்கணம்
A-ன் அடுக்குக்கணம் $P(A)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.	

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{-3, 4\}$ என்ற கணத்தைக் எடுத்துக்கொள்க.

கணம் A-ன் உட்கணங்கள்

$\varnothing, \{-3\}, \{4\}, \{-3, 4\}$ ஆகும்.

எனவே, A-ன் அடுக்குக் கணம்

$P(A) = \{\varnothing, \{-3\}, \{4\}, \{-3, 4\}\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.10

$A = \{3, \{4, 5\}\}$ என்ற கணத்தின் அடுக்குக்கணத்தை எழுதுக.

தீர்வு $A = \{3, \{4, 5\}\}$

A-ன் உட்கணங்கள், $\varnothing, \{3\}, \{\{4, 5\}\}, \{3, \{4, 5\}\}$

$\therefore P(A) = \{\varnothing, \{3\}, \{\{4, 5\}\}, \{3, \{4, 5\}\}\}$

ஒரு முடிவுறு கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை

மிக அதிக அளவில் உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ள கணங்களுக்கு உட்கணங்களை எழுதி அவற்றின் எண்ணிக்கையைக் காண்பது கடினமாகும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு முடிவுறு கணம் எத்தனை உட்கணங்களைக் கொண்டிருக்கும் என்பதைக் காண ஒரு விதியைக் காண்போம்.

(i) $A = \varnothing$ என்ற கணம் அக்கணத்தை மட்டுமே உட்கணமாகக் கொண்டிருக்கும்.

(ii) $A = \{5\}$ என்ற கணத்தின் உட்கணங்கள் $\varnothing$ மற்றும் $\{5\}$ ஆகும்.

(iii) $A = \{5, 6\}$ என்ற கணத்தின் உட்கணங்கள் $\varnothing, \{5\}, \{6\}$ மற்றும் $\{5, 6\}$ ஆகும்.

(iv) $A = \{5, 6, 7\}$ என்ற கணத்தின் உட்கணங்கள் $\varnothing, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}$ மற்றும் $\{5, 6, 7\}$ ஆகும்.

இவ்விவரங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3
உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$

மேற்கண்ட அட்டவணை, ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையில் ஒன்றை அதிகரிக்க, உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை இரு மடங்காகிறது என்பதைக் காட்டுகிறது. அதாவது, ஒவ்வொரு நிலையிலும் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை 2-ன் அடுக்காக உள்ளது என்பதை தெரிவிக்கிறது. எனவே, கீழ்க்கண்ட பொதுவிதியை நாம் பெறுகிறோம்.

m உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை 2^m ஆகும்.

$$n(A) = m \Rightarrow n[P(A)] = 2^{n(A)} = 2^m$$

இந்த 2^m உட்கணங்களில் கொடுக்கப்பட்ட கணமும் உள்ளடங்கியுள்ளது.

எனவே, ***m*** உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $2^m - 1$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.11

பின்வரும் கணங்கள் ஒவ்வொன்றின் உட்கணங்கள் மற்றும் தகுஉட்கணங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) $A = \{3,4,5,6,7\}$ (ii) $A = \{1,2,3,4,5,9,12,14\}$

தீர்வு (i) $A = \{3,4,5,6,7\}$. எனவே, $n(A) = 5$.

உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $= n[P(A)] = 2^5 = 32$.

தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $= 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$

(ii) $A = \{1,2,3,4,5,9,12,14\}$. $n(A) = 8$.

உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $= 2^8 = 2^5 \times 2^3 = 32 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

தகுஉட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $= 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$

பயிற்சி 1.1

1. பின்வருவனவற்றில் எவை கணங்களாகும்? உமது விடைக்கு காரணம் கூறுக.
   (i) நல்ல புத்தகங்களின் தொகுப்பு
   (ii) 30 ஐ விடக் குறைவாக உள்ள பகாஎண்களின் தொகுப்பு
   (iii) மிகவும் திறமையான பத்து கணித ஆசிரியர்களின் தொகுப்பு
   (iv) உன் பள்ளியிலுள்ள மாணவர்களின் தொகுப்பு
   (v) அனைத்து இரட்டைப்படை எண்களின் தொகுப்பு

2. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ என்க. காலியிடங்களை $\in$ அல்லது $\notin$ என்ற குறியீடுகளில் சரியான குறியிட்டு நிரப்புக.
   (i) 0 ----- A (ii) 6 ----- A (iii) 3 ----- A
   (iv) 4 ----- A (v) 7 ----- A

3. பின்வரும் கணங்களை கணக்கட்டமைப்பு முறையில் எழுதுக.
   (i) அனைத்து மிகை இரட்டைப்படை எண்களின் கணம்
   (ii) 20ஐ விடக்குறைவாக உள்ள முழு எண்களின் கணம்
   (iii) 3-ன் மடங்குகளாக உள்ள மிகை முழுக்களின் கணம்
   (iv) 15ஐ விடக் குறைவாக உள்ள ஒற்றை இயல் எண்களின் கணம்
   (v) 'TAMILNADU' என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களின் கணம்

4. பின்வரும் கணங்களைப் பட்டியல் முறையில் எழுதுக.
   (i) $A = \{x : x \in \mathbb{N},\ 2 < x \le 10\}$
   (ii) $B = \left\{x : x \in \mathbb{Z},\ -\frac{1}{2} < x < \frac{11}{2}\right\}$

(iii) C = $\{x : x$ ஒரு பகா எண் மற்றும் 6-ன் ஒரு வகுஎண்$\}$

(iv) $X = \{x : x = 2^n,\ n \in \mathbb{N}$ மற்றும் $n \leq 5\}$

(v) $M = \{x : x = 2y - 1, y \leq 5, y \in \mathbb{W}\}$

(vi) $P = \{x : x$ ஒரு முழு, $x^2 \leq 16\}$

5. பின்வரும் கணங்களை விவரித்தல் முறையில் எழுதுக.

(i) $A = \{a, e, i, o, u\}$

(ii) $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

(iii) $C = \{1, 4, 9, 16, 25\}$

(iv) $P = \{x : x$ என்பது 'SET THEORY' என்ற சொல்லில் உள்ள ஒரு எழுத்து$\}$

(v) $Q = \{x : x$ என்பது 10-க்கும் 20-க்கும் இடைப்பட்ட ஒரு பகாஎண் $\}$

6. பின்வரும் கணங்களின் ஆதி எண்களைக் காண்க.

(i) $A = \{x : x = 5^n, n \in \mathbb{N}$ மற்றும் $n < 5\}$

(ii) $B = \{x : x$ ஒரு ஆங்கில மெய்யெழுத்து$\}$

(iii) $X = \{x : x$ ஒரு இரட்டைப் பகாஎண்$\}$

(iv) $P = \{x : x < 0,\ x \in \mathbb{W}\}$

(v) $Q = \{x : -3 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{Z}\}$

7. பின்வரும் கணங்களில் எவை முடிவுறு கணங்கள் மற்றும் எவை முடிவிலா கணங்கள் எனக் காண்க.

(i) $A = \{4, 5, 6, ...\}$

(ii) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, ... 75\}$

(iii) $X = \{x : x$ ஒரு இரட்டை இயல்எண்$\}$

(iv) $Y = \{x : x$ என்பது 6-ன் மடங்கு மற்றும் $x > 0\}$

(v) P = 'KARIMANGALAM' என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களின் கணம்.

8. பின்வரும் கணங்களில் எவை சமான கணங்களாகும்?

(i) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(ii) $X = \{x : x \in \mathbb{N}, 1 < x < 6\}$, $Y = \{x : x$ ஒரு ஆங்கில உயிரெழுத்து$\}$

(iii) $P = \{x : x$ ஒரு பகாஎண் மற்றும் $5 < x < 23\}$

$Q = \{x : x \in \mathbb{W},\ 0 \leq x < 5\}$

9. பின்வரும் கணங்களில் எவை சமகணங்களாகும்?

(i) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 3, 2, 1\}$

(ii) $A = \{4, 8, 12, 16\}$, $B = \{8, 4, 16, 18\}$

(iii) $X = \{2, 4, 6, 8\}$

$Y = \{x : x$ ஒரு இரட்டை முழு $0 < x < 10\}$

(iv) $P = \{x : x$ என்பது 10-ன் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}\}$

$Q = \{10, 15, 20, 25\ 30, ... \}$

10. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணங்களிலிருந்து சமகணங்களைத் தேர்வு செய்க.

$A = \{12, 14, 18, 22\}$, $B = \{11, 12, 13, 14\}$, $C = \{14, 18, 22, 24\}$

$D = \{13, 11, 12, 14\}$, $E = \{-11, 11\}$, $F = \{10, 19\}$, $G = \{11, -11\}$, $H = \{10, 11\}$

11. $\varnothing = \{\varnothing\}$ ஆகுமா? காரணம் கூறுக.

12. பின்வரும் கணங்களில் எவை சமகணங்கள்? காரணம் கூறுக.

$0, \varnothing, \{0\}, \{\varnothing\}$

13. கோடிட்ட இடங்களை $\subseteq$ அல்லது $\nsubseteq$ என்ற குறியீடுகளைக் கொண்டு நிரப்புக.

(i) $\{3\}$ ----- $\{0, 2, 4, 6\}$ (ii) $\{a\}$ ----- $\{a, b, c\}$

(iii) $\{8, 18\}$ ----- $\{18, 8\}$ (iv) $\{d\}$ ----- $\{a, b, c\}$

14. $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ மற்றும் $Y = \{x : x$ ஒரு முழு மற்றும் $-3 \le x < 2\}$ என்க.

(i) X என்பது Y-ன் உட்கணமாகுமா? (ii) Y என்பது X-ன் உட்கணமாகுமா?

15. $A = \{x : x$ என்பது 3 ஆல் வகுபடும் மிகை முழு$\}$ என்ற கணம்

$B = \{x : x$ என்பது 5-ன் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}\}$ என்ற கணத்திற்கு உட்கணமாகுமா எனசோதிக்க.

16. பின்வரும் கணங்களின் அடுக்குக்கணங்களை எழுதுக.

(i) $A = \{x, y\}$ (ii) $X = \{a, b, c\}$ (iii) $A = \{5, 6, 7, 8\}$ (iv) $A = \varnothing$

17. பின்வரும் கணங்களின் உட்கணங்கள் மற்றும் தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) $A = \{13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

(ii) $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

(iii) $X = \{x : x \in \mathbb{W}, x \notin \mathbb{N}\}$

18. (i) $A = \varnothing$ எனில், $n[P(A)]$ காண்க (ii) $n(A) = 3$ எனில், $n[P(A)]$ காண்க

(iii) $n[P(A)] = 512$ எனில், $n(A)$ காண்க.

(iv) $n[P(A)] = 1024$ எனில், $n(A)$ காண்க.

19. $n[P(A)] = 1$ எனில், A என்ற கணத்தைப் பற்றி என்ன கூறமுடியும்?

20. $A = \{x : x$ என்பது 11ஐ விடக் குறைவாக உள்ள ஒரு இயல் எண்$\}$

$B = \{x : x$ ஒரு இரட்டைப்படை எண் மற்றும் $1 < x < 21\}$

$C = \{x : x$ ஒரு முழு மற்றும் $15 \leq x \leq 25\}$ எனில்

(i) A, B, C என்ற கணங்களின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக.

(ii) $n(A),\ n(B),\ n(C)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(iii) பின்வருனவற்றை சரி (T) அல்லது தவறு (F) எனக் கூறுக.

(a) $7 \in B$ ☐ (b) $16 \notin A$ ☐

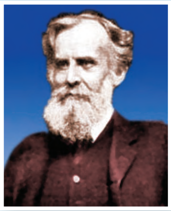
(c) $\{15, 20, 25\} \subset C$ ☐ (d) $\{10, 12\} \subset B$ ☐

1.5 கணச் செயல்கள் (Set Operations)

1.5.1 வென்படம் (Venn Diagram)

வடிவியலில் கருத்துக்கள் அல்லது நிகழ்வுகளை விளக்கவும், சில சமயங்களில் கணக்குகளின் **தீர்வு**கள் காணவும் படங்கள் அல்லது வரைபடங்களை நாம் பயன்படுத்துகிறோம்.

கணிதவியலில் கணங்களுக்கு இடையேயான தொடர்புகளைக் குறிக்கவும் மற்றும் கணச்செயல்களை பார்த்து புரிந்து கொள்ளவும் நாம் பயன்படுத்தும் படங்கள் வென்படங்கள் ஆகும்.



ஜான் வென்

(1834-1883)

ஜான் வென் என்ற பிரிட்டிஷ் நாட்டு கணித மேதை கணங்களுக்கும் கணச் செயல்களுக்கும் உள்ள தொடர்புகளை கண்ணால் காண்பதற்கு உதவும் வரைபடங்கள் வரையும் முறையைப் பயன்படுத்தினார்.

1.5.2 அனைத்துக்கணம் (Universal Set)

கொடுக்கப்பட்ட விவாதத்திற்கு பொருத்தமான அனைத்து உறுப்புகளையும் உள்ளடக்கிய ஒரு கணத்தினைக் கருதுவது சில நேரங்களில் பயனுள்ளதாகிறது.

முக்கிய கருத்து — **அனைத்துக்கணம்**

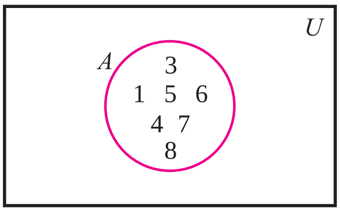
ஒரு குறிப்பிட்ட விவாதத்திற்கு எடுத்துக் கொண்ட அனைத்து உறுப்புகளையும் உள்ளடக்கிய கணம் அனைத்துக்கணம் எனப்படும். அனைத்துக்கணம் U என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

தற்சமயம் நாம் விவாதத்திற்கு எடுத்துக் கொண்ட உறுப்புகள் முழுக்கள் எனில், அனைத்துக் கணம் U என்பது அனைத்து முழுக்களின் கணமாகும். அதாவது, $U = \{n : n \in \mathbb{Z}\}$

குறிப்பு ஒவ்வொரு கணக்கிற்கும் அனைத்துக்கணம் மாறுபடலாம்.

வென்படங்கள் மூலம் குறிப்பிடும் போது பொதுவாக அனைத்துக்கணத்தை ஒரு செவ்வகமாகவும், அதன் தகு உட்கணங்களை வட்டங்கள் அல்லது நீள்வட்டங்களாகவும் குறிப்போம். அவற்றின் உறுப்புகளை படத்தின் உள்ளே எழுதுவோம்.



படம் 1.1

1.5.3 ஒரு கணத்தின் நிரப்புக்கணம் (Complement of a Set)

முக்கிய கருத்து **நிரப்புக்கணம்**

கணம் A-ல் இல்லாத ஆனால் அனைத்துக் கணம் U-ல் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம், A-ன் நிரப்புக்கணம் எனப்படும். A என்ற கணத்தின் நிரப்புக்கணத்தை A' அல்லது A^c எனக் குறிப்போம்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

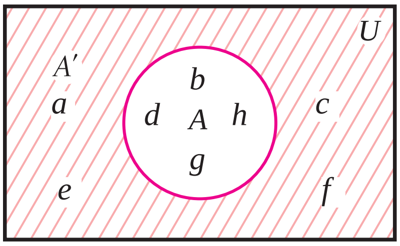
குறியீட்டில், $A' = \{x : x \in U$ மற்றும் $x \notin A\}$

எடுத்துக்காட்டாக,

U $= \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ மற்றும் $A = \{b, d, g, h\}$ எனில்.

$A' = \{a, c, e, f\}$

வென்படத்தில், கணம் A-ன் நிரப்புக்கணம் A'ஐ படம் 1.2- ல் உள்ளது போல் குறிப்பிடலாம்.



A' (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.2

குறிப்பு (i) $(A')' = A$ (ii) $\varnothing' = U$ (iii) $U' = \varnothing$

1.5.4 இரு கணங்களின் சேர்ப்பு (Union of Two Sets)

முக்கிய கருத்து **சேர்ப்புக்கணம்**

A, B என்ற இரு கணங்களின் சேர்ப்புக்கணம் என்பது A அல்லது B அல்லது இரண்டிலும் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும். இதனை $A \cup B$ என எழுதலாம்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\cup$	சேர்ப்பு

$A \cup B$ என்பதை ‘A சேர்ப்பு B’ எனப் படிப்போம்.
குறியீட்டில், $A \cup B = \{x : x \in A$ அல்லது $x \in B\}$

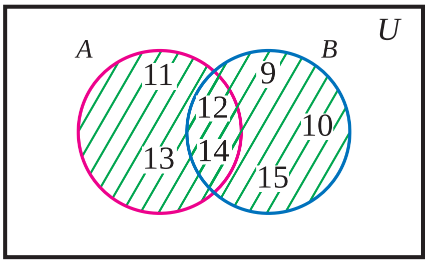
எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{11, 12, 13, 14\}$ மற்றும்

$B = \{9, 10, 12, 14, 15\}$ எனில்,

$A \cup B = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

இரு கணங்களின் சேர்ப்பினை வென்படத்தில் படம் 1.3-ல் உள்ளவாறு குறிப்பிடலாம்.



$A \cup B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.3

குறிப்பு

(i) $A \cup A = A$ (ii) $A \cup \varnothing = A$ (iii) $A \cup A' = U$

(iv) A என்ற கணம் அனைத்துக்கணம் U-ன் உட்கணம் எனில், $A \cup U = U$

(v) $A \subseteq B$ எனில், எனில் மட்டுமே $A \cup B = B$ (vi) $A \cup B = B \cup A$

எடுத்துக்காட்டு 1.12

பின்வரும் கணங்களின் சேர்ப்பினைக் காண்க.

(i) $A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ மற்றும் $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

(ii) $X = \{3, 4, 5\}$ மற்றும் $Y = \varnothing$

நினைவு கூர்ந்து விடையளி !
$A \subset (A \cup B)$ மற்றும்
$B \subset (A \cup B)$ என
கூறமுடியுமா?

தீர்வு (i) A = {1, 2, 3, 5, 6} மற்றும் B = {4, 5, 6, 7, 8}

1, 2, 3, 5, 6 ; 4, 5, 6, 7, 8 (5, 6 திரும்ப வந்துள்ளன)

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(ii) $X = \{3,4,5\}$, $Y = \varnothing$. Y-ல் உறுப்புகள் எதுவும் இல்லை.

$\therefore X \cup Y = \{3, 4, 5\}$

1.5.5 இரு கணங்களின் வெட்டு (Intersection of Two Sets)

முக்கிய கருத்து — **வெட்டுக்கணம்**

A, B என்ற இரு கணங்களின் வெட்டுக்கணம் என்பது A மற்றும் B இரண்டிலும் பொதுவாக உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும். இதனை $A \cap B$ என எழுதுவோம்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$\cap$	வெட்டு

$A \cap B$ என்பதை 'A வெட்டு B' எனப் படிக்கலாம்.

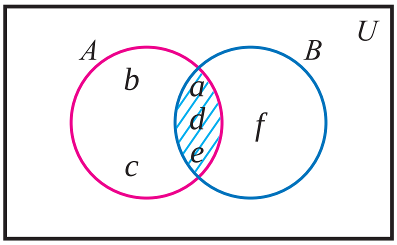
குறியீட்டில், $A \cap B = \{x : x \in A$ மற்றும் $x \in B\}$ என எழுதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{a, b, c, d, e\}$ மற்றும் $B = \{a, d, e, f\}$ என்க.

$\therefore A \cap B = \{a, d, e\}$

இரு கணங்களின் வெட்டுக்கணத்தை படம் 1.4-ல் காட்டியுள்ளவாறு வென்படத்தின் மூலம் குறிப்பிடலாம்.



$A \cap B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)

படம் 1.4

குறிப்பு

(i) $A \cap A = A$ (ii) $A \cap \varnothing = \varnothing$

(iii) $A \cap A' = \varnothing$ (iv) $A \cap B = B \cap A$

(v) A என்பது அனைத்துக்கணம் U-வின் உட்கணம் எனில் $A \cap U = A$

(vi) $A \subseteq B$ எனில், எனில் மட்டுமே $A \cap B = A$

எடுத்துக்காட்டு 1.13

(i) $A = \{10, 11, 12, 13\}$, $B = \{12, 13, 14, 15\}$

(ii) $A = \{5, 9, 11\}$, $B = \varnothing$ எனில், $A \cap B$ காண்க.

நினைவு கூர்ந்து விடையளி!

$(A \cap B) \subset A$ மற்றும்

$(A \cap B) \subset B$ எனக் கூறமுடியுமா?

தீர்வு (i) A = {10, 11, 12, 13} மற்றும் B = {12, 13, 14, 15}.

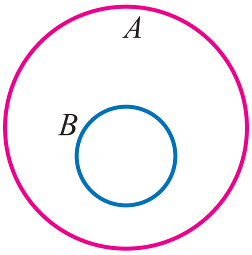
12, 13 என்பன A மற்றும் B இரண்டிற்கும் பொதுவானவை.

$\therefore A \cap B = \{12, 13\}$

(ii) $A = \{5, 9, 11\}$ மற்றும் $B = \varnothing$.

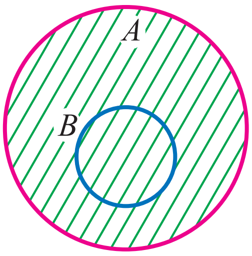
A மற்றும் B-க்கு பொதுவான உறுப்பு எதுவும் இல்லை என்பதால், $A \cap B = \varnothing$

குறிப்புரை $B \subseteq A$ என்றவாறு உள்ள A, B என்ற கணங்களின் சேர்ப்பு மற்றும் வெட்டு ஆகியவற்றை வென்படங்களின் மூலம் முறையே படம் 1.6 மற்றும் படம் 1.7-ல் காட்டியுள்ளவாறு குறிப்போம்.



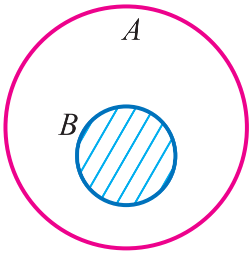
$B \subseteq A$

படம்1.5



$A \cup B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)

படம்1.6



$A \cap B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)

படம்1.7

1.5.6 வெட்டாக்கணங்கள் அல்லது சேராக்கணங்கள் (Disjoint Sets)

முக்கிய கருத்து **வெட்டாக்கணம்**

A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களுக்கும் பொதுவான உறுப்பு இல்லையெனில், அவ்விரு கணங்களும் வெட்டாக்கணங்கள் அல்லது சேராக்கணங்கள் எனப்படும்.

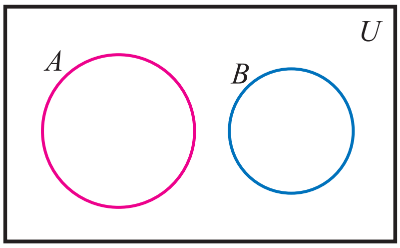
A மற்றும் B என்ற கணங்கள் வெட்டாக்கணங்கள் எனில், $A \cap B = \varnothing$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{5, 6, 7, 8\}$ மற்றும் $B = \{11, 12, 13\}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக.

இப்போது $A \cap B = \varnothing$. எனவே, A மற்றும் B என்பன வெட்டாக்கணங்களாகும்.

A, B என்ற இரு வெட்டாக்கணங்களை படம் 1.8-ல் காட்டியுள்ளவாறு வென்படம் மூலம் குறிப்பிடலாம்.



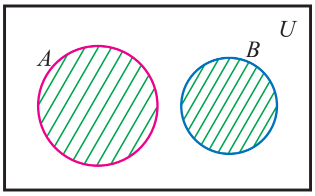
வெட்டாக்கணங்கள்

படம்1.8

குறிப்பு

(i) A மற்றும் B என்ற இரு வெட்டாக்கணங்களின் சேர்ப்பை படம் 1.9-ல் காட்டியுள்ளவாறு வென்படம் மூலம் குறிக்கலாம்.

(ii) $A \cap B \neq \varnothing$ எனில், A மற்றும் B என்ற இருகணங்களும் வெட்டும் கணங்கள் (overlapping sets) எனப்படும்.



$A \cup B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)

படம்1.9

எடுத்துக்காட்டு 1.14

கொடுக்கப்பட்ட $A = \{4, 5, 6, 7\}$ மற்றும் $B = \{1, 3, 8, 9\}$ என்ற இரு கணங்களுக்கு $A \cap B$ காண்க.

தீர்வு $A = \{4, 5, 6, 7\}$ மற்றும் $B = \{1, 3, 8, 9\}$. இங்கு $A \cap B = \varnothing$.

எனவே, A மற்றும் B என்பன வெட்டாக்கணங்களாகும்.

1.5.7 இரு கணங்களின் வித்தியாசம் (Difference of Two sets)

முக்கிய கருத்து **கணங்களின் வித்தியாசம்**

A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களின் வித்தியாச கணமானது, A-ல் உள்ள ஆனால் B-ல் இல்லாத உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும். இரு கணங்களின் வித்தியாசமானது $A - B$ அல்லது $A \backslash B$ எனக் குறிக்கப்படும்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$A - B$ அல்லது $A \backslash B$	A வித்தியாசம் B

குறியீட்டில், $A - B = \{x : x \in A$ மற்றும் $x \notin B\}$

இதேபோல், $B - A = \{x : x \in B$ மற்றும் $x \notin A\}$.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ மற்றும் $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$ என்ற கணங்களைக் கருதுக.

$A - B$ ஐக்காண A-யிலிருந்து B-ல் உள்ள உறுப்புகளை நாம் நீக்குகிறோம்.

$\therefore \quad A - B = \{2, 3\}$

குறிப்பு

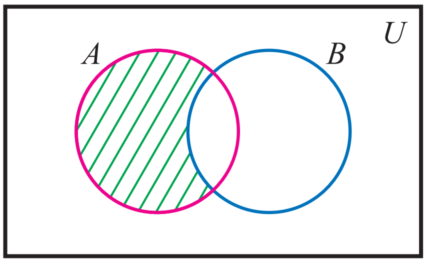
(i) பொதுவாக, $A - B \neq B - A$.

(ii) $A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$

(iii) $U - A = A'$

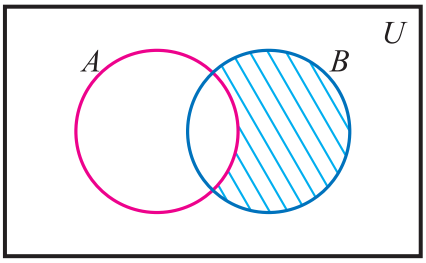
(iv) $U - A' = A$

A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களின் வித்தியாசமானது படம் 1.10 மற்றும் படம் 1.11 ஆகியவற்றில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு வென்படங்கள் மூலம் குறிக்கப்படும். நிழலிட்டப்பகுதி இரு கணங்களின் வித்தியாசத்தைக் குறிக்கிறது.



A – B

படம் 1.10



B – A

படம் 1.11

எடுத்துக்காட்டு 1.15

$A = \{-2, -1, 0, 3, 4\}$, $B = \{-1, 3, 5\}$ எனில் (i) $A - B$ (ii) $B - A$ காண்க.

தீர்வு $A = \{-2, -1, 0, 3, 4\}$ மற்றும் $B = \{-1, 3, 5\}$.

(i) $A - B = \{-2, 0, 4\}$ (ii) $B - A = \{5\}$

1.5.8 கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம் (Symmetric Difference of Sets)

முக்கிய கருத்து — **இரு கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம்**

A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசமானது அவற்றின் வித்தியாசங்களின் சேர்ப்பாகும். இதனை $A \,\Delta\, B$ எனக்குறிப்பிடுவோம்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

$A \,\Delta\, B$	A சமச்சீர்வித்தியாசம் B

குறியீட்டில், $A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$

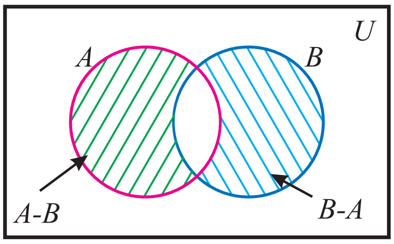
எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{a, b, c, d\}$ மற்றும் $B = \{b, d, e, f\}$ என்ற கணங்களை கருதுக.

$A - B = \{a, c\}$ மற்றும் $B - A = \{e, f\}$ என நாம் பெறுகிறோம்.

$\therefore \; A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A) = \{a, c, e, f\}$

A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசமானது படம் 1.12-ல் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு வென்படம் மூலம் குறிக்கப்படும். நிழலிட்டப்பகுதி A மற்றும் B கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசத்தைக் குறிக்கிறது.



$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

படம்1.12

குறிப்பு (i) $A \triangle A = \varnothing$ (ii) $A \triangle B = B \triangle A$

(iii) வென்படம் 1.12-ல் இருந்து $A \triangle B = \{x : x \notin A \cap B\}$ என எழுதலாம். எனவே A மற்றும் B இரண்டிற்கும் பொதுவாக இல்லாத உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுவதன் மூலம் நாம் $A \triangle B$-ன் உறுப்புகளை நேரடியாக காணமுடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.16

$A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ மற்றும் $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$ எனில், $A \triangle B$ காண்க.

தீர்வு $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ மற்றும் $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$

$A - B = \{2, 3\}$ மற்றும் $B - A = \{9, 13\}$.

ஆதலால், $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{2, 3, 9, 13\}$

பயிற்சி 1.2

1. பின்வரும் கணங்களுக்கு $A \cup B$ மற்றும் $A \cap B$ காண்க.
   (i) $A = \{0, 1, 2, 4, 6\}$ மற்றும் $B = \{-3, -1, 0, 2, 4, 5\}$
   (ii) $A = \{2, 4, 6, 8\}$ மற்றும் $B = \varnothing$
   (iii) $A = \{x : x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$ மற்றும் $B = \{x : x$ என்பது 11ஐ விடக் குறைவான பகாஎண்$\}$
   (iv) $A = \{x : x \in \mathbb{N}, 2 < x \leq 7\}$ மற்றும் $B = \{x : x \in \mathbb{W}, 0 \leq x \leq 6\}$

2. $A = \{x : x$ என்பது 5-ன் மடங்கு, $x \leq 30$ மற்றும் $x \in \mathbb{N}\}$,
   $B = \{1, 3, 7, 10, 12, 15, 18, 25\}$ எனில், (i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ காண்க.

3. $X = \{x : x = 2n, x \leq 20$ மற்றும் $n \in \mathbb{N}\}$ மற்றும்
   $Y = \{x : x = 4n, x \leq 20$ மற்றும் $n \in \mathbb{W}\}$ எனில், (i) $X \cup Y$ (ii) $X \cap Y$ காண்க.

4. $U = \{1, 2, 3, 6, 7, 12, 17, 21, 35, 52, 56\}$,
   $P = \{7$ ஆல் வகுபடும் எண்கள்$\}$, $Q = \{$பகாஎண்கள்$\}$ எனில்,
   $\{x : x \in P \cap Q\}$ என்ற கணத்தின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக.

5. பின்வரும் கணங்களில் எவையிரண்டு வெட்டாக்கணங்கள் எனக் கூறுக.
   (i) $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x : x$ ஒரு இரட்டைப்படை எண் $< 10, x \in \mathbb{N}\}$
   (ii) $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $Y = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
   (iii) $P = \{x : x$ ஒரு பகாஎண் $< 15\}$; $Q = \{x : x$ என்பது 2-ன் மடங்கு மற்றும் $x < 16\}$
   (iv) $R = \{a, b, c, d, e\}$, $S = \{d, e, a, b, c\}$

6. (i) $U = \{x : 0 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{W}\}$ மற்றும் $A = \{x : x$ என்பது 3-ன் மடங்கு$\}$ எனில், A' ஐக் காண்க.
   (ii) U என்பது இயல் எண்களின் கணம் மற்றும் A' என்பது அனைத்து பகுஎண்களின் கணம் எனில், A ஐக் காண்க.

7. $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, b, c, d\}$ மற்றும் $B = \{b, d, f, g\}$ எனில், பின்வரும் கணங்களைக் காண்க.
   (i) $A \cup B$ (ii) $(A \cup B)'$ (iii) $A \cap B$ (iv) $(A \cap B)'$

8. $U = \{x : 1 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{N}\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ மற்றும் $B = \{2, 3, 5, 9, 10\}$ எனில், பின்வரும் கணங்களைக் காண்க.
   (i) A' (ii) B' (iii) $A' \cup B'$ (iv) $A' \cap B'$

9. $U = \{3, 7, 9, 11, 15, 17, 18\}$, $M = \{3, 7, 9, 11\}$ மற்றும் $N = \{7, 11, 15, 17\}$ எனில், பின்வரும் கணங்களைக் காண்க.

(i) $M - N$ (ii) $N - M$ (iii) $N' - M$ (iv) $M' - N$

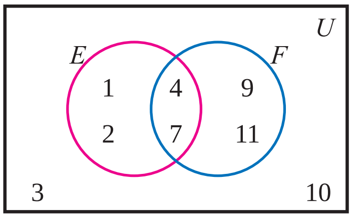
(v) $M \cap (M - N)$ (vi) $N \cup (N - M)$ (vii) $n(M - N)$

10. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ மற்றும் $D = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.
(i) $A - B$ (ii) $B - C$ (iii) $C - D$ (iv) $D - A$ (v) $n(A - C)$

11. $U = \{x : x$ என்பது 50 ஐ விடக் குறைவான மிகை முழு$\}$,
$A = \{x : x$ என்பது 4 ஆல் வகுபடும்$\}$,
$B = \{x : x$ ஐ 14 ஆல் வகுத்தால் மீதி 2 கிடைக்கும்$\}$
எனில், (i) U, A மற்றும் B ஆகியவற்றின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக.
(ii) $A \cup B$, $A \cap B$, $n(A \cup B)$, $n(A \cap B)$ ஆகியவற்றைக் காண்க

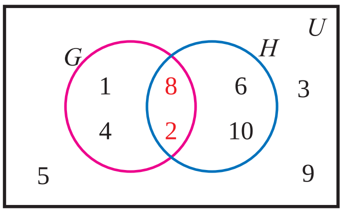
12. பின்வரும் கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம் காண்க.
(i) $X = \{a, d, f, g, h\}, Y = \{b, e, g, h, k\}$
(ii) $P = \{x : 3 < x < 9, x \in \mathbb{N}\}$, $Q = \{x : x < 5, x \in \mathbb{W}\}$
(iii) $A = \{-3, -2, 0, 2, 3, 5\}$, $B = \{-4, -3, -1, 0, 2, 3\}$

13. வென்படம் 1.13ஐப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளி.
(i) $U, E, F, E \cup F$ மற்றும் $E \cap F$ இவற்றின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக.
(ii) $n(U)$, $n(E \cup F)$ மற்றும் $n(E \cap F)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.



படம் 1.13

14. வென்படம் 1.14ஐப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளி.
(i) U, G மற்றும் H இவற்றின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக
(ii) G', H', $G' \cap H'$, $n(G \cup H)'$ மற்றும் $n(G \cap H)'$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

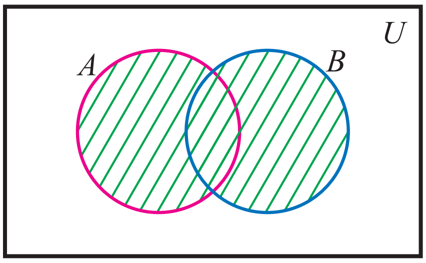


படம் 1.14

1.6 கணச் செயல்களை வென்படங்கள் மூலம் குறிப்பிடுதல்

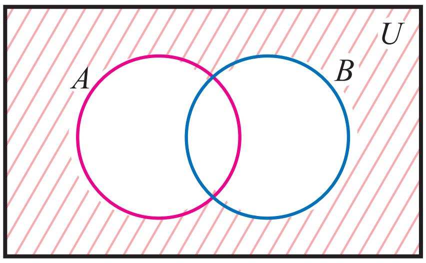
இப்பொழுது மேலும் சில கணச் செயல்களை வென்படங்கள் மூலம் குறிப்பிடுவோம்.

(a) $A \cup B$



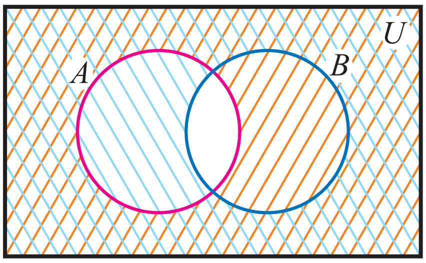
படம் 1.15

(b) $(A \cup B)'$



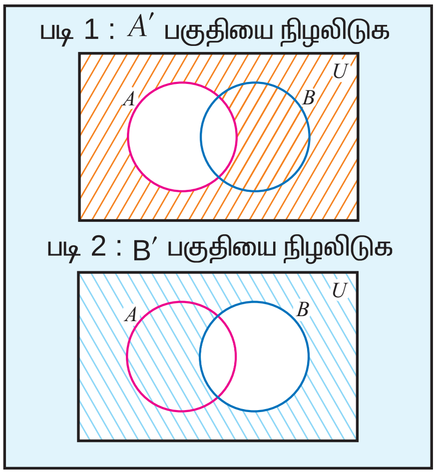
படம் 1.16

(c) $A' \cup B'$

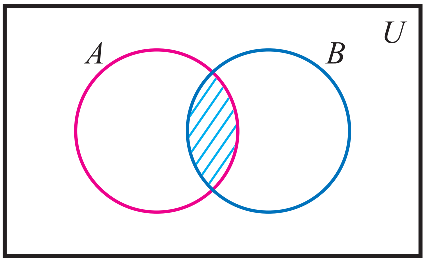


$A' \cup B'$ (நிழலிட்டப்பகுதி)

படம் 1.17

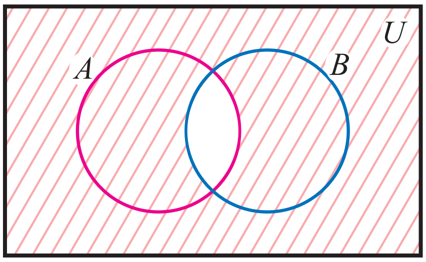


இதேபோல், கீழ்காணும் படங்களில் நிழலிட்டப்பகுதிகள் ஒவ்வொன்றும் பின்வரும் கணச்செயல்களைக் குறிக்கின்றன.



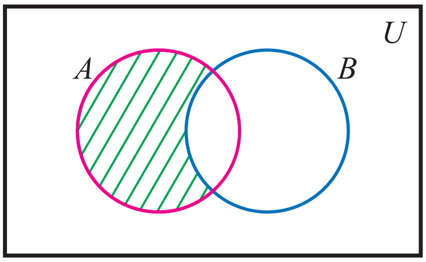
$A \cap B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)

படம் 1.18



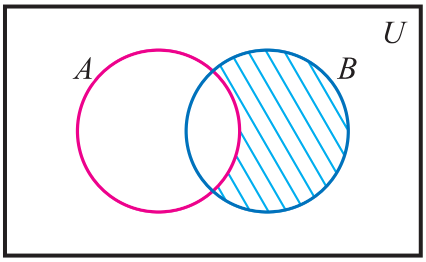
$(A \cap B)'$ (நிழலிட்டப்பகுதி)

படம் 1.19



$A \cap B'$ (நிழலிட்டப்பகுதி)

படம் 1.20.



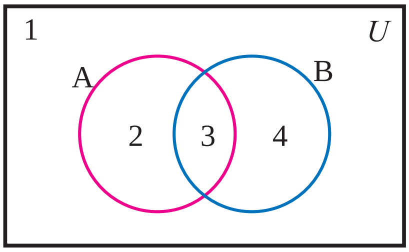
$A' \cap B$ (நிழலிட்டப்பகுதி)

படம் 1.21

குறிப்புரை

கணங்கள் மற்றும் கணச் செயல்களை வென்படங்கள் மூலம் குறிப்பிட பின்வரும் முறையையும் நாம் பயன்படுத்தலாம்.

கணங்கள் A மற்றும் B என்பவை அனைத்துக் கணத்தைப் படம் 1.22-ல் உள்ளவாறு நான்கு பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது. இந்நான்கு பகுதிகளும் அடையாளத்திற்காக எண்ணிடப்படுகின்றன. இந்த எண்ணிடுதல் விருப்பம் போல் (arbitrary) அமையலாம்.



படம் 1.22

பகுதி 1 A மற்றும் B என்ற இருகணங்களுக்கும் வெளியேயுள்ள உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.

பகுதி 2 A-ல் உள்ள ஆனால் B-ல் இல்லாத உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.

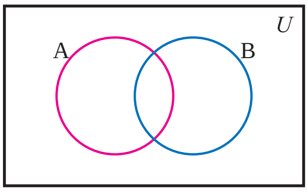
பகுதி 3 A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களுக்கும் பொதுவான உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.

பகுதி 4 B-ல் உள்ள ஆனால் A-ல் இல்லாத உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.17

அருகிலுள்ள படத்தைப் போன்ற வென்படங்கள் வரைந்து பின்வரும் கணங்களைக் குறிக்கும் பகுதிகளை நிழலிடுக

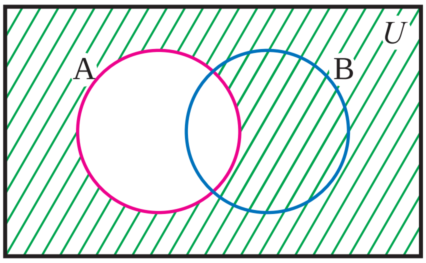
(i) A' (ii) B' (iii) $A' \cup B'$ (iv) $(A \cup B)'$ (v) $A' \cap B'$



படம் 1.23

தீர்வு

(i) A'

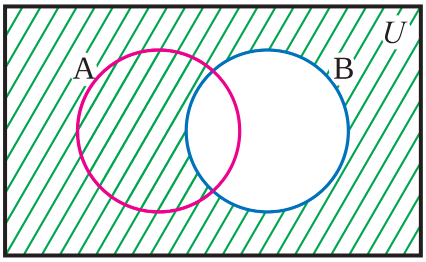


A' (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.24

நிழலிட குறிப்பு

கணம்	நிழலிட்டப் பகுதி
A'	1 மற்றும் 4

(ii) B'

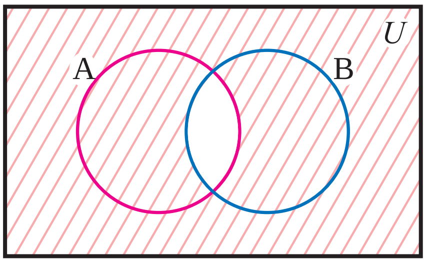


B' (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.25

நிழலிட குறிப்பு

கணம்	நிழலிட்டப் பகுதி
B'	1 மற்றும் 2

(iii) $A' \cup B'$

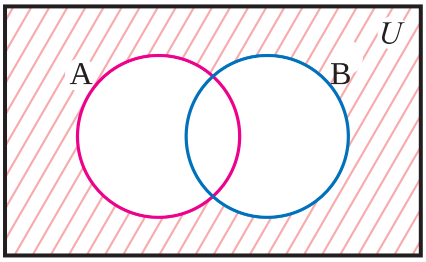


$A' \cup B'$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.26

நிழலிட குறிப்பு

கணம்	நிழலிட்டப் பகுதி
A'	1 மற்றும் 4
B'	1 மற்றும் 2
$A' \cup B'$	1, 2 மற்றும் 4

(iv) $(A \cup B)'$

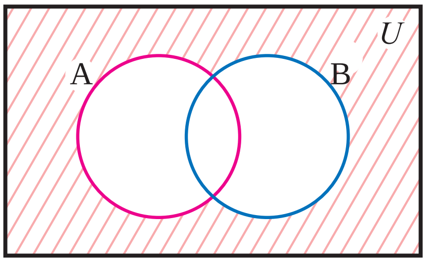


$(A \cup B)'$ (நிழலிட்டப்பகுதி)
படம் 1.27

நிழலிட குறிப்பு

கணம்	நிழலிட்டப் பகுதி
$A \cup B$	2, 3 மற்றும் 4
$(A \cup B)'$	1

(v) $A' \cap B'$



$A' \cap B'$ (நிழலிட்டப்பகுதி)

படம் 1.28

நிழலிட குறிப்பு

கணம்	நிழலிட்டப் பகுதி
A'	1 மற்றும் 4
B'	1 மற்றும் 2
$A' \cap B'$	1

முக்கிய முடிவுகள்

A மற்றும் B என்ற முடிவுறு கணங்களுக்கு பின்வரும் பயனுள்ள சில முடிவுகளை நாம் காண்போம்.

(i) $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

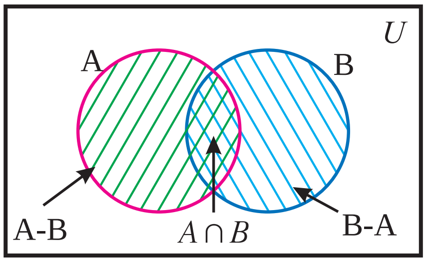
(ii) $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$

(iii) $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$

(iv) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(v) $A \cap B = \varnothing$ எனும் போது, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

(vi) $n(A) + n(A') = n(U)$



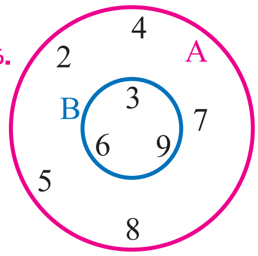
படம் 1.29

எடுத்துக்காட்டு 1.18

கொடுக்கப்பட்ட வென்படத்திலிருந்து பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) $A \cap B$

மேலும் $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ எனச் சரிபார்க்க.



படம் 1.30

தீர்வு வென்படத்திலிருந்து (i) A = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

(ii) B = {3, 6, 9,} (iii) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (iv) $A \cap B = \{3, 6, 9\}$

இப்பொழுது, $n(A) = 8,\ n(B) = 3,\ n(A \cup B) = 8,\ n(A \cap B) = 3$.

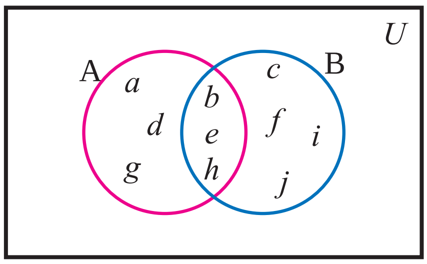
$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 8 + 3 - 3 = 8$

எனவே, $n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B)$

எடுத்துக்காட்டு 1.19

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வென்படத்திலிருந்து

(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) $A \cap B$ ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ எனச் சரிபார்க்க.



படம் 1.31

தீர்வு வென்படத்திலிருந்து

(i) $A = \{a,b,d,e,g,h\}$ (ii) $B = \{b,c,e,f,h,i,j\}$

(iii) $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$ (iv) $A \cap B = \{b,e,h\}$

எனவே, $n(A) = 6,\ n(B) = 7,\ n(A\cup B) = 10,\ n(A \cap B) = 3$.

$n(A) + n(B) - n(A\cap B) = 6 + 7 - 3 = 10$

எனவே, $n(A) + n(B) - n(A\cap B) = n(A\cup B)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.20

$n(A) = 12, n(B) = 17$ மற்றும் $n(A\cup B) = 21$ எனில், $n(A\cap B)$ காண்க.

தீர்வு $n(A) = 12, n(B) = 17$ மற்றும் $n(A\cup B) = 21$

$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$n(A\cap B) = 12 + 17 - 21 = 8$

எடுத்துக்காட்டு 1.21

ஒரு நகரத்தில் உள்ளவர்களில் 65% நபர்கள் தமிழ் திரைபடங்களையும் 40% நபர்கள் ஆங்கிலத் திரைப்படங்களையும் காண்கிறார்கள். 20% நபர்கள் தமிழ் மற்றும் ஆங்கிலத் திரைப்படங்கள் இரண்டையும் காண்கிறார்கள். இவ்விரு மொழித் திரைப்படங்களையும் பார்க்காதவர்கள் எத்தனை சதவீதம் எனக்காண்க.

தீர்வு நகரில் உள்ள மொத்த நபர்கள் 100 பேர் என்க. T என்பது தமிழ் திரைப்படம் காண்போர் கணம் மற்றும் E என்பது ஆங்கிலத் திரைப்படம் காண்போர் கணம் என்க.

பிறகு $n(T) = 65, n(E) = 40$ மற்றும் $n(T\cap E) = 20$.

இவ்விரு திரைப்படங்களில் ஏதேனும் ஒரு மொழித் திரைப்படத்தையாவது காணும் மக்களின் சதவீதம்

$$n(T\cup E) = n(T) + n(E) - n(T\cap E)$$
$$= 65 + 40 - 20 = 85$$

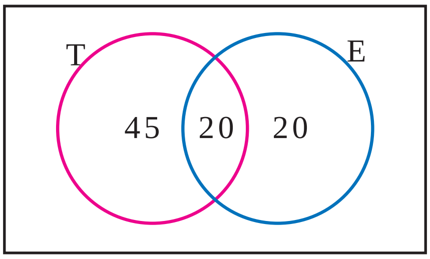
எனவே, இவ்விரு திரைப்படங்களில் எந்த ஒரு திரைப்படத்தையும் பார்க்காதவர் சதவீதம்

$100 - 85 = 15$

மாற்றுமுறை

வென்படத்திலிருந்து, இரு திரைப்படங்களில் ஏதேனும் ஒரு திரைப்படத்தையாவது காணும் மக்களின் சதவீதம் $= 45 + 20 + 20 = 85$

எனவே, இவ்விரு மொழித்திரைபடங்களில் எந்த ஒரு திரைப்படத்தையும் பார்க்காதவர் சதவீதம் $= 100 - 85 = 15$



படம் 1.32

எடுத்துக்காட்டு 1.22

1000 குடும்பங்களில் நடத்தப்பட்ட ஓர் ஆய்வில், 484 குடும்பங்கள் மின்சார அடுப்பையும், 552 குடும்பங்கள் எரிவாயு அடுப்பையும் பயன்படுத்துவதாக கண்டறியப்பட்டது. அனைத்து குடும்பங்களும் இவ்விரு அடுப்புகளில் குறைந்தபட்சம் ஏதேனும் ஒரு அடுப்பை பயன்படுத்துகிறார்கள் எனில், இரண்டு வகை அடுப்புகளையும் பயன்படுத்தும் குடும்பங்கள் எத்தனை எனக் காண்க.

தீர்வு E என்பது மின்சார அடுப்பைப் பயன்படுத்தும் குடும்பங்களின் கணம் மற்றும் G என்பது எரிவாயு அடுப்பைப் பயன்படுத்தும் குடும்பங்களின் கணம் என்க.

$n(E) = 484, n(G) = 552,\ n(E \cup G) = 1000.$

இரண்டு வகை அடுப்புகளையும் பயன்படுத்தும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை x என்க. பின்னர், $n(E \cap G) = x$

$n(E \cup G) = n(E) + n(G) - n(E \cap G)$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$1000 = 484 + 552 - x$$

$$\Rightarrow \quad x = 1036 - 1000 = 36$$

எனவே, 36 குடும்பங்கள் இரண்டு வகை அடுப்புகளையும் பயன்படுத்துகின்றனர்.

மாற்றுமுறை

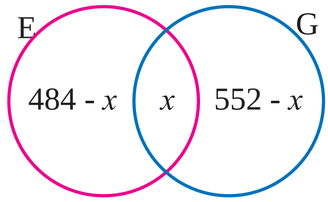
வென்படத்திலிருந்து,

$$484 - x + x + 552 - x = 1000$$

$$\Rightarrow \quad 1036 - x = 1000$$

$$\Rightarrow \quad -x = -36$$

$$x = 36$$



படம் 1.33

எனவே, 36 குடும்பங்கள் இரண்டு வகை அடுப்புகளையும் பயன்படுத்துகின்றனர்.

எடுத்துக்காட்டு 1.23

50 மாணவர்கள் உள்ள ஒரு வகுப்பில், ஒவ்வொரு மாணவனும் கணிதம் அல்லது அறிவியல் அல்லது இரண்டிலும் தேர்ச்சிப் பெற்றுள்ளனர். 10 மாணவர்கள் இரண்டு பாடங்களிலும் தேர்ச்சிப் பெற்றுள்ளனர் மற்றும் 28 மாணவர்கள் அறிவியலில் தேர்ச்சிப் பெற்றுள்ளனர். கணிதத்தில் தேர்ச்சிப் பெற்ற மாணவர்கள் எத்தனை பேர்?

தீர்வு $M =$ கணிதத்தில் தேர்ச்சிப் பெற்ற மாணவர்களின் கணம் என்க.

$S =$ அறிவியலில் தேர்ச்சிப் பெற்ற மாணவர்களின் கணம் என்க.

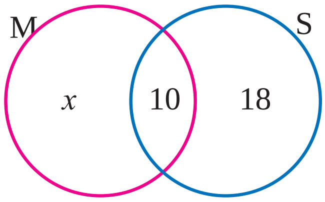
பின்னர், $n(S) = 28,\ n(M \cap S) = 10,\ n(M \cup S) = 50$

$$n(M \cup S) = n(M) + n(S) - n(M \cap S)$$

$$50 = n(M) + 28 - 10$$

$$\Rightarrow \quad n(M) = 32$$

மாற்றுமுறை



படம் 1.34

வென்படத்திலிருந்து,

$x + 10 + 18 = 50$

$x = 50 - 28 = 22$

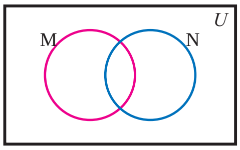
கணிதத்தில் தேர்ச்சிப் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= x + 10 = 22 + 10 = 32$

பயிற்சி 1.3

1. பின்வரும் கணங்களின் உறுப்புகளைக் கொடுக்கப்பட்ட வெண்படத்தில் சரியான இடத்தில் குறிக்கவும்.

   $U = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

   $M = \{5, 8, 10, 11\}$, $N = \{5, 6, 7, 9, 10\}$



படம் 1.35

2. A, B என்ற இரு கணங்களில், A என்பது 50 உறுப்புகளையும் B என்பது 65 உறுப்புகளையும் மற்றும் $A \cup B$ என்பது 100 உறுப்புகளையும் கொண்டிருந்ததால், $A \cap B$ என்பது எத்தனை உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்?

3. A, B என்ற இருகணங்கள் முறையே 13 மற்றும் 16 உறுப்புகளைப் பெற்றிருந்தால், $A \cup B$ பெற்றுள்ள குறைந்தபட்ச மற்றும் அதிகபட்ச உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க

4. $n(A \cap B) = 5,\ n(A \cup B) = 35, n(A) = 13$ எனில், $n(B)$ காண்க.

5. $n(A) = 26,\ n(B) = 10,\ n(A \cup B) = 30, n(A') = 17$ எனில், $n(A \cap B)$ மற்றும் $n(\cup)$ காண்க.

6. $n(\cup) = 38, n(A) = 16, n(A \cap B) = 12, n(B') = 20$ எனில், $n(A \cup B)$ காண்க.

7. $n(A - B) = 30, n(A \cup B) = 180, n(A \cap B) = 60$ என்றவாறு உள்ள இரண்டு முடிவுறு கணங்கள் A மற்றும் B எனில், $n(B)$ ஐக் காண்க.

8. ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை 10000. இவர்களில் 5400 பேர் செய்தித்தாள் A ஐயும் 4700 பேர் செய்தித்தாள் B ஐயும் படிக்கின்றனர். 1500 பேர் இரண்டு செய்தித்தாள்களையும் படிக்கின்றனர். இவ்விரு செய்தித்தாள்களில் ஒன்றைக் கூட படிக்காத நபர்கள் எத்தனை பேர் எனக் காண்க.

9. ஒரு பள்ளியில் உள்ள அனைத்து மாணவர்களும் கால்பந்து அல்லது கைப்பந்து அல்லது இரண்டும் விளையாடுகிறார்கள். அவர்களில் 300 மாணவர்கள் கால்பந்தும், 270 மாணவர்கள் கைப்பந்தும், 120 மாணவர்கள் இரண்டு விளையாட்டுக்களையும் விளையாடுகிறார்கள் எனில்,

   (i) கால்பந்து மட்டும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

   (ii) கைப்பந்து மட்டும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

   (iii) பள்ளியில் உள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க.

10. ஒரு தேர்வில், 150 மாணவர்கள் ஆங்கிலம் அல்லது கணிதத்தில் முதல் வகுப்பு மதிப்பெண்கள் பெற்றுள்ளனர். இவர்களில் 50 மாணவர்கள் ஆங்கிலம் மற்றும் கணிதம் இரண்டிலும் முதல் வகுப்பு மதிப்பெண்கள் பெற்றுள்ளனர். 115 மாணவர்கள் கணிதத்தில் முதல் வகுப்பு மதிப்பெண்கள் பெற்றுள்ளனர். ஆங்கிலத்தில் மட்டும் முதல் வகுப்பு மதிப்பெண் பெற்ற மாணவர்கள் எத்தனை பேர் ?

11. 30 நபர்கள் உள்ள ஒரு குழுவில், 10 பேர் தேநீர் அருந்துவார்கள் ஆனால் காபி அருந்தமாட்டார்கள். 18 பேர் தேநீர் அருந்துவார்கள். குழுவில் உள்ள ஒவ்வொரு நபரும் இவ்விரண்டில் குறைந்தபட்சம் ஒன்றையாவது அருந்துவார்கள் எனில், காபி அருந்தி தேநீர் அருந்தாதவர்கள் எத்தனை பேர் எனக் காண்க.

12. ஒரு கிராமத்தில் 60 குடும்பங்கள் உள்ளன. இவற்றில் 28 குடும்பங்கள் தமிழ் மட்டும் பேசுகிறார்கள் . 20 குடும்பங்கள் உருது மட்டும் பேசுகிறார்கள். தமிழ் மற்றும் உருது இரண்டினையும் பேசும் குடும்பங்கள் எத்தனை எனக் காண்க.

13. ஒரு பள்ளியில் 150 மாணவர்கள் பத்தாம் வகுப்புத் தேர்வில் தேர்ச்சிப் பெற்றுள்ளனர். இவர்களில் மேல்நிலை வகுப்பில் 95 மாணவர்கள் பிரிவு I-க்கு விண்ணப்பித்தார்கள். 82 மாணவர்கள் பிரிவு II-க்கு விண்ணப்பித்தார்கள் 20 மாணவர்கள் இவ்விரு பிரிவுகளில் எதற்கும் விண்ணப்பிக்கவில்லை எனில், இரண்டு பிரிவுகளுக்கும் விண்ணப்பித்த மாணவர்கள் எத்தனை பேர் எனக் காண்க.

14. மின்சாதன பயன்பாட்டு நிறுவனத்தின் ஒரு பிரிவின் உயர் அதிகாரி பிரதீப். இவருடைய பிரிவில் உள்ள பணியாளர்கள் உயரமான மரங்களை வெட்டுவார்கள் அல்லது மின்கம்பத்தில் ஏறுவார்கள். அண்மையில், பிரதீப் அவருடைய நிறுவனத்திற்கு தனது பிரிவு சார்பான விவர அறிக்கையைப் பின்வருமாறு அனுப்பினார்.

‘என்னுடைய பிரிவில் பணிபுரியும் 100 பணியாளர்களில், 55 பேர் உயரமான மரங்களை வெட்டுவார்கள், 50 பேர் மின் கம்பம் ஏறுவார்கள், 11 பேர் இரண்டடையும் செய்வார்கள், 6 பேர் இவ்விரண்டில் எதையும் செய்ய மாட்டார்கள்’. அவர் அனுப்பிய விவரம் சரியானதா?

15. A மற்றும் B என்பன $n(A-B) = 32+x, n(B-A) = 5x$ மற்றும் $n(A \cap B) = x$ என்றவாறு உள்ள இரு கணங்கள் என்க. இவ்விவரங்களை வென்படம்மூலம் விளக்குக. $n(A) = n(B)$ என கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் (i) x-ன் மதிப்பு (ii) $n(A \cup B)$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

16. ஒரு பள்ளியில் நடைபெற்ற பேச்சு மற்றும் ஓவியப் போட்டிகளில் பங்கு பெற்ற மாணவர்கள் சதவீதத்தை பின்வரும் அட்டவணை காட்டுகிறது.

போட்டி	பேச்சு	ஓவியம்	இரண்டும்
மாணவர்கள் சதவீதம்	55	45	20

இவ்விவரங்களைக் குறிக்க வென்படம் வரைக மற்றும் அதனைப் பயன்படுத்தி

(i) பேச்சுப் போட்டியில் மட்டும் பங்குபெற்ற

(ii) ஓவியப் போட்டியில் மட்டும் பங்கு பெற்ற

(iii) எந்தவொரு போட்டியிலும் பங்குபெறாத

மாணவர்களின் சதவீதம் காண்க.

17. ஒரு கிராமத்தின் மொத்த மக்கள் தொகை 2500. இவர்களில் 1300 நபர்கள் A வகை சோப்பையும், 1050 நபர்கள் B வகை சோப்பையும் 250 நபர்கள் இரண்டு வகை சோப்புகளையும் பயன்படுத்துகிறார்கள். இவ்விரு வகை சோப்புகளையும் பயன்படுத்தாதவர்கள் சதவீதம் காண்க.

நினைவில் கொள்க

- நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட பொருட்களின் தொகுப்பு கணம் எனப்படும்.
- ஒரு கணத்தினை பின்வரும் மூன்று வழிகளில் ஏதேனும் ஒன்றால் குறிப்பிடலாம்
  (i) விவரித்தல் முறை அல்லது வருணனை முறை (Descriptive Form)
  (ii) கணக்கட்டமைப்பு முறை அல்லது விதி முறை (Set-Builder Form or Rule Form)
  (iii) பட்டியல் முறை அல்லது அட்டவணை முறை (Roster Form or Tabular Form)
- ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அக்கணத்தின் ஆதி எண் அல்லது செவ்வெண் எனப்படும்.
- உறுப்புகள் இல்லாத கணம் வெற்றுக்கணம் என்றழைக்கப்படும்.
- ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை பூச்சியம் அல்லது முடிவுறு (எண்ணிக்கைக்குட்பட்ட) எண் எனில், அக்கணம் முடிவுறு கணம் எனப்படும். அவ்வாறு இல்லையெனில், அது முடிவிலா கணம் எனப்படும்.
- A, B என்ற இரு கணங்களில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை சமம் எனில், அவை சமான கணங்கள் எனப்படும்.
- A, B என்ற இரு கணங்களில் உள்ள உறுப்புகள்அவை எழுதப்பட்டுள்ள வரிசையை பொருட்படுத்தாமல் சரியாக அதே உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால், அவை சம கணங்கள் எனப்படும்.
- கணம் A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் கணம் B-ன் உறுப்பாகவும் இருக்குமானால், A ஆனது B-ன் ஓர் உட்கணமாகும்.
- $A \subseteq B$ மற்றும் $A \neq B$ என்றவாறு இருப்பின், கணம் A ஆனது கணம் B-ன் தகு உட்கணம் எனப்படும்.
- A என்ற கணத்தின் அனைத்து உட்கணங்களையும் கொண்ட கணம், அக்கணத்தின் அடுக்குக்கணம் எனப்படும். A-ன் அடுக்குக்கணம் $P(A)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.
- m உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை 2^m ஆகும்.

- m உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $2^m - 1$ ஆகும்.
- கணம் A-ல் இல்லாத ஆனால் அனைத்துக்கணம் U-ல் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம், A-ன் நிரப்புக்கணம் எனப்படும். A என்ற கணத்தின் நிரப்புக்கணத்தை A' எனக் குறிப்போம்.
- A, B என்ற இரு கணங்களின் சேர்ப்புக்கணம் என்பது A அல்லது B அல்லது இரண்டிலும் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும்.
- A, B என்ற இரு கணங்களின் வெட்டுக்கணம் என்பது A மற்றும் B இரண்டிலும் பொதுவாக உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும்.
- A மற்றும் B என்பன வெட்டாக்கணங்கள் எனில், $A \cap B = \varnothing$
- A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களின் வித்தியாச கணமானது, A-ல் உள்ள ஆனால் B-ல் இல்லாத உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும்.
- A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசமானது $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.
- A மற்றும் B என்ற முடிவுறு கணங்களுக்கு பின்வரும் பயனுள்ள சில முடிவுகளை நாம் காண்போம்.

(i) $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

(ii) $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$

(iii) $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$

(iv) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(v) $A \cap B = \varnothing$ எனும் போது, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

2 மெய்யெண் தொகுப்பு

Life is good for only two things, discovering mathematics and teaching mathematics

- SIMEON POISSON

ரிச்சர்ட் டெடிகண்ட்
(1831-1916)

ரிச்சர்ட் டெடிகண்ட் *(Richard Dedekind)* என்பவர் புகழ்பெற்ற கணிதவியல் அறிஞர்களில் ஒருவராவார். இவர் மாபெரும் கணிதவியல் அறிஞர் கார்ல் பிரடரிக் காஸ் என்பவரின் மாணவராவார். இவர் நுண் இயற்கணிதம், இயற்கணித எண்ணியல் ஆகியவற்றில் முக்கியமான ஆராய்ச்சிகளை மேற்கொண்டு மெய்யெண் கருத்தாக்கத்திற்கு அடித்தளத்தை அமைத்தார். கேண்டர் என்பவரால் உருவாக்கப்பட்ட கணவியலின் முக்கியத்துவத்தை உணர்ந்து பயன்படுத்தியவர்களில் இவரும் ஒருவராவார். தொழில் நுட்பக் கல்லூரியில் நுண்கணிதத்தை போதித்த போது உருவான டெடிகண்ட் துண்டு (Dedekind cut) பற்றிய வரையறை மெய்யெண்களின் முக்கியமான கோட்பாடு ஆகும்.

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- இயல்எண்கள், முழு எண்கள் மற்றும் முழுக்களை நினைவு கூர்தல்.
- விகிதமுறு எண்களை முடிவுறு / சுழல் தன்மையுள்ள தசமஎண்களாக வகைப்படுத்துதல்.
- முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம எண்கள் இருப்பதை புரிந்து கொள்ளுதல்.
- முடிவுறு மற்றும் முடிவுறா தசம எண்களை எண்கோட்டில் குறித்தல்.
- விகிதமுறா எண்களின் நான்கு அடிப்படைச் செயல்களை புரிந்து கொள்ளுதல்.
- விகிதமுறா எண்ணின் பகுதியை விகிதப்படுத்துதல்.

2.1 அறிமுகம்

அன்றாட வாழ்க்கையில் சாதாரணமாக நாம் பயன்படுத்தும் தொலைவு, நேரம், வேகம், பரப்பளவு, இலாபம், நட்டம், வெப்பநிலை போன்ற அளவைகளை குறிப்பிடப் பயன்படுத்தும் எண்கள் மெய்யெண்கள் ஆகும். இயல் எண்களின் தொகுப்பை தேவைக்கேற்ப மென்மேலும் விரிவாக்கியதின் விளைவாக மெய்யெண்களின் தொகுப்பு தோன்றியது. மனிதன் முதலில் எண்ணத் தொடங்கிய போது இயல் எண்கள் வழக்கத்திற்கு வந்தன. கி.மு 1700 ஆம் ஆண்டுகளில் எகிப்தியர்கள் பின்னங்களைப் பயன்படுத்தினர். கி.மு 500 ஆம் ஆண்டில் கிரேக்க கணித அறிஞர்கள் பிதாகரசின் தலைமையில் ஆராய்ந்து விகிதமுறா எண்களின் தேவையை உணர்ந்தனர். கி.பி 1600ஆம் ஆண்டுகளில் குறை எண்களை ஏற்றுக்கொள்ளத் தொடங்கினர். கி.பி 1700 ஆம் ஆண்டுகளில் நுண்கணிதத்தில் மெய்யெண்களின் கணம் தெளிவாக வரையறுக்கப்படாமல் பயன்படுத்தப்பட்டது. கி.பி 1871-ல் ஜார்ஜ் கேண்டர் என்பவர் மெய்யெண்களுக்கு முதன் முதலில் சரியான வரையறையை அளித்தார்.

இப்பாடத்தில் மெய்யெண்களின் சில பண்புகளைப் பற்றி நாம் காணலாம். முன் வகுப்புகளில் நாம் கற்றுக் கொண்ட பல்வேறு எண் தொகுப்புகளைப் பற்றி முதலில் நினைவு கூர்வோம்.

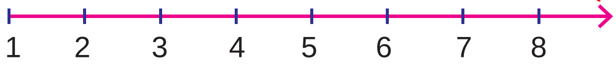
2.1.1 இயல் எண்கள் (Natural Numbers)

எண்ணுவதற்குப் பயன்படும் $1, 2, 3, \cdots$ என்பன இயல் எண்கள் எனப்படும்.

இக்கோடு 1-ன் வலப்புறம் மட்டும் முடிவில்லாமல் நீண்டு செல்லும்.

இயல் எண்களின் கணத்தை $\mathbb{N}$ எனக் குறிப்போம்.

i.e., $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$



படம் 2.1

குறிப்புரை இயல் எண்களில் மிகச்சிறிய எண் 1 ஆகும். இவ்வெண்கள் முடிவில்லாமல் தொடர்ந்து செல்வதால் மிகப்பெரிய எண் எது என கூறமுடியாது.

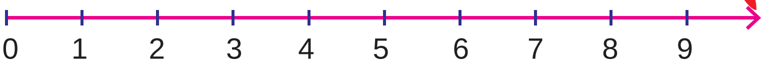
2.1.2 முழு எண்கள் (Whole Numbers)

இயல் எண்களுடன் பூச்சியம் சேர்ந்தது முழு எண்களின் கணமாகும்.

இக்கோடு 0-ன் வலப்புறம் மட்டும் முடிவில்லாமல் நீள்கிறது.

முழு எண்களின் கணத்தை $\mathbb{W}$ எனக் குறிப்போம்.

$\mathbb{W} = \{ 0, 1, 2, 3, \cdots \}$



படம் 2.2

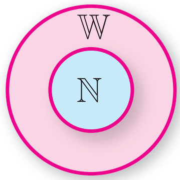
முழு எண்களில் மிகச்சிறிய எண் 0 ஆகும்.

குறிப்புரை

1) ஒவ்வொரு இயல் எண்ணும் ஒரு முழு எண்ணாகும்.

2) ஒவ்வொரு முழு எண்ணும் ஒரு இயல் எண்ணாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. ஏனெனில், $0 \in \mathbb{W}$ ஆனால் $0 \notin \mathbb{N}$

3) $\mathbb{N} \subset \mathbb{W}$



2.1.3 முழுக்கள் (Integers)

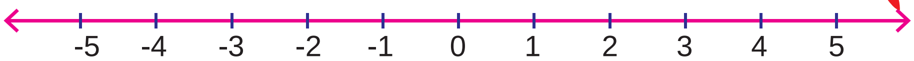
இயல் எண்கள் மற்றும் அவற்றின் குறை எண்கள் இவற்றுடன் பூச்சியம் சேர்ந்த கணம் முழுக்கள் எனப்படும்.

$\mathbb{Z}$ என்பது 'Zahlen', என்ற ஜெர்மன் வார்த்தையிலிருந்து பெறப்பட்டது. 'எண்ணுதல்' என்பது இதன் பொருளாகும்.

முழுக்களின் கணத்தை $\mathbb{Z}$ எனக் குறிப்போம்.

$\mathbb{Z} = \{\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

இக்கோடு 0-ன் இரு புறமும் முடிவில்லாமல் செல்கிறது.



படம் 2.3

$1, 2, 3, \cdots$ என்பன மிகை முழுக்கள் எனப்படும்.

$-1, -2, -3, \cdots$ என்பன குறை முழுக்கள் எனப்படும்.

எனவே, $\{\cdots -3, -2, -1, 1, 2, 3, \cdots\}$ என்பது பூச்சியமற்ற முழுக்களின் கணமாகும்.

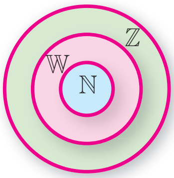
நினைவு கூர்ந்து விடையளி !
0 என்பது மிகை முழுவா அல்லது குறை முழுவா ?

குறிப்புரை

1) ஒவ்வொரு இயல் எண்ணும் ஒரு முழு ஆகும்.

2) ஒவ்வொரு முழு எண்ணும் ஒரு முழு ஆகும்.

3) $\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z}$



2.1.4 விகிதமுறு எண்கள் (Rational Numbers)

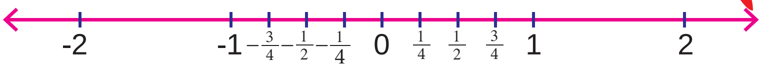
p மற்றும் q முழுக்கள், மேலும் $q \neq 0$ எனில், $\dfrac{p}{q}$ என்ற வடிவில் அமையும் எண் விகிதிமுறு எண் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $3 = \dfrac{3}{1}, -\dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{8}$ என்பன விகிதமுறு எண்களாகும்.

விகிதமுறு எண்களின் கணம் $\mathbb{Q}$ எனக் குறிப்பிடப்படும்.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, \text{மற்றும் } q \neq 0\right\}$$

இரு முழுக்களுக்கு இடையில் விகிதமுறு எண்களை காண்கிறோம்.



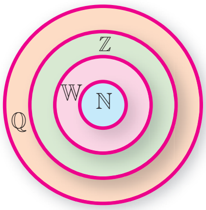
படம் 2.4

குறிப்புரை

1) ஒரு விகிதமுறு எண் மிகை, குறை அல்லது பூச்சியமாக இருக்கலாம்.

2) ஒரு முழு n-ஐ $\dfrac{n}{1}$ என்ற வடிவில் எழுதலாம். எனவே, ஒவ்வொரு முழுவும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்.

3) $\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$



முக்கிய முடிவுகள்

1) இரண்டு வெவ்வேறு விகிதமுறு எண்கள் a மற்றும் b என்பவற்றிற்கு இடையே $a < \dfrac{a+b}{2} < b$ என்றவாறு $\dfrac{a+b}{2}$ என்ற ஒரு விகிதமுறு எண் அமையும்.

2) கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு விகிதமுறு எண்களுக்கிடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் இருக்கும்.

நினைவு கூர்ந்து விடையளி !
விகிதம் என்பதை விகிதமுறு எண்களுடன் தொடர்பு படுத்த முடியுமா ?

எடுத்துக்காட்டு 2.1

$\dfrac{1}{4}$ மற்றும் $\dfrac{3}{4}$ ஆகிய எண்களுக்கிடையே உள்ள ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

தீர்வு $\frac{1}{4}$ மற்றும் $\frac{3}{4}$ இவற்றிற்கு இடையே அமையும் ஒரு விகிதமுறு எண்

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\ (1)=\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{3}{4}$ இவற்றிற்கு இடையே அமையும் விகிதமுறு எண் $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}=\frac{5}{8}$

$\frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{5}{8}$ என்ற விகிதமுறு எண்கள் $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$-க்கு இடையே அமைந்துள்ளன.

குறிப்பு $\frac{1}{4}$ மற்றும் $\frac{3}{4}$ இவற்றிற்கு இடையில் எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன. எடுத்துக்காட்டு 2.1-ல் நமக்கு கிடைத்த $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}$ என்பவை அவ்வாறான இரண்டு எண்களாகும்.

பயிற்சி 2.1

1. பின்வரும் கூற்றுகளில் எவை சரி அல்லது தவறு எனக் கூறுக.

   (i) ஒவ்வொரு இயல் எண்ணும் ஒரு முழு எண் ஆகும்.
   (ii) ஒவ்வொரு முழு எண்ணும் ஒரு இயல் எண் ஆகும்.
   (iii) ஒவ்வொரு முழுவும் ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.
   (iv) ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் ஒரு முழு எண் ஆகும்.
   (v) ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் ஒரு முழு ஆகும்.
   (vi) ஒவ்வொரு முழுவும் ஒரு முழு எண் ஆகும்.

2. பூச்சியம் என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகுமா? உங்கள் விடைக்கு காரணம் கூறுக.

3. $-\frac{5}{7}$ மற்றும் $-\frac{2}{7}$ என்ற எண்களுக்கு இடையே உள்ள ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

2.2 விகிதமுறு எண்களை தசமவடிவில் குறிப்பிடுதல்

$\frac{p}{q}$ என்ற விகிதமுறு எண்ணின் தசம வடிவத்தை நீள் வகுத்தல் முறையில் நாம் பெறலாம்.

p என்ற எண்ணை q ஆல் வகுக்கும் போது சில படிகளுக்குப் பின்னர் மீதி பூச்சியமாகும் அல்லது மீதி எந்நிலையிலும் பூச்சியமாகாது மற்றும் மீண்டும் மீண்டும் வரும் எண் தொகுதி மீதியாக கிடைக்கும்.

நிலை (i) சில படிகளுக்கு பின்னர் மீதி பூச்சியமாகும்

முதலில், $\frac{7}{16}$-ஐ தசம வடிவத்தில் எழுதுவோம். இங்கு $\frac{7}{16}=0.4375$

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டிலிருந்து, $\frac{7}{16}$ -ன் தசமவடிவத்தை நீள்வகுத்தல் முறையில் காணும் போது சில படிகளுக்குப் பின்னர் மீதி பூச்சியமாவதைக் காண்கிறோம். மேலும் தசம விரிவும் முடிவு பெறுகிறது.

$$\begin{array}{r|l} & 0.4375 \\ \hline 16 & 7.0000 \\ & 6\,4 \\ \hline & 60 \\ & 48 \\ \hline & 120 \\ & 112 \\ \hline & 80 \\ & 80 \\ \hline & 0 \end{array}$$

இதைப்போலவே, நீள்வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் விகிதமுறு எண்களை தசம வடிவில் எழுதலாம்.

$$\frac{1}{2} = 0.5,\ \frac{7}{5} = 1.4,\ -\frac{8}{25} = -0.32,\ \frac{9}{64} = 0.140625,\ \frac{527}{500} = 1.054$$

இந்த எடுத்துக்காட்டுகளில் தசம விரிவுகளானது சில படிகளுக்குப் பின்னர் முற்றுப்பெறுவதைக் காண்கிறோம்.

முக்கிய கருத்து — **முடிவுறு தசம விரிவு**

$\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ என்ற வடிவில் உள்ள எண்ணின் தசம விரிவானது முடிவு பெறும் எனில், $\frac{p}{q}$ -ன் தசம விரிவு முடிவுறு தசமவிரிவு (Terminating decimal expansion) எனப்படும். முடிவுறு தசம விரிவினைக்கொண்ட எண் முடிவுறு தசம எண் எனப்படும்.

நிலை (ii) எந்நிலையிலும் மீதி பூச்சியமாகாது

ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் முடிவுறு தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்குமா?

இவ்வினாவிற்கு விடையளிக்குமுன், $\frac{5}{11}$, $\frac{7}{6}$ மற்றும் $\frac{22}{7}$ ஆகிய விகிதமுறு எண்களின் தசம விரிவுகளைக் காண்போம்.

$$\begin{array}{r|l} & 0.4545\cdots \\ \hline 11 & 5.0000 \\ & 4\,4 \\ \hline & 60 \\ & 55 \\ \hline & 50 \\ & 44 \\ \hline & 60 \\ & 55 \\ \hline & 50 \\ & \ddots \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 1.1666\cdots \\ \hline 6 & 7.0000 \\ & 6\,0 \\ \hline & 10 \\ & 6 \\ \hline & 40 \\ & 36 \\ \hline & 40 \\ & 36 \\ \hline & 40 \\ & 36 \\ \hline & 40 \\ & \ddots \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 3.142857\,142857\cdots \\ \hline 7 & 22.00000000 \\ & 21 \\ \hline & 10 \\ & 7 \\ \hline & 30 \\ & 28 \\ \hline & 20 \\ & 14 \\ \hline & 60 \\ & 56 \\ \hline & 40 \\ & 35 \\ \hline & 50 \\ & 49 \\ \hline & 10 \\ & \ddots \end{array}$$

$$\therefore \frac{5}{11} = 0.4545\cdots, \qquad \frac{7}{6} = 1.1666\cdots, \qquad \frac{22}{7} = 3.142857\,1\cdots$$

எனவே, அனைத்து விகிதமுறு எண்களின் தசம விரிவுகளும் முற்றுப்பெற்று இருக்க வேண்டும் என்ற அவசியமில்லை.

மேற்கண்ட எண்களின் தசம விரிவுகளை நீள் வகுத்தல் முறையில் காணும் போது எந்நிலையிலும் மீதி பூச்சியமாகவில்லை. மேலும் குறிப்பிட்ட இடைவெளிகளில் கிடைக்கின்ற மீதிகள் வரிசை மாறாமல் மீண்டும் மீண்டும் வருவதைக் காண்கிறோம். ஆதலால் ஈவில் மீண்டும் மீண்டும் வரும் இலக்கங்களின் தொகுதியை (repeating block of digits) நாம் பெறுகிறோம்.

முக்கிய கருத்து — **முடிவுறா சுழல் தசம விரிவு**

$\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ என்ற எண்ணின் தசம விரிவு காணும் போது எந்நிலையிலும் மீதி பூச்சியமாகவில்லை எனில், ஈவில் மீண்டும் மீண்டும் வரும் இலக்கங்களின் தொகுதி கிடைக்கும். இந்நிலையில் $\frac{p}{q}$-ன் தசம விரிவு முடிவுறா சுழல் தசம விரிவு அல்லது முடிவுறா மீள்வரு தசம விரிவு (Non-terminating and recurring decimal expansion) எனப்படும். முடிவுறா சுழல் தசம விரிவினைக் கொண்ட எண் முடிவுறா சுழல் தசம எண் எனப்படும்.

தசம எண்ணில் இலக்கங்களின் தொகுதி மீண்டும் மீண்டும் வருவதைக்குறிக்க, அந்தத் தொகுதியின் மீது கோடிட்டுக் (bar) காட்டி, மற்ற எண் தொகுதிகளை நீக்கிவிடலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$\frac{5}{11}$, $\frac{7}{6}$ மற்றும் $\frac{22}{7}$ -ன் விரிவுகளை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$\frac{5}{11} = 0.4545\cdots = 0.\overline{45}$, $\quad \frac{7}{6} = 1.16666\cdots = 1.1\overline{6}$

$\frac{22}{7} = 3.142857\ 142857\ \cdots = 3.\overline{142857}$

n என்ற எண்ணின் தலைகீழி $\frac{1}{n}$ ஆகும். மேலும் இயல்எண்களின் தலைகீழிகள் விகிதமுறு எண்களாகும். முதல் பத்து இயலெண்களின் தலைகீழிகளின் தசம வடிவங்களை பின்வரும் அட்டவணை காட்டுகிறது.

எண்	தலைகீழி	தசம எண் வகை
1	1.0	முடிவுறு தசம எண்
2	0.5	முடிவுறு தசம எண்
3	$0.\overline{3}$	முடிவுறா சுழல் தசம எண்
4	0.25	முடிவுறு தசம எண்
5	0.2	முடிவுறு தசம எண்
6	$0.1\overline{6}$	முடிவுறா சுழல் தசம எண்
7	$0.\overline{142857}$	முடிவுறா சுழல் தசம எண்
8	0.125	முடிவுறு தசம எண்
9	$0.\overline{1}$	முடிவுறா சுழல் தசம எண்
10	0.1	முடிவுறு தசம எண்

ஆகவே,

> ஒரு விகிதமுறு எண்ணை முடிவுறு தசம விரிவாகவோ அல்லது முடிவுறா சுழல் தசம விரிவாகவோ குறிப்பிடலாம்.

இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும். அதாவது,

முடிவுறு தசம விரிவு அல்லது முடிவுறா சுழல் தசம விரிவைப் பெற்றுள்ள ஒரு எண் விகிதமுறு எண்ணாகும்.

இதனை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் விளக்குவோம்.

2.2.1 முடிவுறு தசம எண்களை $\frac{p}{q}$ வடிவில் குறித்தல்

முடிவுறு தசம எண்ணை எளிதாக $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $q \neq 0)$ என்ற வடிவத்தில் குறிப்பிடலாம். அவ்வாறு குறிப்பிடும் முறையை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.2

கீழ்க்காணும் தசம எண்களை $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதுக. இங்கு p, q என்பன முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$.

(i) 0.75 (ii) 0.625 (iii) 0.5625 (iv) 0.28

தீர்வு (i) $0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

(ii) $0.625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$

(iii) $0.5625 = \frac{5625}{10000} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$

(iv) $0.28 = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$

2.2.2 முடிவுறா சுழல் தசம எண்ணை $\frac{p}{q}$ வடிவில் குறித்தல்

முடிவுறா சுழல் தசம எண்ணை $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $q \neq 0)$ என்ற வடிவத்திற்கு மாற்றும் முறை எளிதான செயல் அல்ல. முடிவுறா சுழல் தசம எண்ணை $\frac{p}{q}$ வடிவத்திற்கு மாற்றும் முறையை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.3

பின்வருவனவற்றை $\frac{p}{q}$, வடிவில் எழுதுக. இங்கு p, q முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$.

(i) $0.\overline{47}$ (ii) $0.\overline{001}$ (iii) $0.5\overline{7}$ (iv) $0.2\overline{45}$ (v) $0.\overline{6}$ (vi) $1.\overline{5}$

தீர்வு (i) $x = 0.\overline{47}$ என்க. $x = 0.474747\cdots$

இங்கு இரண்டு இலக்கத் தொகுதி 47 மீண்டும் மீண்டும் வருவதால், இருபுறமும் 100 ஆல் பெருக்குக.

$$100x = 47.474747\cdots = 47 + 0.474747\cdots = 47 + x$$

$$99x = 47$$

$$x = \frac{47}{99} \qquad \therefore\ 0.\overline{47} = \frac{47}{99}$$

(ii) $x = 0.\overline{001}$ என்க. $x = 0.001001001\cdots$

மூன்று இலக்கங்கள் மீண்டும் மீண்டும் வருவதால், இரு புறமும் 1000 ஆல் பெருக்குக.

$1000x = 1.001001001\cdots = 1 + 0.001001001\cdots = 1 + x$

$1000x - x = 1$

$999x = 1$

$x = \frac{1}{999}$ $\quad\therefore 0.\overline{001} = \frac{1}{999}$

(iii) $x = 0.5\overline{7}$ என்க. பிறகு $x = 0.57777\cdots$

இருபுறமும் 10 ஆல் பெருக்க,

$10x = 5.7777\cdots = 5.2 + 0.57777\cdots = 5.2 + x$

$9x = 5.2$

$x = \frac{5.2}{9}$

$x = \frac{52}{90}$ $\quad\therefore 0.5\overline{7} = \frac{52}{90} = \frac{26}{45}$

(iv) $x = 0.2\overline{45}$ என்க. பிறகு $x = 0.2454545\cdots$

இருபுறமும் 100 ஆல் பெருக்க,

$100x = 24.545454\cdots = 24.3 + 0.2454545\cdots = 24.3 + x$

$99x = 24.3$

$x = \frac{24.3}{99}$

$0.2\overline{45} = \frac{243}{990} = \frac{27}{110}$

(v) $x = 0.\overline{6}$ என்க. பின்னர் $x = 0.66666\cdots$

இருபுறமும் 10 ஆல் பெருக்க,

$10x = 6.66666\cdots = 6 + 0.6666\cdots = 6 + x$

$9x = 6$

$x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ $\quad\therefore 0.\overline{6} = \frac{2}{3}$

(vi) $x = 1.\overline{5}$ என்க. பின்னர் $x = 1.55555\cdots$

இருபுறமும் 10 ஆல் பெருக்க,

$10x = 15.5555\cdots = 14 + 1.5555\cdots = 14 + x$

$9x = 14$

$x = \frac{14}{9}$ $\therefore 1.\overline{5} = 1\frac{5}{9}$

எடுத்துக்காட்டு 2.3 (vi)

மாற்றுமுறை

$x = 1.\overline{5}$ என்க.

அதாவது, $x = 1.55555\cdots$

இருபுறமும் 10 ஆல் பெருக்க,

$10x = 15.5555\cdots$

$\therefore 10x - x = 14$

$9x = 14$

$x = \frac{14}{9} = 1\frac{5}{9}$

எடுத்துக்காட்டு2.3-ல் உள்ள எல்லா கணக்குகளையும் $\frac{p}{q}$, p, q முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$ வடிவில் எழுத, மாற்று முறையையும் பயன்படுத்தலாம்.

எனவே, முடிவுறா சுழல் தசம விரிவினைப் பெற்றுள்ள ஒவ்வொரு எண்ணையும் $\frac{p}{q}$, (p, q முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$) என்ற வடிவில் எழுத முடிகிறது.

ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் தசம வடிவம் முடிவுற்றதா அல்லது முடிவுறாததா என்பதைக் கண்டறிய பின்வரும் விதியைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ வடிவில் உள்ள விகிதமுறு எண்ணை $\frac{p}{2^m \times 5^n}$, ($p \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $m, n \in \mathbb{W}$) என்ற வடிவில் எழுத முடியுமானால், அந்த விகிதமுறு எண் முடிவுறு தசம விரிவினைப்பெற்றிருக்கும். அவ்வாறில்லையெனில், அந்த விகிதமுறு எண் முடிவுறா சுழல் தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்கும்.

தசம எண்கள் 10-ன் அடுக்குகளைப் பின்னத்தின் பகுதிகளாக் கொண்டிருக்கும் மற்றும் 2,5 என்பவை 10-ன் பகாக் காரணிகள் என்ற உண்மைகளின் அடிப்படையில் இம்முடிவானது அமைந்துள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 2.4

வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தாமல், பின்வரும் எண்களின் தசம விரிவுகளில் எவையெவை முடிவுறு தசம விரிவு அல்லது முடிவுறா சுழல் தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும் என வகைப்படுத்துக.

(i) $\frac{7}{16}$ (ii) $\frac{13}{150}$ (iii) $\frac{-11}{75}$ (iv) $\frac{17}{200}$

தீர்வு

(i) $16 = 2^4$

$\frac{7}{16} = \frac{7}{2^4} = \frac{7}{2^4 \times 5^0}$. எனவே, $\frac{7}{16}$ என்பது முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்.

(ii) $150 = 2 \times 3 \times 5^2$

$\frac{13}{150} = \frac{13}{2 \times 3 \times 5^2}$

இது $\frac{p}{2^m \times 5^n}$, என்ற வடிவில் இல்லை. எனவே, $\frac{13}{150}$ என்பது முடிவுறா சுழல் தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்.

(iii) $\frac{-11}{75} = \frac{-11}{3 \times 5^2}$

இது $\frac{p}{2^m \times 5^n}$, என்ற வடிவில் இல்லை. எனவே, $\frac{-11}{75}$ என்பது முடிவுறா சுழல் தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்.

(iv) $\frac{17}{200} = \frac{17}{8 \times 25} = \frac{17}{2^3 \times 5^2}$. எனவே, $\frac{17}{200}$ என்பது முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.5

$0.\overline{9}$ ஐ விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றுக.

தீர்வு $x = 0.\overline{9}$ என்க. பின்னர் $x = 0.99999\cdots$

இருபுறமும் 10 ஆல் பெருக்க

$$10x = 9.99999\cdots = 9 + 0.9999\cdots = 9 + x$$

$$\Longrightarrow \quad 9x = 9$$

$$\Longrightarrow \quad x = 1.$$ அதாவது, $0.\overline{9} = 1$ ($\because$ 1 என்பது விகிதமுறு எண்)

உங்கள் சிந்தனைக்கு

நாம் $0.\overline{9} = 1$ என நிருபித்தோம். இது வியப்பூட்டுவதாக இல்லையா?

$0.9999\cdots$ என்பது 1-ஐ விடக்குறைவானது என பெரும்பாலானோர் கருதுகின்றனர். ஆனால் உண்மை அதுவல்ல. மேற்கண்ட விவாதத்திலிருந்து $0.\overline{9} = 1$ என்பது தெளிவாகிறது. மேலும் இம்முடிவானது $3 \times 0.333\cdots = 0.999\cdots$ மற்றும் $3 \times \frac{1}{3} = 1$ என்ற உண்மைகளையும் நிறைவு செய்கிறது. இதேபோல், ஒவ்வொரு முடிவுறு தசமவிரிவினையும் முடிவில்லாத 9-களின் தொகுதியாக எழுதுவதன் மூலம் முடிவுறா சுழல் தசம விரிவாக குறிப்பிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $6 = 5.9999\cdots$,
$2.5 = 2.4999\cdots$.

பயிற்சி 2.2

1. பின்வரும் விகிதமுறு எண்களை தசம எண்களாக மாற்றி அவை ஒவ்வொன்றும் எவ்வகை தசம விரிவினைப் பெற்றுள்ளது எனக் கூறுக.

   (i) $\frac{42}{100}$ (ii) $8\frac{2}{7}$ (iii) $\frac{13}{55}$ (iv) $\frac{459}{500}$

   (v) $\frac{1}{11}$ (vi) $-\frac{3}{13}$ (vii) $\frac{19}{3}$ (viii) $-\frac{7}{32}$

2. நீள் வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தாமல், பின்வரும் விகிதமுறு எண்களில் எவை முடிவுறு தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்கும் எனக் காண்க.

   (i) $\frac{5}{64}$ (ii) $\frac{11}{12}$ (iii) $\frac{27}{40}$ (iv) $\frac{8}{35}$

3. கீழ்க்கண்ட தசம எண்களை விகிதமுறு எண்களாக்குக.

   (i) $0.\overline{18}$ (ii) $0.\overline{427}$ (iii) $0.\overline{0001}$

   (iv) $1.4\overline{5}$ (v) $7.\overline{3}$ (vi) $0.4\overline{16}$

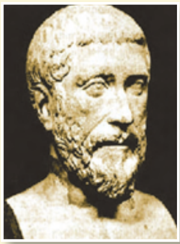
4. $\frac{1}{13}$ஐ தசம வடிவில் எழுதுக. மீண்டும் மீண்டும் வரும் எண் தொகுதியில் எத்தனை இலக்கங்கள் உள்ளன ?

5. $\frac{1}{7}$ மற்றும் $\frac{2}{7}$ ஆகியவற்றின் தசம விரிவுகளை நீள் வகுத்தல் முறையில் காண்க. நீள் வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தாமல் $\frac{1}{7}$-ன் தசம விரிவினைப் பயன்படுத்தி $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ ஆகியவற்றின் தசம விரிவுகளைப் பெறுக.

2.3 விகிதமுறா எண்கள் (Irrational Numbers)

முன் வகுப்புகளில் பயின்ற எண் கோடு பற்றிய பாடக்கருத்துகளை மீண்டும் நினைவு கூர்வோம். விகிதமுறு எண்களை எண் கோட்டில் குறிக்க முடியும் என்பதை நாம் அறிந்துள்ளோம்.

மேலும் எந்த இரண்டு விகிதமுறு எண்களுக்கிடையேயும் எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன என்பதையும் அறிந்துள்ளோம். உண்மையில் விகிதமுறு எண்கள் அல்லாத எண்ணிலடங்கா மேலும் பல எண்கள் எண் கோட்டில் உள்ளன. அதாவது, முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவுகளைக் கொண்ட எண்ணற்ற எண்கள் எண்கோட்டில் உள்ளன. ஆகவே விகிதமுறு எண்களின் தொகுப்பை மேலும் விரிவுபடுத்த வேண்டியது அவசியமாகிறது.



பிதாகரஸ்

(கி.மு 569 - கி.மு 479)

கி.மு 400 ஆம் ஆண்டுகளில், கிரேக்க நாட்டு கணித அறிஞர் பிதாகரஸ் வழி வந்தவர்கள் முதன் முதலில் பின்ன வடிவில் எழுத முடியாத எண்களைக் கண்டுபிடித்தனர். அவ்வகை எண்கள் விகிதமுறா எண்கள் என்றழைக்கப்பபட்டன.

பின்வரும் தசம விரிவினை எடுத்துக்கொள்க.

$$0.808008000800008\cdots \qquad (1)$$

இது முடிவுறா தசம விரிவாகும். இந்த தசம விரிவு சுழல் தன்மையுடையதா ?

தசம விரிவு (1) ஆனது ஒரு குறிப்பிட்ட அமைப்பினைப் பெற்றுள்ளது என்பது உண்மை. ஆனால், எந்த ஒரு இலக்கங்களின் தொகுதியும் இவ்விரிவில் மீண்டும் மீண்டும் காணப்படாததால் இத்தசம விரிவு சுழல் தன்மையற்றது.

ஆகவே, இத்தசமவிரிவு முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற (மீள்வரு தன்மையற்ற) (non-terminating and recurring) தசமவிரிவாகும் எனவே, இது ஒரு விகிதமுறு எண்ணைக் குறிக்காது. இவ்வகை எண்கள் விகிதமுறா எண்கள் எனப்படும்.

முக்கிய கருத்து — விகிதமுறா எண்

முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவினை கொண்ட எண் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும். எனவே, ஒரு விகிதமுறா எண்ணை $\frac{p}{q}$ (இங்கு p, q முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$) என்ற வடிவில் எழுதமுடியாது.

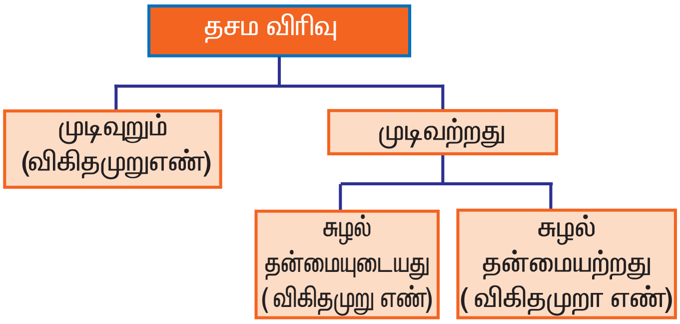
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, e, \pi, \sqrt{17}$, $0.2020020002\cdots$ போன்றவை விகிதமுறா எண்களுக்கு மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

குறிப்பு (1)-ல் எடுத்துக்கொண்ட தசம எண்ணில் உள்ள எண்ணுரு 8-க்குப் பதிலாக நம் விருப்பம் போல் எந்தவொரு இயல் எண்ணையும் பயன்படுத்தி எண்ணற்ற முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவுகளைப் பெறமுடியும்.

π ஐப் பற்றி அறிந்து கொள்க: 18 ஆம் நூற்றாண்டின் பிற்பகுதியில் கணிதவியல் அறிஞர்கள் லாம்பர்ட், லெஜண்டர் ஆகியோர் π ஒரு விகிதமுறா எண் என நிருபித்தார்கள்.

$\frac{22}{7}$ (ஒரு விகிதமுறு எண்) என்பதை π (ஒரு விகிதமுறா எண்)-ன் தோராய மதிப்பாக எடுத்துக் கொள்வது வழக்கம்.

தசம விரிவுகளின் வகைப்பாடு



2.4 மெய்யெண்கள் (Real Numbers)

முக்கிய கருத்து | **மெய்யெண்கள்**

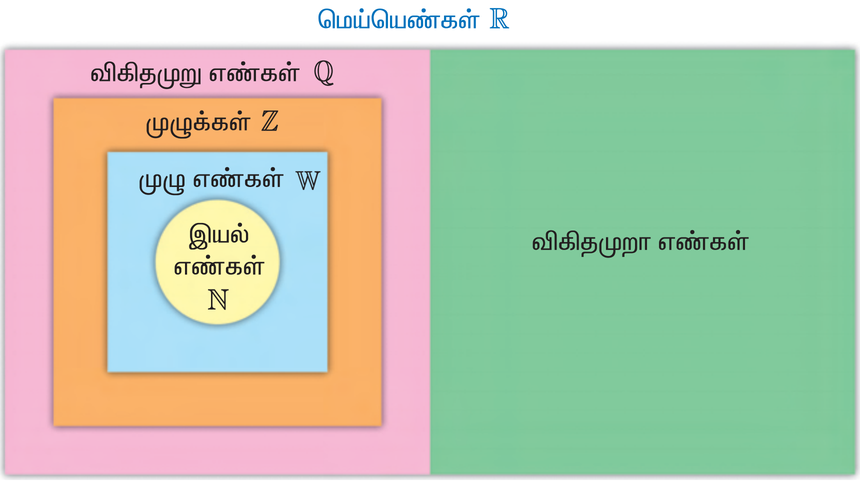
மெய்யெண்களின் கணமானது விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் சேர்ப்புக் கணமாகும். ஆகவே, ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கும்.
அதாவது, ஒருமெய்யெண் விகிதமுறு எண் அல்ல எனில், அது ஒரு விகிமுறா எண்ணாகும்.

அனைத்து மெய்யெண்களின் கணத்தை $\mathbb{R}$ எனக் குறிப்போம்.

ஜெர்மன் நாட்டு கணிதவியல் அறிஞர்கள் ஜார்ஜ் கேண்டர் மற்றும் ரிச்சர்ட் டெடிகண்ட் இருவரும் தனித்தனியே ஆய்வுகளை மேற்கொண்டு ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் எண் கோட்டில் ஒரு தனித்த புள்ளியால் குறிக்கப்படும் எனவும், எண் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரு தனித்த மெய்யெண்ணால் குறிக்கப்படும் எனவும் நிருபித்தனர்.

எண் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரு தனித்த மெய்யெண்ணைக் குறிக்கும். அதேபோல், ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் எண் கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு தனித்த புள்ளியால் குறிப்பிடப்படும்.

மெய்யெண்கள் கணம் உள்ளடக்கியுள்ள கணங்களுக்கு இடையேயான தொடர்புகளைப் பின்வரும் படம் விளக்குகிறது.



படம் 2.5

2-ன் வர்க்க மூலத்தை தசம விரிவாகக் காண்போம்.

$$
\begin{array}{r|r}
 & 1.4142135\cdots \\ \hline
1 & 2.00\ 00\ 00\ 00\ 00 \\
 & 1 \\ \hline
24 & 100 \\
 & 96 \\ \hline
281 & 400 \\
 & 281 \\ \hline
2824 & 11900 \\
 & 11296 \\ \hline
28282 & 60400 \\
 & 56564 \\ \hline
282841 & 383600 \\
 & 282841 \\ \hline
2828423 & 10075900 \\
 & 8485269 \\ \hline
28284265 & 159063100 \\
 & 141421325 \\ \hline
 & 17641775 \\
 & \vdots
\end{array}
\qquad \therefore\ \sqrt{2} = 1.4142135\cdots
$$

இவ்வகுத்தல் செயலை தொடர்ந்து செய்யும் போது கிடைக்கும் தசம விரிவானது முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற இலக்கங்களைக் கொண்டிருப்பதைக் காணலாம். $\sqrt{2}$ -ன் தசம விரிவு முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்றது. எனவே, $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

குறிப்பு

(i) $\sqrt{3}\,, \sqrt{5}\,, \sqrt{6}\,,\cdots$ என்பவற்றின் தசம விரிவுகள் முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்றவை. எனவே $\sqrt{3}\,, \sqrt{5}\,, \sqrt{6}\,,\cdots$ என்பன விகிதமுறா எண்களாகும்.

(ii) ஒரு மிகைமுழுவின் வர்க்கமூலம் எப்பொழுதும் விகிதமுறா எண்ணாகும் என்பது உண்மையல்ல.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{25} = 5 \cdots$. எனவே $\sqrt{4}\,, \sqrt{9}\,, \sqrt{25}\,,$ என்பன விகிதமுறு எண்களாகும்.

(iii) முழு வர்க்களண் அல்லாத எந்தவொரு மிகைமுழுவின் வர்க்க மூலமும் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

2.4.1 விகிதமுறா எண்களை எண்கோட்டில் குறித்தல்

$\sqrt{2}$ மற்றும் $\sqrt{3}$ என்ற விகிதமுறா எண்களை எண் கோட்டில் குறிக்கலாம்.

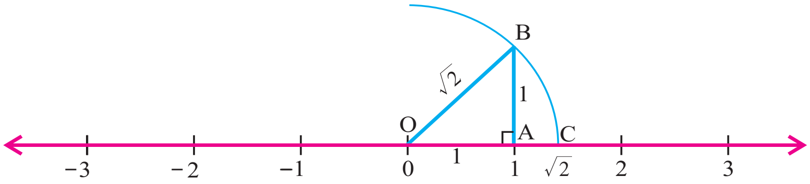
(i) $\sqrt{2}$ ஐ எண் கோட்டில் குறித்தல்.

எண் கோட்டை வரைக. O என்பது பூச்சியம் என்ற எண்ணையும், A என்பது 1 என்ற எண்ணையும் குறிப்பிடுமாறு O மற்றும் A என்ற புள்ளிகளை எண் கோட்டில் குறிக்க. அதாவது, $OA = 1$ அலகு.

$AB = 1$ அலகு என இருக்குமாறு $AB \perp OA$ ஐ வரைக. OB ஐச் சேர்க்க.

செங்கோண முக்கோணம் OAB-ல், பிதாகரஸ் தேற்றப்படி,

$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$
$$= 1^2 + 1^2$$
$$OB^2 = 2$$
$$OB = \sqrt{2}$$



படம் 2.6

O-ன் வலப்புறம் C என்ற புள்ளியில் எண்கோட்டை வெட்டுமாறு O ஐ மையமாகவும் OB ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டவில் வரைக.

இப்பொழுது, படத்திலிருந்து $OC = OB = \sqrt{2}$ என்பது தெளிவாகிறது.

எனவே, எண்கோட்டின் மீதுள்ள C என்ற புள்ளி $\sqrt{2}$ ஐக் குறிக்கிறது.

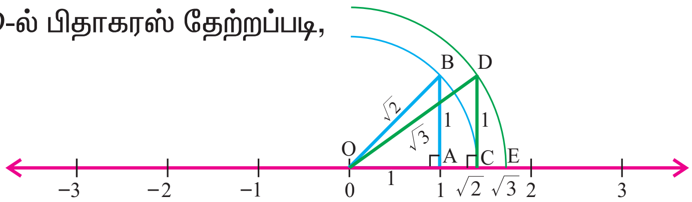
(ii) $\sqrt{3}$ ஐ எண் கோட்டில் குறித்தல்.

எண் கோட்டை வரைக. O என்பது பூச்சியம் என்ற எண்ணையும் C என்பது $\sqrt{2}$ ஐயும் குறிக்குமாறு O மற்றும் C என்ற புள்ளிகளை (i)-ல் உள்ளவாறு எண் கோட்டில் குறிக்க.

$\therefore OC = \sqrt{2}$ அலகு. $CD = 1$ அலகு உள்ளவாறு $CD \perp OC$ ஐ வரைக. ODஐச் சேர்க்க.

செங்கோண முக்கோணம் OCD-ல் பிதாகரஸ் தேற்றப்படி,

$$OD^2 = OC^2 + CD^2$$
$$= (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3$$
$$\therefore OD = \sqrt{3}$$



படம் 2.7

O-ன் வலப்புறம் E என்ற புள்ளியில் எண் கோட்டை வெட்டுமாறு Oஐ மையமாவும் ODஐ ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டவில் வரைக. படத்திலிருந்து $OE = OD = \sqrt{3}$ என்பது தெளிவாகிறது. எனவே, எண் கோட்டின் மீதுள்ள E என்ற புள்ளி $\sqrt{3}$ ஐக் குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.6

பின்வருவனவற்றில் எவை விகிதமுறு அல்லது விகிதமுறா எண்கள் என வகைப்படுத்துக.

(i) $\sqrt{11}$ (ii) $\sqrt{81}$ (iii) 0.0625 (iv) $0.8\overline{3}$ (v) $1.505500555\cdots$

தீர்வு

(i) $\sqrt{11}$ ஒரு விகிதமுறா எண். (11ஒரு முழுவர்க்க எண் அல்ல)

(ii) $\sqrt{81} = 9 = \frac{9}{1}$, ஒரு விகிதமுறு எண் .

(iii) 0.0625 ஒரு முடிவுறு தசம விரிவு.

$\therefore$ 0.0625 ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்.

(iv) $0.8\overline{3} = 0.8333\cdots$

இந்த தசம விரிவு முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையுள்ளது.

$\therefore$ $0.8\overline{3}$ விகிதமுறு எண்ணாகும்.

(v) $1.505500555\cdots$ இத்தசம விரிவு முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவாகும். $\therefore$ $1.505500555\cdots$ ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.7

$\frac{5}{7}$ மற்றும் $\frac{9}{11}$ ஆகியவற்றிற்கு இடைப்பட்ட ஏதேனும் மூன்று விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.

தீர்வு

$$\begin{array}{r|l} & 0.714285\cdots \\ 7 & 5.000000 \\ & 4\,9 \\ \hline & \;\;10 \\ & \;\;\;7 \\ \hline & \;\;\;30 \\ & \;\;\;28 \\ \hline & \;\;\;\;20 \\ & \;\;\;\;14 \\ \hline & \;\;\;\;\;60 \\ & \;\;\;\;\;56 \\ \hline & \;\;\;\;\;\;40 \\ & \;\;\;\;\;\;35 \\ \hline & \;\;\;\;\;\;\;50 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;\ddots \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.8181\cdots \\ 11 & 9.0000 \\ & 8\,8 \\ \hline & \;\;20 \\ & \;\;11 \\ \hline & \;\;\;90 \\ & \;\;\;88 \\ \hline & \;\;\;\;20 \\ & \;\;\;\;\;\ddots \end{array}$$

$$\frac{5}{7} = 0.\overline{714285} \qquad \frac{9}{11} = 0.8181\cdots = 0.\overline{81}$$

$\frac{5}{7}$ மற்றும் $\frac{9}{11}$ இவற்றுக்கு இடையே (அதாவது 0.714285... மற்றும் 0.8181... ஆகியவற்றுக்கு இடையே) மூன்று விகிதாமுறா எண்களைக் காண, நாம் முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவுகளைக் கொண்ட மூன்று எண்களைக் காண வேண்டும். உண்மையில், $\frac{5}{7}$ -க்கும் $\frac{9}{11}$ -க்கும் இடையில் இது போன்ற எண்ணற்ற எண்கள் உள்ளன. அவற்றில் மூன்று எண்கள்,

$0.72022002220002\cdots$

$0.73033003330003\cdots$

$0.75055005550005\cdots$

எடுத்துக்காட்டு 2.8

பின்வரும் சமன்பாடுகளில் x, y, z என்பன விகிதமுறு அல்லது விகிதமுறா எண்களைக் குறிக்கின்றனவா என்பதை தீர்மானிக்க.

(i) $x^3 = 8$ (ii) $x^2 = 81$ (iii) $y^2 = 3$ (iv) $z^2 = 0.09$

தீர்வு

(i) $x^3 = 8 = 2^3$ (8 என்பது ஒரு முழு கன எண்)

$\Rightarrow x = 2$, ஒரு விகித முறு எண்.

(ii) $x^2 = 81 = 9^2$ (81 ஒரு முழு வர்க்கம்)

$\Rightarrow x = 9$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

(iii) $y^2 = 3 \quad \Rightarrow y = \sqrt{3}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

(iv) $z^2 = 0.09 = \frac{9}{100} = \left(\frac{3}{10}\right)^2$

$\Rightarrow z = \frac{3}{10}$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

பயிற்சி 2.3

1. $\sqrt{5}$ ஐ எண்கோட்டில் குறிக்க.
2. $\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{5}$ இவற்றிற்கு இடையே ஏதேனும் மூன்று விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.
3. 3 மற்றும் 3.5 இவற்றிற்கு இடையே ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.
4. 0.15 மற்றும் 0.16 இவற்றிற்கு இடையில் ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.
5. $\frac{4}{7}$ மற்றும் $\frac{5}{7}$ இவற்றிற்கு இடையே ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறா எண்களைக் காண்க..
6. $\sqrt{3}$ மற்றும் 2 இவற்றிற்கு இடையே ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.
7. $1.1011001110001\cdots$ மற்றும் $2.1011001110001\cdots$ இவற்றிற்கு இடையில் ஒரு விகிதமுறு எண்ணையும், ஒரு விகிதமுறா எண்ணையும் காண்க.
8. $0.12122122212222\cdots$ மற்றும் $0.2122122212222\cdots$ இவற்றிற்கு இடையே ஏதேனும் இரண்டு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

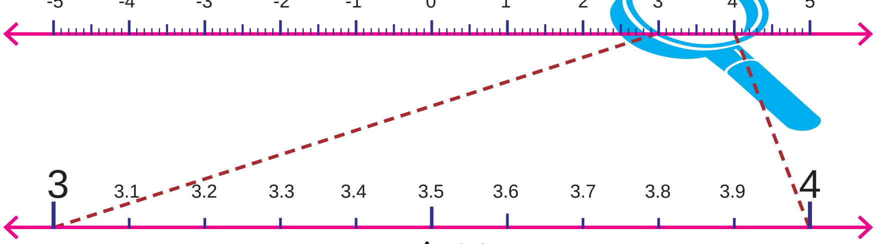
(குறிப்பு : 2 முதல் 8 முடிய உள்ள கணக்குகளுக்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் இருக்கும். அவ்வாறான தீர்வுகளில் ஏதேனும் இரண்டு அல்லது மூன்று தீர்வுகள் போதுமானது.)

2.4.2 மெய்யெண்களை எண்கோட்டில் குறித்தல்

எந்தவொரு மெய்யெண்ணையும் தசமவிரிவாகக் குறிப்பிடலாம் எனக் கண்டோம். இது ஒரு மெய்யெண்ணை எண் கோட்டில் குறிக்க உதவுகிறது.

3.776 ஐ நாம் எண் கோட்டில் குறிப்போம். 3.776 என்பது 3-க்கும் 4-க்கும் இடையில் உள்ளது என்பது நமக்கு தெரியும்.

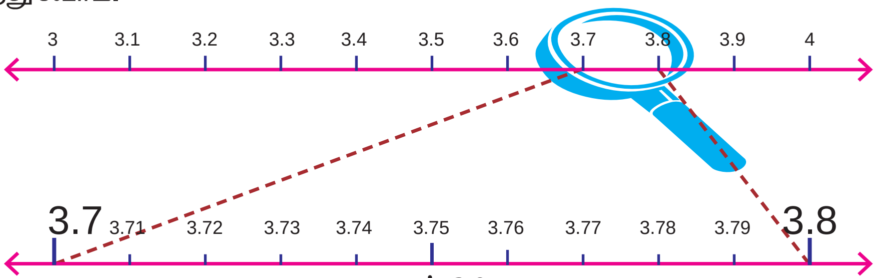
எண் கோட்டில் 3 மற்றும் 4 இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பகுதியை மிக அருகில் காண்போம்.



படம் . 2.8

3-க்கும் 4-க்கும் இடைப்பட்ட பகுதியை 10 சமபாகங்களாகப் பிரித்து, படம் 2.8-ல் காட்டியுள்ளவாறு குறிப்பிடுவோம். 3-ன் வலப்புறம் உள்ள முதல் குறியீடு 3.1, இரண்டாவது 3.2 என தொடர்ந்து குறிக்கப்பட்டுள்ளது. 3-க்கும் 4-க்கும் இடைப்பட்ட இக்குறியீடுகளை தெளிவாகக் காண உருப்பெருக்கும் கண்ணாடியைப் பயன்படுத்துவோம். இந்த உருப்பெருக்கம் படம் 2.8-ல் உள்ளவாறு இருக்கும்.

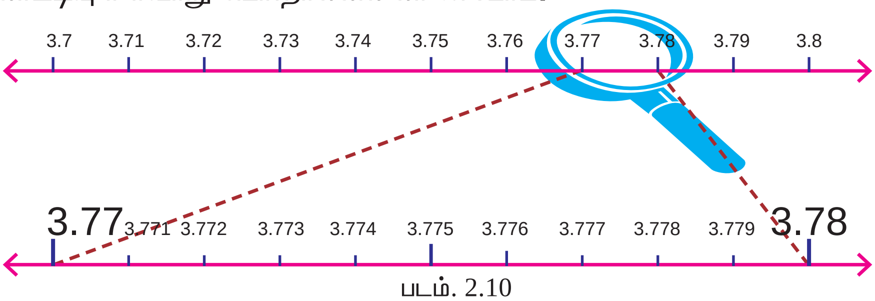
இப்பொழுது 3.776 ஆனது 3.7-க்கும் 3.8-க்கும் இடையில் இருப்பதைக் காண்கிறோம். எனவே நம்முடைய கவனத்தை 3.7 மற்றும் 3.8 இவற்றிற்கு இடைப்பட்டப் பகுதியின்(படம் 2.9) மேல் செலுத்துவோம்.



படம். 2.9

3.7 மற்றும் 3.8 இவற்றிற்கு இடைப்பட்டப் பகுதியை மீண்டும் 10 சமபாகங்களாகப் பிரிப்போம். முதல் குறியீடு 3.71,இரண்டாவது 3.72 என தொடர்ந்து குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. இக்குறியீடுகளை தெளிவாகக் காண, 3.7-க்கும் 3.8-க்கும் இடைப்பட்ட பகுதி படம் 2.9-ல் காட்டியுள்ளவாறு உருப்பெருக்கம் செய்யப்பட்டுள்ளது.

இப்போது 3.776 என்பது 3.77-க்கும் 3.78-க்கும் இடையில் இருப்பதைக் காண்கிறோம். ஆகவே, 3.77-க்கும் 3.78-க்கும் இடைப்பட்ட பகுதியை மீண்டும் 10 சமபாகங்களாகப் பிரித்து படம் 2.10-ல் காட்டியுள்ளவாறு பெரிதாக்கிக் காண்போம்.



படம். 2.10

முதல் குறியீடு 3.771, அடுத்த குறியீடு 3.772 எனத் தொடர்ந்து குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. 3.776 என்பது இக்குறியீட்டில் ஆறாவதாக இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

இவ்வாறு,உருப்பெருக்கும் கண்ணாடிமூலம் இருஎண்களின் இடைவெளியை பெரிதாக்கி எண்களை எண்கோட்டில் குறிக்கும் முறை தொடர் உருப்பெருக்க முறை (process of successive magnification) எனப்படும்.

ஆகவே, எண்கோட்டின் மீது முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றுள்ள ஒரு மெய்யெண்ணின் நிலையை போதுமான அளவு தொடர் உருப்பெருக்கம் செய்து காணலாம்.

இப்போது, முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையுள்ள தசம விரிவினைக் கொண்ட ஒரு மெய்யெண்ணை எடுத்துக்கொண்டு எண் கோட்டின் மீது அதன் நிலையினைக் காண முற்படுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.9

$4.\overline{26}$ஐ எண் கோட்டின் மீது 4 தசம இடத்திருத்தமாக அதாவது, 4.2626 முடிய பெரிதாக்கிக் காண்க.

தீர்வு எண்கோட்டின் மீது $4.\overline{26}$-ன் நிலையை தொடர் உருப்பெருக்க முறையில் காண்போம். இம் முறையானது படம். 2.11-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

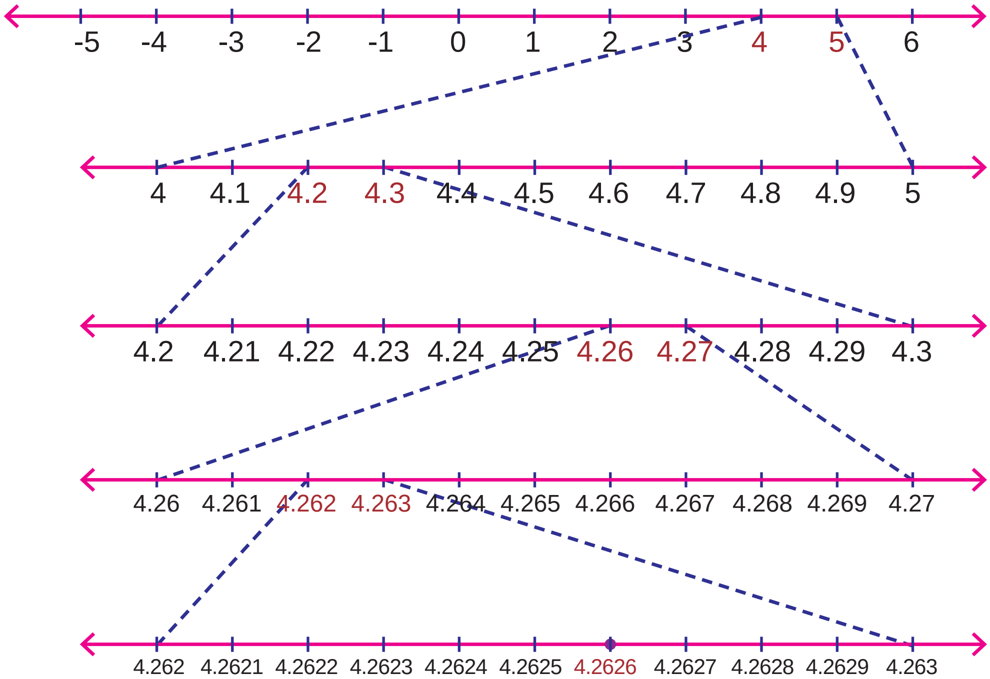
படி 1: $4.\overline{26}$ என்பது 4-க்கும் 5-க்கும் இடையில் இருப்பதைக்காண்கிறோம்.

படி 2: 4-க்கும் 5-க்கும் இடைப்பட்டப்பகுதியை 10 சமபாகங்களாகப்பிரித்து, உருப்பெருக்கும் கண்ணாடியைப் பயன்படுத்தி $4.\overline{26}$ என்பது 4.2-க்கும் 4.3-க்கும் இடையில் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

படி 3: 4.2-க்கும் 4.3-க்கும் இடைப்பட்டப்பகுதியை 10 சமபாகங்களாகப் பிரித்து, உருப்பெருக்கும் கண்ணாடியைப் பயன்படுத்தி, $4.\overline{26}$ என்பது 4.26-க்கும் 4.27-க்கும் இடையில் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

படி 4: 4.26-க்கும் 4.27-க்கும் இடைப்பட்டப்பகுதியை 10 சமபாகங்களாகப் பிரித்து உருப்பெருக்கும் கண்ணாடியைப் பயன்படுத்தி, $4.\overline{26}$ என்பது 4.262-க்கும் 4.263-க்கும் இடையில் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

படி 5: 4.262-க்கும் 4.263-க்கும் இடைப்பட்டப்பகுதியை 10 சமபாகங்களாகப் பிரித்து, உருப்பெருக்கும் கண்ணாடியைப் பயன்படுத்தி, $4.\overline{26}$ என்பது 4.2625-க்கும் 4.2627- க்கும் இடையில் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.



படம். 2.11

படத்திலிருந்து, $4.\overline{26}$ என்பது 4.262ஐ விட 4.263-க்கு நெருக்கமாக அமைந்துள்ளதைக் காண்கிறோம்.

இதேமுறையைப் பயன்டுத்தி எண் கோட்டின் மீது முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவினைக் கொண்ட ஒரு மெய்யெண்ணின் நிலையை தேவையான அளவு துல்லியமாகக் காணலாம்.

மேற்கண்ட விவாதங்களிலிருந்து, ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணையும் எண்கோட்டின் மீது ஒரு தனித்த புள்ளியால் குறிக்கலாம் என்ற முடிவுக்கு வருகிறோம். மேலும் எண் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரே ஒரு மெய்யெண்ணை மட்டுமே குறிக்கும் எனவும் முடிவு செய்யலாம்.

பயிற்சி 2.4

1. தொடர் உருப்பெருக்க முறையைப் பயன்படுத்தி
   (i) எண் கோட்டின் மீது 3.456-ன் நிலையைக் காண்க.
   (ii) எண் கோட்டின் மீது $6.7\overline{3}$-ன் நிலையை 4 தசம இடத்திருத்தமாகக் காண்க.

2.4.3 மெய்யெண்களின் பண்புகள்

- a, b என்ற ஏதேனும் இரண்டு மெய்யெண்களுக்கு, $a = b$ அல்லது $a > b$ அல்லது $a < b$ ஆகும்.
- இரண்டு மெய்யெண்களின் கூடுதல், கழித்தல் மற்றும் பெருக்கல் மீண்டும் ஒரு மெய் எண்ணாகும்.
- ஒரு மெய்யெண்ணை, பூச்சியமல்லாத மெய்யெண்ணால் வகுக்கக் கிடைப்பது ஒரு மெய்யெண்ணாகும்.
- விகிதமுறு எண்களைப்போலவே மெய்யெண்களும் அடைப்புவிதி, சேர்ப்புவிதி, பரிமாற்று விதி, கூட்டல் மற்றும் பெருக்கலின் கீழ் பங்கீட்டு விதிகளை நிறைவு செய்கின்றன.
- ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் அதனுடைய எதிர்மறை மெய்யெண்ணைப் பெற்றுள்ளது. பூச்சியம் தனக்குத்தானே எதிர் மறையாகும். மேலும் பூச்சியம் என்பது குறைஎண்ணும் அல்ல மிகைஎண்ணும் அல்ல.

இரு விகிதமுறு எண்களின் கூடுதல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் (பூச்சியத்தால் வகுப்பதை தவிர) ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும். இருப்பினும், இரு விகிதமுறா எண்களின் கூடுதல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் சில நேரங்களில் விகிதமுறு எண்ணாக மாறும்.

விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்கள் தொடர்பான சில உண்மைகளைக் காண்போம்.

முக்கிய கருத்து
1. ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் இவற்றின் கூடுதல் அல்லது கழித்தல் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.
2. ஒரு பூச்சியமற்ற விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் இவற்றின் பெருக்கல் அல்லது வகுத்தல் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.
3. இரண்டு விகிதமுறா எண்களின் கூடுதல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும் எனக் கூறமுடியாது. இது விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கலாம்.

குறிப்புரை

a ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் $\sqrt{b}$ ஒரு விகிமுறா எண் எனில்,

(i) $a+\sqrt{b}$ ஒரு விகிதமுறா எண் (ii) $a-\sqrt{b}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

(iii) $a\sqrt{b}$ ஒரு விகிதமுறா எண் (iv) $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

(v) $\dfrac{\sqrt{b}}{a}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

எடுத்துக்காட்டாக, (i) $2+\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண் (ii) $2-\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

(iii) $2\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண் (iv) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

2.4.4 மெய்யெண்களின் வர்க்கமூலம்

$a > 0$ ஒரு மெய்யெண் என்க. $\sqrt{a} = b$ என்பதின் பொருள் $b^2 = a$ மற்றும் $b > 0$ என்பதாகும்.

$2 \times 2 = 4$ என்பதால் 2 என்பது 4-ன் ஒரு வர்க்க மூலமாகும். ஆனால் $(-2)\times(-2)=4$ என்பதால் -2 என்பதும் 4-ன் ஒரு வர்க்க மூலமாகும். இவ்விரண்டுக்கும் இடையே உள்ள குழப்பத்தைத் தவிர்க்க, $\sqrt{}$ என்ற குறியீடு முதன்மை அல்லது மிகை வர்க்க மூலத்தை குறிக்கிறது என வரையறுப்போம்.

இனி வர்க்க மூலம் தொடர்பான சில பயனுள்ள முற்றொருமைகளைக் குறிப்பிடுவோம்.

a, b என்பன மிகை மெய்யெண்கள் எனில்,	
1	$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
2	$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
3	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$
4	$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2-b$
5	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{d}) = \sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$
6	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$

எடுத்துக்காட்டு 2.10

இரண்டு விகிதமுறா எண்களை, அவற்றின்

(i) கூடுதல் ஒரு விகிதமுறா எண்

(ii) கூடுதல் ஒரு விகிதமுறா எண் அல்ல

(iii) கழித்தல் ஒரு விகிதமுறா எண்

(iv) கழித்தல் ஒரு விகிதமுறா எண் அல்ல

(v) பெருக்கல் ஒரு விகிதமுறா எண்

(vi) பெருக்கல் ஒரு விகிதமுறா எண் அல்ல

(vii) வகுத்தல் ஒரு விகிதமுறா எண்

(viii) வகுத்தல் ஒரு விகிதமுறா எண் அல்ல

என்றிருக்குமாறு காண்க.

தீர்வு

(i) $2+\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{3}-2$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் கூடுதல் $2+\sqrt{3}+\sqrt{3}-2=2\sqrt{3}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

(ii) $\sqrt{2}$ மற்றும் $-\sqrt{2}$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் கூடுதல் $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

(iii) $\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{2}$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் கழித்தல் $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

(iv) $5+\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{3}-5$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் கழித்தல் $(5+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-5)=10$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

(v) $\sqrt{3}$ மற்றும் $\sqrt{5}$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் பெருக்கல் $\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

(vi) $\sqrt{18}$ மற்றும் $\sqrt{2}$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் பெருக்கல் $\sqrt{18}\times\sqrt{2}=\sqrt{36}=6$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

(vii) $\sqrt{15}$ மற்றும் $\sqrt{3}$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் வகுத்தல் $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{15}{3}}=\sqrt{5}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

(viii) $\sqrt{75}$ மற்றும் $\sqrt{3}$ என்ற இரண்டு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்க.

அவற்றின் வகுத்தல் $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{75}{3}}=5$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

2.5 விகிதமுறா மூலங்கள் (Surds)

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ என்பன விகிதமுறா எண்கள் என்பதை நாமறிவோம். இவற்றை எந்தவொரு விகிதமுறு எண்ணின் வர்க்கங்களாகவும் எழுத முடியாது. $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{7}$ என்பன விகிதமுறு எண்களின் கனமூலங்கள். இவற்றை எந்தவொரு விகிதமுறு எண்ணின் கனங்களாகவும் எழுதமுடியாது. இவ்வகை விகிதமுறா எண்கள் விகிதமுறா மூலங்கள் (surds or radicals) எனப்படும்.

முக்கிய கருத்து **விகிதமுறா மூலங்கள்**

'a' ஒரு மிகை விகிதமுறு எண் மற்றும் n ஒரு மிகைமுழு என்க. $\sqrt[n]{a}$ ஒரு விகிதமுறா எண் எனில், $\sqrt[n]{a}$ என்பது விகிதமுறா மூலம் எனப்படும்.

குறியீட்டைப் படித்தல்

ஒரு விகிதமுறா மூலத்தின் பொது வடிவம் $\sqrt[n]{a}$

$\sqrt{\ }$ என்பது *மூலக்குறியீடு*

n என்பது மூலத்தின் *வரிசை*

a என்பது *அடிமானம்* எனப்படும்.

வரிசை

மூலக்குறியீடு

$\sqrt[n]{a}$

அடிமானம்

2.5.1 விகிதமுறா மூலத்தின் அடுக்குக்குறி வடிவம்

நினைவு கூர்ந்து விடையளி !
$a^{\frac{1}{3}}$ மற்றும் a^3 இரண்டும் வெவ்வேறானவை ஏன் ?

$\sqrt[n]{a}$ என்ற விகிதமுறா மூலத்தின் அடுக்குக்குறி வடிவம் $a^{\frac{1}{n}}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt[5]{8}$ என்பதன் அடுக்குக்குறிவடிவம் $(8)^{\frac{1}{5}}$ ஆகும்.

சில விகிதமுறா மூலங்களின் அடுக்குக்குறி வடிவம், வரிசை மற்றும் அடிமானம் ஆகியவை பின்வரும் அட்டவனையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

விகிதமுறா மூலம்	அடுக்குக்குறி வடிவம்	வரிசை	அடிமானம்
$\sqrt{5}$	$5^{\frac{1}{2}}$	2	5
$\sqrt[3]{14}$	$(14)^{\frac{1}{3}}$	3	14
$\sqrt[4]{7}$	$7^{\frac{1}{4}}$	4	7
$\sqrt{50}$	$(50)^{\frac{1}{2}}$	2	50
$\sqrt[5]{11}$	$(11)^{\frac{1}{5}}$	5	11

குறிப்புரை

$\sqrt[n]{a}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா மூலம் எனில்

(i) a என்பது ஒரு மிகை விகிதமுறு எண்ணாகும்.

(ii) $\sqrt[n]{a}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

பின்வரும் அட்டவணையில் A மற்றும் B ஆகிய இரண்டு நிரல்களிலும் உள்ள எண்கள் விகிதமுறா எண்களாகும்.

A	B
$\sqrt{5}$	$\sqrt{2+\sqrt{3}}$
$\sqrt[3]{7}$	$\sqrt[3]{5+\sqrt{7}}$
$\sqrt[3]{100}$	$\sqrt[3]{10-\sqrt[3]{3}}$
$\sqrt{12}$	$\sqrt[4]{15+\sqrt{5}}$

மேற்கண்ட அட்டவணையில் A என்ற நிரலில் உள்ள எண்கள் விகித முறா மூலங்களாகும். B என்ற நிரலில் உள்ள எண்கள் விகிதமுறா எண்கள். ஆனால், விகிதமுறா மூலங்கள் அல்ல.

ஆகவே, ஒவ்வொரு விகிதமுறா மூலமும் விகிதமுறா எண்ணாகும், ஆனால், ஒவ்வொரு விகிதமுறா எண்ணும் ஒரு விகிதமுறா மூலமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

2.5.2 ஒரு விகிதமுறா மூலத்தை எளிய வடிவில்(Simplest Form) எழுதுதல்

ஒரு விகிதமுறா மூலத்தை அதன் எளிய வடிவமாக சுருக்கி எழுதமுடியும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{50}$ என்ற விகிதமுறா மூலத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\sqrt{50} = \sqrt{25\times 2} = \sqrt{25}\,\sqrt{2} = \sqrt{5^2}\,\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

ஆகவே, $5\sqrt{2}$ என்பது $\sqrt{50}$ன் எளிய வடிவமாகும்.

2.5.3 ஒத்த மற்றும் ஒவ்வா விகிதமுறா மூலங்கள் (Like and Unlike Surds)

எளிய வடிவில் உள்ள இரண்டு விகிதமுறா மூலங்களின் வரிசை மற்றும் அடிமானம் சமம் எனில், அவை ஒத்த விகிதமுறா மூலங்கள் (like surds) எனப்படும். அவ்வாறு இல்லையெனில், அவை ஒவ்வா விகிதமுறா மூலங்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$, $-6\sqrt{5}$ என்பன ஒத்த விகிதமுறா மூலங்கள்.

(ii) $\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[3]{81}$ என்பன ஒவ்வா விகிதமுறா மூலங்கள்.

2.5.4 முழுமையான விகிதமுறா மூலங்கள் (Pure Surds)

ஒரு விகிதமுறா மூலத்தின் விகிதமுறு எண் குணகம் அல்லது கெழு 1 எனில், அது முழுமையான விகிதமுறா மூலம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{12}$, $\sqrt{80}$ என்பன முழுமையான விகிதமுறா மூலங்களாகும்.

2.5.5 கலப்பு விகிதமுறா மூலங்கள் (Mixed Surds)

ஒரு விகிதமுறா மூலத்தின் குணகம் அல்லது கெழு 1-ஐத் தவிர வேறு விகிதமுறு எண்ணாக இருப்பின், அது கலப்பு விகிதமுறா மூலம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $2\sqrt{3}$, $5\sqrt[3]{5}$, $3\sqrt[4]{12}$ என்பன கலப்பு விகிதமுறா மூலங்களாகும்.

ஒரு கலப்பு விகிதமுறா மூலத்தை முழுமையான விகிதமுறா மூலமாக மாற்றலாம், ஆனால், அனைத்து முழுமையான விகிதமுறா மூலங்களையும் கலப்பு விகிதமுறா மூலங்களாக மாற்ற முடியாது.

(i) $\sqrt{80} = \sqrt{16\times5} = 4\sqrt{5}$ (ii) $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2\times2} = \sqrt{9\times2} = \sqrt{18}$

(iii) $\sqrt{17}$ ஒரு முழுமையான விகிதமுறா மூலம். ஆனால், இதனை கலப்பு விகிதமுறா மூலமாக மாற்ற இயலாது.

மூலக்குறியீட்டு விதிகள்
m, n என்பன மிகை முழுக்கள் மற்றும் a, b என்பன மிகை விகிதமுறு எண்கள் எனில்,
(i) $(\sqrt[n]{a})^n = a = \sqrt[n]{a^n}$ (ii) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
(iii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ (iv) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(i) ஐப் பயன்படுத்தி $(\sqrt{a})^2 = a$, $\sqrt[3]{a^3} = (\sqrt[3]{a})^3 = a$ எனப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.11

பின்வரும் விகிதமுறா மூலங்களை அடுக்குக்குறி வடிவில் எழுதுக.

(i) $\sqrt{7}$ (ii) $\sqrt[4]{8}$ (iii) $\sqrt[3]{6}$ (iv) $\sqrt[8]{12}$

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறா மூலங்களை அடுக்குக் குறிவடிவில் பின்வருமாறு எழுதுகிறோம்.

(i) $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$ (ii) $\sqrt[4]{8} = 8^{\frac{1}{4}}$ (iii) $\sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}$ (iv) $\sqrt[8]{12} = (12)^{\frac{1}{8}}$

எடுத்துக்காட்டு 2.12

பின்வரும் விகிதமுறா மூலங்களை எளிய வடிவில் எழுதுக.

(i) $\sqrt[3]{32}$ (ii) $\sqrt{63}$ (iii) $\sqrt{243}$ (iv) $\sqrt[3]{256}$

தீர்வு

(i) $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8\times4} = \sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$

(ii) $\sqrt{63} = \sqrt{9\times7} = \sqrt{9}\times\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

(iii) $\sqrt{243} = \sqrt{81\times3} = \sqrt{81}\times\sqrt{3} = \sqrt{9^2}\times\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

(iv) $\sqrt[3]{256} = \sqrt[3]{64\times4} = \sqrt[3]{64}\times\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4^3}\times\sqrt[3]{4} = 4\sqrt[3]{4}$

எடுத்துக்காட்டு 2.13

பின்வரும் கலப்பு விகிதமுறா மூலங்களை முழுமையான விகிதமுறா மூலங்களாக எழுதுக.

(i) $16\sqrt{2}$ (ii) $3\sqrt[3]{2}$ (iii) $2\sqrt[4]{5}$ (iv) $6\sqrt{3}$

தீர்வு

(i) $16\sqrt{2} = \sqrt{16^2} \times \sqrt{2}$ $\quad (\because 16 = \sqrt{16^2})$

$= \sqrt{16^2 \times 2} = \sqrt{256 \times 2} = \sqrt{512}$

(ii) $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \times 2}$ $\quad (\because 3 = \sqrt[3]{3^3})$

$= \sqrt[3]{27 \times 2} = \sqrt[3]{54}$

(iii) $2\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{2^4 \times 5}$ $\quad (\because 2 = \sqrt[4]{2^4})$

$= \sqrt[4]{16 \times 5} = \sqrt[4]{80}$

(iv) $6\sqrt{3} = \sqrt{6^2 \times 3}$ $\quad (\because 6 = \sqrt{6^2})$

$= \sqrt{36 \times 3} = \sqrt{108}$

எடுத்துக்காட்டு 2.14

$\sqrt{32}$ என்பது விகிதமுறு எண்ணா அல்லது விகிதமுறா எண்ணா எனக் காண்க.

தீர்வு $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$

4 ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண்

$\therefore 4\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறா எண். அதாவது $\sqrt{32}$ ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.15

பின்வரும் எண்கள் விகிதமுறு எண்களா அல்லது விகிதமுறா எண்களா எனக் காண்க.

(i) $3 + \sqrt{3}$ (ii) $(4 + \sqrt{2}) - (4 - \sqrt{3})$ (iii) $\dfrac{\sqrt{18}}{2\sqrt{2}}$ (iv) $\sqrt{19} - (2 + \sqrt{19})$

(v) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (vi) $\sqrt{12} \times \sqrt{3}$

தீர்வு (i) $3 + \sqrt{3}$

3 ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் $\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண். எனவே, $3 + \sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

(ii) $(4 + \sqrt{2}) - (4 - \sqrt{3})$

$= 4 + \sqrt{2} - 4 + \sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, ஒரு விகிதமுறா எண்.

(iii) $\dfrac{\sqrt{18}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{9 \times 2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{9} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2}$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

(iv) $\sqrt{19} - (2 + \sqrt{19}) = \sqrt{19} - 2 - \sqrt{19} = -2$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

(v) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ இங்கு 2 ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் $\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண். ஆகவே, $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ஒரு விகிதமுறா எண்.

(vi) $\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = 6$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

2.6 விகிதமுறா மூலங்களின் மீதான நான்கு அடிப்படைச் செயல்கள்

2.6.1 விகிதமுறா மூலங்களின் கூட்டலும் கழித்தலும்

ஒத்த விகிதமுறா மூலங்களை கூட்டவும் கழிக்கவும் முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.16

சுருக்குக :

(i) $10\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{32}$

(ii) $\sqrt{48} - 3\sqrt{72} - \sqrt{27} + 5\sqrt{18}$

(iii) $\sqrt[3]{16} + 8\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128}$

தீர்வு

(i) $10\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{32}$

$$= 10\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{16\times 2}$$

$$= 10\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4\times 4\times\sqrt{2}$$

$$= (10-2+16)\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$$

(ii) $\sqrt{48} - 3\sqrt{72} - \sqrt{27} + 5\sqrt{18}$

$$= \sqrt{16\times 3} - 3\sqrt{36\times 2} - \sqrt{9\times 3} + 5\sqrt{9\times 2}$$

$$= \sqrt{16}\sqrt{3} - 3\sqrt{36}\sqrt{2} - \sqrt{9}\sqrt{3} + 5\sqrt{9}\sqrt{2}$$

$$= 4\sqrt{3} - 18\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 15\sqrt{2}$$

$$= (-18+15)\sqrt{2} + (4-3)\sqrt{3} = -3\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

(iii) $\sqrt[3]{16} + 8\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128}$

$$= \sqrt[3]{8\times 2} + 8\sqrt[3]{27\times 2} - \sqrt[3]{64\times 2}$$

$$= \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{2} + 8\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{64}\sqrt[3]{2}$$

$$= 2\sqrt[3]{2} + 8\times 3\times\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2}$$

$$= 2\sqrt[3]{2} + 24\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2}$$

$$= (2+24-4)\sqrt[3]{2} = 22\sqrt[3]{2}$$

2.6.2 விகிதமுறா எண்களின் பெருக்கல்

இரண்டு ஒத்த விகிதமுறா மூலங்களின் பெருக்கற்பலனைக் காண பின்வரும் விதியைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.17

சுருக்குக : (i) $\sqrt[3]{13} \times \sqrt[3]{5}$ (ii) $\sqrt[4]{32} \times \sqrt[4]{8}$

தீர்வு

(i) $\sqrt[3]{13} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{13 \times 5} = \sqrt[3]{65}$

(ii) $\sqrt[4]{32} \times \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{32 \times 8}$

$= \sqrt[4]{2^5 \times 2^3} = \sqrt[4]{2^8} = \sqrt[4]{2^4 \times 2^4} = 2 \times 2 = 4$

2.6.3 விகிதமுறா மூலங்களின் வகுத்தல்

ஒத்த விகிதமுறா மூலங்களின் வகுத்தலை பின்வரும் விதியைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.18

சுருக்குக : (i) $15\sqrt{54} \div 3\sqrt{6}$ (ii) $\sqrt[3]{128} \div \sqrt[3]{64}$

தீர்வு

(i) $15\sqrt{54} \div 3\sqrt{6}$

$$= \frac{15\sqrt{54}}{3\sqrt{6}} = 5\sqrt{\frac{54}{6}} = 5\sqrt{9} = \quad 5 \times 3 = 15$$

(ii) $\sqrt[3]{128} \div \sqrt[3]{64}$

$$= \frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\frac{128}{64}} = \sqrt[3]{2}$$

குறிப்பு விகிதமுறா மூலங்களின் வரிசைகள் வெவ்வேறாக இருப்பின், அவற்றை ஒரேவரிசை கொண்ட விகிமுறா மூலங்களாக மாற்றிய பின்னர் பெருக்கல் அல்லது வகுத்தல் செயலை மேற்கொள்ள வேண்டும்.

முடிவு: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{a^{\frac{m}{n}}}$

எடுத்துக்காட்டாக, (i) $\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^{\frac{12}{3}}} = \sqrt[12]{5^4}$ (ii) $\sqrt[4]{11} = \sqrt[8]{11^{\frac{8}{4}}} = \sqrt[8]{11^2}$

2.6.4 விகிதமுறா மூலங்களை ஒப்பிடுதல்

ஒரே வரிசை கொண்ட விகிமுறா எண்களை ஒப்பிட முடியும். ஒரே வரிசை கொண்ட விகிதமுறா எண்களில் மிகப்பெரிய அடிமானம் கொண்ட விகிதமுறா எண் பெரியது ஆகும்.

விகிதமுறா எண்களின் வரிசைகள் சமமில்லை எனில், அவற்றின் வரிசைகளை சமப்படுத்திய பிறகு அடிமானங்களை ஒப்பிட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.19

$\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$ என்ற விகிதமுறா எண்களின் வரிசைகளை சமமாக்குக.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறா எண்களின் வரிசைகள் 2, 3 மற்றும் 4.

2, 3 மற்றும் 4-ன் மீ. சி. ம 12. எனவே, ஒவ்வொரு விகிதமுறா எண்ணையும் வரிசை 12 கொண்ட விகிதமுறா எண்ணாக மாற்றுவோம்.

$$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.20

எது பெரியது ? $\sqrt[4]{5}$ அல்லது $\sqrt[3]{4}$

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறா எண்களின் வரிசைகள் 3 மற்றும் 4.

கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறா எண்கள் ஒவ்வொன்றையும் சம வரிசை கொண்ட விகிதமுறா எண்களாக மாற்ற வேண்டும்.

3 மற்றும் 4 இவற்றின் மீ.சி.ம 12. எனவே, ஒவ்வொரு விகிதமுறா எண்ணையும் வரிசை 12 கொண்ட விகிதமுறா எண்ணாக மாற்றுவோம்.

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$$

$$\therefore \sqrt[12]{256} > \sqrt[12]{125} \quad \Rightarrow \sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.21

$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt{3}$ என்ற விகிதமுறா எண்களை

(i) ஏறுவரிசையில் எழுதுக (ii) இறங்கு வரிசையில் எழுதுக.

தீர்வு $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{4}$ and $\sqrt{3}$ என்ற விகிதமுறா எண்களின் வரிசைகள் முறையே 3, 4 மற்றும் 2.

2, 3 மற்றும் 4-ன் மீ.சி.ம 12.

எனவே, ஒவ்வொரு விகிதமுறா எண்ணையும் வரிசை 12 கொண்ட விகிதமுறா எண்ணாக மாற்றுவோம்.

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}$$

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{4^3} = \sqrt[12]{64}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$

$\therefore$ ஏறுவரிசை: $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{4}, \sqrt{3}$ இறங்குவரிசை: $\sqrt{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[3]{2}$.

பயிற்சி 2.5

1. பின்வருவனவற்றுள் எவை விகிதமுறா மூலங்கள் மற்றும் எவை விகிதமுறா மூலங்கள் அல்ல என்பதைக் காரணத்துடன் கூறுக.

   (i) $\sqrt{8}\times\sqrt{6}$ (ii) $\sqrt{90}$ (iii) $\sqrt{180}\times\sqrt{5}$ (iv) $4\sqrt{5}\div\sqrt{8}$ (v) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}$

2. சுருக்குக.

   (i) $(10+\sqrt{3})(2+\sqrt{5})$ (ii) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$

   (iii) $(\sqrt{13}-\sqrt{2})(\sqrt{13}+\sqrt{2})$ (iv) $(8+\sqrt{3})(8-\sqrt{3})$

3. பின்வருவனவற்றை சுருக்குக.

   (i) $5\sqrt{75}+8\sqrt{108}-\frac{1}{2}\sqrt{48}$ (ii) $7\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}$

   (iii) $4\sqrt{72}-\sqrt{50}-7\sqrt{128}$ (iv) $2\sqrt[3]{40}+3\sqrt[3]{625}-4\sqrt[3]{320}$

4. பின்வரும் விகிதமுறா மூலங்களை எளிய வடிவில் எழுதுக.

   (i) $\sqrt[3]{108}$ (ii) $\sqrt{98}$ (iii) $\sqrt{192}$ (iv) $\sqrt[3]{625}$

5. பின்வருவனவற்றை முழுமையான விகிதமுறா மூலங்களாக எழுதுக.

   (i) $6\sqrt{5}$ (ii) $5\sqrt[3]{4}$ (iii) $3\sqrt[4]{5}$ (iv) $\frac{3}{4}\sqrt{8}$

6. பின்வருவனவற்றைச் சுருக்குக.

   (i) $\sqrt{5}\times\sqrt{18}$ (ii) $\sqrt[3]{7}\times\sqrt[3]{8}$ (iii) $\sqrt[4]{8}\times\sqrt[4]{12}$ (iv) $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{5}$

   (v) $3\sqrt{35}\div2\sqrt{7}$ (vi) $\sqrt[4]{48}\div\sqrt[8]{72}$

7. பின்வருவனவற்றில் எது பெரியது?

   (i) $\sqrt{2}$ அல்லது $\sqrt[3]{3}$ (ii) $\sqrt[3]{3}$ அல்லது $\sqrt[4]{4}$ (iii) $\sqrt{3}$ அல்லது $\sqrt[4]{10}$

8. இறங்குவரிசை மற்றும் ஏறுவரிசையில் எழுதுக.

   (i) $\sqrt[4]{5},\sqrt{3},\sqrt[3]{4}$ (ii) $\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4},\sqrt[4]{4}$ (iii) $\sqrt[3]{2},\sqrt[9]{4},\sqrt[6]{3}$

2.7 விகிதமுறா மூலங்களின் பகுதியை விகிதப்படுத்துதல்

விகிதப்படுத்தும் காரணி

ஒரு கோவையின் பகுதியில் உள்ள உறுப்பு வர்க்கமூல அல்லது மூலக்குறியீட்டுக்குள் உள்ள மிகை எண்ணாக இருப்பின் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக்கி சமமான கோவையாக மாற்றும் முறை, பகுதியை விகிதப்படுத்தும் முறை எனப்படும்.

இரண்டு விகிதமுறா எண்களின் பெருக்கல் ஒரு விகிதமுறு எண் எனில், ஒன்று மற்றொன்றின் விகிதப்படுத்தும் காரணி (rationalizing factor) ஆகும்.

குறிப்புரை a, b என்பன முழுக்கள் மற்றும் x, y என்பன மிகை முழுக்கள் என்க. பிறகு

(i) $(a+\sqrt{x})$ மற்றும் $(a-\sqrt{x})$ என்பன ஒன்றுக் கொன்று விகிதப்படுத்தும் காரணிகளாகும்.

(ii) $(a+b\sqrt{x})$ மற்றும் $(a-b\sqrt{x})$ என்பன ஒன்றுக் கொன்று விகிதப்படுத்தும் காரணிகளாகும்.

(iii) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ மற்றும் $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ என்பன ஒன்றுக் கொன்று விகிதப்படுத்தும் காரணிகளாகும்.

(iv) $a+\sqrt{b}$ என்பது $a-\sqrt{b}$-ன் இணை அல்லது துணையிய (conjugate) எண் எனவும் அழைக்கப்படும். இதேபோல் $a-\sqrt{b}$ ன் இணை எண் $a+\sqrt{b}$ ஆகும்.

(v) ஒரு எண்ணின் பகுதியை விகிதப்படுத்த, அவ்வெண்ணின் தொகுதி மற்றும் பகுதிகளை விகிதப்படுத்தும் காரணியால் பெருக்க வேண்டும்.

(vi) ஒரு விகிதமுறா மூலத்திற்கு ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விகிதப்படுத்தும் காரணிகள் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.22

$\frac{2}{\sqrt{3}}$-ன் பகுதியை விகிதப்படுத்துக.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட எண்ணின் பகுதி மற்றும் தொகுதியை $\sqrt{3}$ ஆல் பெருக்க

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.23

$\frac{1}{5+\sqrt{3}}$-ன் பகுதியை விகிதப்படுத்துக.

தீர்வு பகுதியில் உள்ள எண் $5+\sqrt{3}$. இதன் இணை எண் அல்லது விகிதப்படுத்தும் காரணி $5-\sqrt{3}$.

$$\frac{1}{5+\sqrt{3}} = \frac{1}{5+\sqrt{3}}\times\frac{5-\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5-\sqrt{3}}{5^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{5-\sqrt{3}}{25-3} = \frac{5-\sqrt{3}}{22}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.24

$\frac{1}{8-2\sqrt{5}}$-ன் பகுதியை விகிதப்படுத்தி சுருக்குக.

தீர்வு பகுதியில் உள்ள எண் $8-2\sqrt{5}$. எனவே, இதன் விகிதப்படுத்தும் காரணி $8+2\sqrt{5}$ ஆகும்.

$$\frac{1}{8-2\sqrt{5}} = \frac{1}{8-2\sqrt{5}}\times\frac{8+2\sqrt{5}}{8+2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{8+2\sqrt{5}}{8^2-(2\sqrt{5})^2} = \frac{8+2\sqrt{5}}{64-20}$$

$$= \frac{8+2\sqrt{5}}{44} = \frac{2(4+\sqrt{5})}{44} = \frac{4+\sqrt{5}}{22}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.25

$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ -ன் பகுதியை விகிதப்படுத்தி சுருக்குக.

தீர்வு பகுதியில் உள்ள எண் $\sqrt{3}+\sqrt{5}$. எனவே, இதன் விகிதப்படுத்தும் காரணி $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ ஆகும்.

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} \quad = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2} \quad = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.26

$\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}+\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1} = a+b\sqrt{7}$ எனில், a மற்றும் b இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$$\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}+\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}\times\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}-1}+\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1}\times\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{7}-1)^2}{(\sqrt{7})^2-1}+\frac{(\sqrt{7}+1)^2}{(\sqrt{7})^2-1}$$

$$= \frac{7+1-2\sqrt{7}}{7-1}+\frac{7+1+2\sqrt{7}}{7-1}$$

$$= \frac{8-2\sqrt{7}}{6}+\frac{8+2\sqrt{7}}{6}$$

$$= \frac{8-2\sqrt{7}+8+2\sqrt{7}}{6}$$

$$= \frac{16}{6} = \frac{8}{3}+0(\sqrt{7})$$

$$\therefore \frac{8}{3}+0(\sqrt{7}) = a+b\sqrt{7} \implies a = \frac{8}{3},\ b = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.27

$x = 1+\sqrt{2}$ எனில், $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$x = 1+\sqrt{2}$$

$$\implies \frac{1}{x} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{2}}\times\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} \quad = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} \quad = -(1-\sqrt{2})$$

$$\therefore\ x - \frac{1}{x} = (1+\sqrt{2}) - \{-(1-\sqrt{2})\}$$

$$= 1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2} \quad = 2$$

எனவே, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 2^2 = 4.$

பயிற்சி 2.6

1. பின்வருவனவற்றின் விகிதப்படுத்தும் காரணிகளைக் காண்க.

(i) $3\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{7}$ (iii) $\sqrt{75}$ (iv) $2\sqrt[3]{5}$

(v) $5-4\sqrt{3}$ (vi) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (vii) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ (viii) $2+\sqrt{3}$

2. பின்வருவனவற்றின் பகுதிகளை விகிதப்படுத்துக.

(i) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{12}}$ (iv) $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$ (v) $\frac{3\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{9}}$

3. பகுதியை விகிதப்படுத்தி சுருக்குக.

(i) $\frac{1}{11+\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{1}{9+3\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{13}}$ (iv) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ (v) $\frac{3-\sqrt{3}}{2+5\sqrt{3}}$

4. $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{10} \approx 3.162$ எனில், பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளை 3 தசம இடத்திருத்தமாகக் காண்க.

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ (iv) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

(v) $\frac{3-\sqrt{5}}{3+2\sqrt{5}}$ (vi) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ (vii) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ (viii) $\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{5}}$

5. $\frac{5+\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}} = a+b\sqrt{6}$ எனில், a மற்றும் b இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

6. $\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4-2\sqrt{3}} = a+b\sqrt{3}$ எனில், a மற்றும் b இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

7. $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = a+b\sqrt{5}$ எனில், a மற்றும் b இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

8. $\frac{4+\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}} - \frac{4-\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}} = a+b\sqrt{5}$ எனில், a மற்றும் b இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

9. $x = 2+\sqrt{3}$ எனில், $x^2+\frac{1}{x^2}$ -ன் மதிப்புக் காண்க.

10. $x = \sqrt{3}+1$ எனில், $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2$-ன் மதிப்புக் காண்க.

2.8 வகுத்தல் விதிமுறை (Division Algorithm)

ஒரு கணக்கின் தீர்வு காண பயன்படும் நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியான படிகள் விதிமுறை அல்லது வழிமுறை (algorithm) எனப்படும். இப்பாடப்பகுதியில் வகுத்தல் விதிமுறை எனப்படும் முழுக்களின் மிக முக்கியமான பண்பினைக் காணலாம்.

ஒரு முழுவை பூச்சியமற்ற மற்றொரு முழுவால் வகுக்கும் போது, ஒரு முழுவை ஈவாகவும் மற்றொரு முழுவை மீதியாகவும் பெறுகிறோம் என்பதை முன் வகுப்புகளில் அறிந்துள்ளோம். எனவே,

$$\text{பின்னம்} = \text{ஈவு} + \frac{\text{மீதி}}{\text{வகுஎண்}}$$

எடுத்துக்காட்டாக,
$$\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5} \qquad (1)$$

இந்த வகுத்தலை, வகுத்தல் செயலை கணக்கில் கொள்ளாமல் முழுக்களை உறுப்புகளாகக் கொண்டு பின்வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$13 = 5(2) + 3$

இக்கோவையானது, (1)ஐ வகு எண் 5ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் கிடைக்கிறது. இம்மாதிரி எழுதப்படும் முழுக்களின் வகுத்தலை வகுத்தல் விதி முறை (Division Algorithm) என்கிறோம்.

a மற்றும் b என்பன ஏதேனும் இரண்டு மிகை முழுக்கள் எனில், $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ என்றவாறு q மற்றும் r என்ற இரண்டு குறையற்ற முழுக்கள் இருக்கும்.

மேற்கண்ட கூற்றில் q அல்லது r பூச்சியமாகவும் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.28

வகுத்தல் விதி முறையைப் பயன்படுத்தி, பின்வரும் சோடிகளின் ஈவு மற்றும் மீதிகாண்க.

(i) 19, 5 (ii) 3, 13 (iii) 30, 6

தீர்வு

(i) 19, 5

கொடுக்கப்பட்ட சோடியை $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ வடிவத்தில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$19 = 5(3) + 4$ [19ஐ 5ஆல் வகுக்க ஈவு 3, மீதி 4 கிடைக்கிறது]

$\therefore$ ஈவு = 3; மீதி = 4

(ii) 3, 13

கொடுக்கப்பட்ட சோடியை $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ வடிவத்தில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$3 = 13(0) + 3$

$\therefore$ ஈவு = 0; மீதி = 3

(iii) 30, 6

கொடுக்கப்பட்ட சோடியை 30, 6ஐ $a = bq + r,\ 0 \le r < b$ வடிவத்தில் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

30 = 6(5) + 0 [30ஐ 6ஆல் வகுக்க ஈவு 5, மீதி 0 கிடைக்கிறது]

$\therefore$ ஈவு = 5; மீதி = 0

பயிற்சி 2.7

1. வகுத்தல் விதிமுறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் சோடிகளின் ஈவு மற்றும் மீதி காண்க.

(i) 10, 3 (ii) 5, 12 (iii) 27, 3

நினைவில் கொள்க

- $\frac{p}{q},\ q \neq 0$ என்ற வடிவில் உள்ள எண்ணின் தசம விரிவானது முடிவு பெறும் எனில், $\frac{p}{q}$ -ன் தசம விரிவு முடிவுறு தசமவிரிவு (Terminating decimal expansion) எனப்படும். முடிவுறு தசம விரிவினைக்கொண்ட எண் முடிவுறு தசம எண் எனப்படும்.
- $\frac{p}{q},\ q \neq 0$ என்ற எண்ணின் தசம விரிவு காணும் போது எந்நிலையிலும் மீதி பூச்சியமாகவில்லை எனில், ஈவில் மீண்டும் மீண்டும் வரும் இலக்கங்களின் தொகுதி கிடைக்கும். இந்நிலையில் $\frac{p}{q}$-ன் தசம விரிவு முடிவுறா சுழல் தசம விரிவு அல்லது முடிவுறா மீள்வரு தசம விரிவு (Non-terminating and recurring decimal expansion) எனப்படும். முடிவுறா சுழல் தசம விரிவினைக் கொண்ட எண் முடிவுறா சுழல் தசம எண் எனப்படும்.
- ஒரு விகிதமுறு எண்ணினை முடிவுறு தசம விரிவாகவோ அல்லது முடிவுறா சுழல் தசம விரிவாகவோ குறிப்பிடலாம்.
- $\frac{p}{q},\ q \neq 0$ வடிவில் உள்ள விகிதமுறு எண்ணை $\frac{p}{2^m \times 5^n},\ (p \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $m, n \in \mathbb{W})$ என்ற வடிவில் எழுத முடியுமானால், அந்த விகிதமுறு எண் முடிவுறு தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்கும். அவ்வாறில்லையெனில், அந்த விகிதமுறு எண் முடிவுறா சுழல் தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்கும்.
- முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவினை கொண்ட எண் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும். எனவே, ஒரு விகிதமுறா எண்ணை $\frac{p}{q}$, (இங்கு p, q முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$) என்ற வடிவில் எழுதமுடியாது.
- மெய்யெண்களின் கணமானது விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் சேர்ப்புக் கணமாகும்.

- ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கும்.
- ஒருமெய்யெண் விகிதமுறு எண் அல்ல எனில், அது ஒரு விகிமுறா எண்ணாகும்.
- ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் இவற்றின் கூடுதல் அல்லது கழித்தல் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.
- ஒரு பூச்சியமற்ற விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் இவற்றின் பெருக்கல் அல்லது வகுத்தல் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.
- இரண்டு விகிதமுறா எண்களின் கூடுதல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும் எனக் கூறமுடியாது. இது விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கலாம்.
- 'a' ஒரு மிகை விகிதமுறு எண் மற்றும் n ஒரு மிகைமுழு என்க. $\sqrt[n]{a}$ ஒரு விகிதமுறா எண் எனில், $\sqrt[n]{a}$ என்பது விகிதமுறா மூலம் எனப்படும்.
- m, n என்பன மிகை முழுக்கள் மற்றும் a, b என்பன மிகை விகிதமுறு எண்கள் எனில்
  (i) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = \sqrt[n]{a^n}$ (ii) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
  (iii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ (iv) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- ஒரு கோவையின் பகுதியில் உள்ள உறுப்பு வர்க்கமூல அல்லது மூலக்குறியீட்டுக்குள் உள்ள மிகை எண்ணாக இருப்பின் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக்கி சமமான கோவையாக மாற்றும் முறை, பகுதியை விகிதப்படுத்தும் முறை எனப்படும்.
- இரண்டு விகிதமுறா எண்களின் பெருக்கல் ஒரு விகிதமுறு எண் எனில், ஒன்று மற்றொன்றின் விகிதப்படுத்தும் காரணி (rationalizing factor) ஆகும்.
- a மற்றும் b என்பன ஏதேனும் இரண்டு மிகை முழுக்கள் எனில், $a = bq + r,\ 0 \le r < b$ என்றவாறு q மற்றும் r என்ற இரண்டு குறையற்ற முழுக்கள் இருக்கும்.

3 மெய்யெண்கள் மீதான அறிவியல் குறியீடுகள் மற்றும் மடக்கைகள்

"Seeing there is nothing that is so troublesome to mathematical practice, nor that doth more molest and hinder calculators, than the multiplications, divisions, square and cubical extractions of great numbers....I began therefore to consider in my mind by what certain and ready art I might remove those hindrances"

- JOHN NAPIER

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- அறிவியல் குறியீடு முறையில் எண்களை குறித்தல்.
- அடுக்குக்குறி அமைப்பினையும் மடக்கை அமைப்பினையும் ஒன்றை மற்றொன்றாக மாற்றுதல்.
- மடக்கை விதிகளைப் புரிந்துக் கொள்ளுதல்.
- மடக்கை அட்டவணை மற்றும் மடக்கை விதிகளைப் பயன்படுத்துதல்.

3.1 அறிவியல் குறியீடு (*Scientific Notation*)

மிகப்பெரிய மற்றும் மிகச்சிறிய எண்களைக் கையாளும் போது அறிவியல் அறிஞர்கள், பொறியாளர்கள் மற்றும் தொழில் வல்லுநர்கள் ஆகியோர் அறிவியல் குறியீட்டினைப் பயன்படுத்துகின்றனர். ஒளியின் வேகம் வினாடிக்கு **29,900,000,000** செ.மீ., பூமியிலிருந்து சூரியனுக்குள்ள தூரம் **92,900,000** மைல்கள், எலக்ட்ரானுடைய எடை **0.000549** அணு எடை அலகுகள். இவ்வாறான எண்களைச் சுருக்கமான முறையில் குறிப்பிடலாம். இதனை அறிவியல் குறியீடு என்பர். இதன் மூலம் பூச்சியங்களை அதிக எண்ணிக்கையில் எழுதுதல் மற்றும் இடமாறுப் பிழைகளைத் தவிர்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$29{,}900{,}000{,}000 = 299\times 10^{8} = 2.99\times 10^{10}$$

$$92{,}900{,}000 = 929\times 10^{5} = 9.29\times 10^{7}$$

$$0\cdot 000549 = \frac{549}{1000000} = \frac{5.49}{10000}$$

$$= 5.49\times 10^{-4}$$

ஜான் நேப்பியர்
(1550 - 1617)

ஜான் நேப்பியர் (*John Napier*) 1550-ல் மெர்சிஸ்டான் டவர் எனும் இடத்தில் பிறந்தார். இது தற்போது அவர் பெயரிலேயே அமைந்துள்ள நேப்பியர் பல்கலைக் கழகத்தின் மெர்சிஸ்டான் வளாகத்தின் மையப்பகுதியில் உள்ளது. மடக்கையைக் கண்டுபிடித்த ஜான்நேப்பியர் கணிதத்தைப் பொழுதுபோக்கிற்காக ஆராய்ந்தவர். ஆர்க்கிமிடிசிலிருந்து தற்போதைய கணிதவல்லுநர்கள் நியூட்டன் மற்றும் ஐன்ஸ்டின் வரிசையில் ஜான் நேப்பியரும் இடம் பெறுகிறார்.

அதாவது, மிகப்பெரிய அல்லது மிகச்சிறிய எண்ணை ஒரு தசம எண் $1 \le a < 10$ மற்றும் 10-ன் முழு அடுக்கு ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனாக எழுதலாம்.

முக்கிய கருத்து **அறிவியல்குறியீடு**

ஒரு எண் N ஐ அறிவியல் குறியீட்டில் 1-லிருந்து 10-க்குள் உள்ள தசம எண் மற்றும் 10-ன் முழு அடுக்கு ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனாக எழுதலாம்.

அதாவது, $N = a \times 10^n$, இங்கு $1 \le a < 10$ மற்றும் n ஒரு முழு.

எண்களை தசமக்குறியீட்டிலிருந்து அறிவியல் குறியீட்டில் மாற்ற அடுக்குக்குறி விதிகள் அடிப்படையாய் அமைகிறது. m, n என்பன இயல் எண்கள் மற்றும் a மெய்யெண் என்க.

அடுக்குக்குறி விதிகள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்படுகின்றன.

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (பெருக்கல் விதி)

(ii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (வகுத்தல் விதி)

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (அடுக்கு விதி)

(iv) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ (சேர்க்கை விதி)

$a \ne 0$ -க்கு $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ எனவும் $a^0 = 1$ எனவும் நாம் வரையறுக்கிறோம்.

3.1.1 ஒரு எண்ணை அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதுதல்

ஒரு எண்ணை அறிவியல் குறியீட்டில் மாற்றுவதற்கான படிகள் பின்வருமாறு.

படி 1: தசமப்புள்ளியை அதன் இடதுபக்க வாக்கில் பூச்சியமற்ற ஒரே ஒரு இலக்கம் உள்ளவாறு நகர்த்து.

படி 2: பழைய மற்றும் புதிய தசமப்புள்ளிக்கு இடையே உள்ள இலக்கங்களை எண்ணுக. இது 10-ன் அடுக்கு n ஐ குறிக்கும்.

படி 3: தசமப்புள்ளி இடதுபுறம் மாறினால் அடுக்கு n ஆனது மிகை எண், தசமப்புள்ளி வலதுபுறம் மாறினால் அடுக்கு n ஆனது குறை எண்.

எடுத்துக்காட்டு 3.1

9781 ஐ அறிவியல் குறியீட்டில் குறிப்பிடுக.

தீர்வு பொதுவாக முழுக்களை எழுதும் போது தசமப்புள்ளி குறிப்பதில்லை.

9 7 8 1 .

3 2 1

தசமப்புள்ளி இடதுபுறம் மூன்று இடங்கள் பழைய நிலையிலிருந்து நகர்கிறது. எனவே 10-ன் அடுக்கு 3 ஆகும்.

$\therefore\ 9781 = 9.781 \times 10^3$

எடுத்துக்காட்டு 3.2

$0 \cdot 000432078$ ஐ அறிவியல் குறியீட்டில் குறிப்பிடுக.

தீர்வு $0\ .\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 0\ \ 7\ \ 8$

1 2 3 4

தசமப்புள்ளி வலதுபுறம் 4 இடங்கள் பழைய நிலையிலிருந்து நகர்கிறது. எனவே 10-ன் அடுக்கு –4 ஆகும்.

$\therefore\ 0.000432078 = 4.32078 \times 10^{-4}$

குறிப்புரை ஒரு எண்ணை அறிவியல் குறியீட்டில் மாற்றி எழுதும் போது, கொடுக்கப்பட்ட எண்ணில் உள்ள தசமப்புள்ளியினை இடதுபக்க வாக்கில் p இடங்கள் நகர்த்தினால் அதை ஈடுசெய்ய 10^{p} ஆல் பெருக்குகிறோம். அதேபோன்று, தசமப்புள்ளியினை வலதுபக்க வாக்கில் r இடங்கள் நகர்த்தினால் அதை ஈடு செய்ய 10^{-r} ஆல் பெருக்குகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.3

பின்வரும் எண்களை அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதுக.

(i) 9345 (ii) 205852 (iii) 3449098.96

(iv) 0.0063 (v) 0.00008035 (vi) 0.000108

தீர்வு

(i) $9345 = 9\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ . = 9.345 \times 10^{3}$, $n = 3$ ஏனெனில், தசமப்புள்ளி இடப்புறம் 3 இடங்கள் நகர்கிறது.

3 2 1

(ii) $205852 = 2\ \ 0\ \ 5\ \ 8\ \ 5\ \ 2\ . = 2.05852 \times 10^{5}$, $n = 5$ ஏனெனில், தசமப்புள்ளி இடப்புறம் 5 இடங்கள் நகர்கிறது.

5 4 3 2 1

(iii) $3449098.96 = 3\ \ 4\ \ 4\ \ 9\ \ 0\ \ 9\ \ 8\ .\ 9\ \ 6 = 3.44909896 \times 10^{6}$, $n = 6$ ஏனெனில், தசமப்புள்ளி இடப்புறம் 6 இடங்கள் நகர்கிறது.

6 5 4 3 2 1

(iv) $0.0063 = 0\ .\ 0\ \ 0\ \ 6\ \ 3 = 6.3 \times 10^{-3}$, $n = -3$ ஏனெனில், தசமப்புள்ளி வலப்புறம் 3 இடங்கள் நகர்கிறது.

1 2 3

(v) $0.00008035 = 0\ .\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 8\ \ 0\ \ 3\ \ 5 = 8.035 \times 10^{-5}$, $n = -5$ ஏனெனில், தசமப்புள்ளி வலப்புறம் 5 இடங்கள் நகர்கிறது.

1 2 3 4 5

(vi) $0.000108 = 0\ .\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 8 = 1.08 \times 10^{-4}$, $n = -4$ ஏனெனில், தசமப்புள்ளி வலப்புறம் 4 இடங்கள் நகர்கிறது.

1 2 3 4

3.2 அறிவியல் குறியீட்டை தசமக்குறியீட்டில் மாற்றுதல்

அறிவியல் குறியீட்டில் உள்ள எண்களை தசம எண்கள் வடிவத்தில் அடிக்கடி குறிக்க வேண்டியதாகிறது. அறிவியல் குறியீட்டு எண்களை தசம எண்களாக மாற்றுவதற்கான படிகள் பின்வருமாறு.

படி **1:** தசம எண்ணை எழுதுக.

படி **2:** தசமப்புள்ளியை 10-ன் அடுக்கில் உள்ள எண்ணிற்கு ஏற்ப நகர்த்து. மிகை எனில் வலப்புறமும், குறை எனில் இடப்புறமும் நகர்த்து. தேவை எனில் பூச்சியங்களை சேர்க்கவும்.

படி**3:** எண்களை தசம வடிவில் எழுதுக.

எடுத்துக்காட்டு 3.4

பின்வரும் எண்களை தசம வடிவில் எழுதுக.

(i) 5.236×10^{5} (ii) 1.72×10^{9} (iii) 6.415×10^{-6} (iv) 9.36×10^{-9}

தீர்வு

(i) 5.236

$5.236\times10^{5} = 523600$

5 . 2 3 6 0 0

1 2 3 4 5

(ii) 1.72

$1.72\times10^{9} = 1720000000$

1 . 7 2 0 0 0 0 0 0 0

1 2 3 4 5 6 7 8 9

(iii) 6.415

$6.415\times10^{-6} = 0.000006415$

0 0 0 0 0 6 . 4 1 5

6 5 4 3 2 1

(iv) 9.36

$9.36\times10^{-9} = 0.00000000936$

0 0 0 0 0 0 0 0 9 . 3 6

9 8 7 6 5 4 3 2 1

3.2.1 அறிவியல் குறியீட்டில் பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல்

மிகப்பெரிய (googolplex)அல்லது மிகச்சிறிய எண்களின் பெருக்கல் அல்லது வகுத்தலை அறிவியல் குறியீட்டில் எளிதாக செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.5

பின்வருவனவற்றை அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதுக.

(i) $(4000000)^{3}$ (ii) $(5000)^{4}\times(200)^{3}$

(iii) $(0.00003)^{5}$ (iv) $(2000)^{2}\div(0.0001)^{4}$

தீர்வு

(i) முதலில் எண்களை (அடைப்புக் குறிக்குள் உள்ளதை) அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதுக.

$$4000000 = 4.0\times10^{6}$$

இப்போது, இருபுறமும் அடுக்கு 3-க்கு உயர்த்த கிடைப்பது,

$$\therefore (4000000)^3 = (4.0\times10^6)^3 = (4.0)^3\times(10^6)^3$$
$$= 64\times10^{18} \quad = 6.4\times10^1\times10^{18} = 6.4\times10^{19}$$

(ii) அறிவியல் குறியீட்டில்,

$5000 = 5.0\times10^3$ மற்றும் $200 = 2.0\times10^2$ என எழுதலாம்.

$$\therefore (5000)^4\times(200)^3 = (5.0\times10^3)^4\times(2.0\times10^2)^3$$
$$= (5.0)^4\times(10^3)^4\times(2.0)^3\times(10^2)^3$$
$$= 625\times10^{12}\times8\times10^6 = 5000\times10^{18}$$
$$= 5.0\times10^3\times10^{18} = 5.0\times10^{21}$$

(iii) அறிவியல் குறியீட்டில், $0.00003 = 3.0\times10^{-5}$ என எழுதலாம்.

$$\therefore (0.00003)^5 = (3.0\times10^{-5})^5 = (3.0)^5\times(10^{-5})^5$$
$$= 243\times10^{-25} \quad = 2.43\times10^2\times10^{-25} = 2.43\times10^{-23}$$

(iv) அறிவியல் குறியீட்டில்,

$2000 = 2.0\times10^3$ மற்றும் $0.0001 = 1.0\times10^{-4}$ என எழுதலாம்.

$$\therefore (2000)^2\div(0.0001)^4 = \frac{(2.0\times10^3)^2}{(1.0\times10^{-4})^4} = \frac{(2.0)^2\times(10^3)^2}{(1.0)^4\times(10^{-4})^4}$$
$$= \frac{4\times10^6}{10^{-16}} = 4.0\times10^{6-(-16)} = 4.0\times10^{22}$$

பயிற்சி 3.1

1. பின்வரும் எண்களை அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதவும்.

   (i) 749300000000 (ii) 13000000 (iii) 105003

   (iv) 543600000000000 (v) 0.0096 (vi) 0.0000013307

   (vii) 0.0000000022 (viii) 0.0000000000009

2. பின்வரும் எண்களை தசம விரிவில் எழுதவும்.

   (i) 3.25×10^{-6} (ii) 4.134×10^{-4} (iii) 4.134×10^4

   (iv) 1.86×10^7 (v) 9.87×10^9 (vi) 1.432×10^{-9}

3. பின்வரும் எண்களை அறிவியல் குறியீட்டில் குறிப்பிடவும்.

   (i) $(1000)^2\times(20)^6$ (ii) $(1500)^3\times(0.0001)^2$

   (iii) $(16000)^3\div(200)^4$ (iv) $(0.003)^7\times(0.0002)^5\div(0.001)^3$

   (v) $(11000)^3\times(0.003)^2\div(30000)$

3.3 மடக்கைகள் (Logarithms)

மிகவும் சிக்கலான கணக்கீடுகளை மிக எளிமையாக்குவதற்காகவே மடக்கைகள் உண்மையில் தோற்றுவிக்கப்பட்டன. அவை பெருக்கல்களைக் கூட்டல்களாக மாற்றுவதற்காக அமைக்கப்பட்டன. கணிப்பான்கள் கண்டுபிடிப்பதற்கு முன்பே மிக அதிக இலக்கங்களைக் கொண்ட எண்களைப் பெருக்குவதற்கும் அல்லது வகுப்பதற்கும் மடக்கைகள் உதவின. ஏனெனில், எண்களைப் பெருக்குவதை விட மடக்கைச் செயலில் அவற்றின் அடுக்குகளை கூட்டுகிறோம். இயற்பியலில் பெரும்பாலான விதிகள் அனைத்தும் அடுக்குக்குறி வடிவில் அமைவதால் அணுக்கருச் சம்பந்தமான கதிர் வீச்சு குறைகள், காமா உள்ளீர்ப்பு மற்றும் ஒரு நிலையான கால அளவில் அணுக்கரு உலை சக்தியில் ஏற்படும் மாற்றங்கள் ஆகியவற்றின் கணக்கீடுகளில் மடக்கை மிகவும் இன்றியமையாததாகிறது.

மடக்கைக்குறியீட்டை அறிமுகப்படுத்துவதற்கு மெய்யெண்களின் அடுக்குக்குறியீட்டை முதலில் அறிமுகப்படுத்துவோம்.

3.3.1 அடுக்குக்குறியீடு (Exponential Notation)

a ஒரு மிகை எண் என்க. x ஒரு முழு எனில் a^x என்பதைப் பற்றி முன்னரே அறிந்துள்ளோம்.

ஒரு மிகை எண்ணின் n ஆவது அடுக்கு a எனில் அது $a^{\frac{1}{n}}$ என நமக்குத் தெரியும். p ஒரு முழு மற்றும் q ஒரு மிகை முழு எனில், $a^{\frac{p}{q}}$ என்பதை எவ்வாறு வரையறுப்பது என்பதைப் பற்றி இங்கு காண்போம்.

$\frac{p}{q} = p \times \frac{1}{q}$ என்பதை கவனிக்க, அடுக்குக்குறி விதி உண்மையாக இருக்க வேண்டுமெனில்,

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

எனவே, $a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p$ என நாம் வரையறுப்போம். எடுத்துக்காட்டாக, $8^{\frac{3}{5}} = (\sqrt[5]{8})^3$ மற்றும் $5^{\frac{-7}{3}} = (\sqrt[3]{5})^{-7}$

இவ்வாறு $a > 0$ எனில், அனைத்து விகிதமுறு எண்கள் x-க்கு a^x-ன் பொருளைக் கொடுத்துள்ளோம். மேலும் $a > 0$ எனில், அனைத்து விகிதமுறா எண்கள் x-க்கும் a^x-ன் வரையறையை அடுக்குக்குறி விதிகள் பொருந்துமாறு விரிவுப்படுத்த முடியும். நாம் இங்கு a^x -ன் வரையறையை விகிதமுறா எண் x-க்கு வரையறுக்கப் போவதில்லை. ஏனெனில், அதற்கு கணிதத்தின் உயர்பாடப்பிரிவுகளில் காணப்படும் கருத்தாக்கங்கள் தேவையாகிறது.

3.3.2 மடக்கைக்குறியீடு (Logarithmic Notation)

$a > 0$, $b > 0$ மற்றும் $a \neq 1$ எனில், a-ன் எந்த அடுக்கு b-க்கு சமமாகிறதோ அந்த அடுக்கானது a ஐ அடிமானமாகக் கொண்ட b-ன் மடக்கை ஆகும்.

முக்கிய கருத்து — **மடக்கைக்குறியீடு**

a என்பது 1 ஐத் தவிர்த்த ஒரு மிகை எண் மற்றும் x ஒரு மெய்யெண் (மிகை, குறை அல்லது பூச்சியம்) என்க. $a^x = b$ எனில், அடுக்கு x ஆனது அடிமானம் a ஐப் பொறுத்த b-ன் மடக்கை என அழைப்போம். இதனை $x = \log_a b$ என எழுதுவோம்.

$x = \log_a b$ என்பது $b = a^x$ என்ற அடுக்குக்குறி அமைப்பின் மடக்கை அமைப்பு ஆகும். இரு அமைப்புகளிலும் அடிமானம் ஒன்றே ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

அடுக்குக்குறி அமைப்பு	மடக்கை அமைப்பு
$2^4 = 16$	$\log_2 16 = 4$
$8^{\frac{1}{3}} = 2$	$\log_8 2 = \frac{1}{3}$
$4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$	$\log_4\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 3.6

பின்வரும் மடக்கை அமைப்பினை அடுக்குக்குறி அமைப்பாக மாற்றவும்.

(i) $\log_4 64 = 3$ (ii) $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$ (iii) $\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = -2$ iv) $\log_{10} 0.1 = -1$

தீர்வு

(i) $\log_4 64 = 3 \implies 4^3 = 64$

(ii) $\log_{16} 2 = \frac{1}{4} \implies (16)^{\frac{1}{4}} = 2$

(iii) $\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = -2 \implies (5)^{-2} = \frac{1}{25}$

(iv) $\log_{10} 0.1 = -1 \implies (10)^{-1} = 0.1$

எடுத்துக்காட்டு 3.7

பின்வரும் அடுக்குக்குறி அமைப்பினை மடக்கை அமைப்பாக மாற்றவும்.

(i) $3^4 = 81$ (ii) $6^{-4} = \frac{1}{1296}$ (iii) $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{27}$

(iv) $(216)^{\frac{1}{3}} = 6$ (v) $(13)^{-1} = \frac{1}{13}$

தீர்வு

(i) $3^4 = 81 \implies \log_3 81 = 4$

(ii) $6^{-4} = \frac{1}{1296} \implies \log_6\left(\frac{1}{1296}\right) = -4$

(iii) $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{27} \implies \log_{\frac{1}{81}}\left(\frac{1}{27}\right) = \frac{3}{4}$

(vi) $(216)^{\frac{1}{3}} = 6 \implies \log_{216} 6 = \frac{1}{3}$

(v) $(13)^{-1} = \frac{1}{13} \implies \log_{13}\left(\frac{1}{13}\right) = -1$

எடுத்துக்காட்டு 3.8

மதிப்பிடுக (i) $\log_8 512$ (ii) $\log_{27} 9$ (iii) $\log_{16}\left(\frac{1}{32}\right)$

தீர்வு

(i) $x = \log_8 512$ **என்க.**

எனவே, $8^x = 512$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$8^x = 8^3 \Longrightarrow x = 3$

$\therefore \log_8 512 = 3$

(ii) $x = \log_{27} 9$ **என்க.**

எனவே, $27^x = 9$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$(3^3)^x = (3)^2$ (இருபுறமும் அடிமானம் 3 ஆக மாற்றுக)

$3^{3x} = 3^2 \Longrightarrow 3x = 2 \Longrightarrow x = \frac{2}{3}$

$\therefore \log_{27} 9 = \frac{2}{3}$

(iii) $x = \log_{16}\left(\frac{1}{32}\right)$ **என்க.**

எனவே, $16^x = \frac{1}{32}$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$(2^4)^x = \frac{1}{(2)^5}$ (இருபுறமும் அடிமானம் 2 ஆக மாற்றுக)

$2^{4x} = 2^{-5} \Longrightarrow 4x = -5 \Longrightarrow x = -\frac{5}{4}$

$\therefore \log_{16}\left(\frac{1}{32}\right) = -\frac{5}{4}$

எடுத்துக்காட்டு 3.9

பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

(i) $\log_5 x = -3$ (ii) $x = \log_{\frac{1}{4}} 64$ (iii) $\log_x 8 = 2$ (iv) $x + 3\log_8 4 = 0$ (v) $\log_x 7^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$

தீர்வு

(i) $\log_5 x = -3$

$5^{-3} = x$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$x = \frac{1}{5^3} \Longrightarrow x = \frac{1}{125}$

(ii) $x = \log_{\frac{1}{4}} 64$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 64$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$\frac{1}{4^x} = 4^3 \Longrightarrow 4^{-x} = 4^3 \Longrightarrow x = -3$

(iii) $\log_x 8 = 2$

$x^2 = 8$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

(iv) $x + 3\log_8 4 = 0$

$\Longrightarrow \quad -x = 3\log_8 4 = \log_8 4^3$

$\Longrightarrow \quad -x = \log_8 64 \quad \Longrightarrow (8)^{-x} = 64$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$\Longrightarrow \quad (8)^{-x} = 8^2 \qquad \Longrightarrow x = -2$

(v) $\log_x 7^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3} \qquad \Longrightarrow \quad x^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{6}}$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$7^{\frac{1}{6}} = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$ என எழுதுக. பின்னர், $x^{\frac{1}{3}} = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore x = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

மடக்கை விதிகள்

1. **பெருக்கல் விதி :** ஒரே அடிமானத்தை உடைய இரு மிகை எண்களின் பெருக்கற்பலனின் மடக்கையானது, அவ்விரு எண்களின் மடக்கைகளின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும். அதாவது,

$\log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N$; a, M, N மிகை எண்கள், $a \neq 1$

2. **வகுத்தல் விதி :** ஒரே அடிமானத்தை உடைய இரு மிகை எண்களின் வகுத்தலின் மடக்கையானது, தொகுதியின் மடக்கையிலிருந்து பகுதியின் மடக்கையை கழித்தலுக்குச் சமமாகும்.அதாவது,

$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$; a, M, N மிகை எண்கள், $a \neq 1$

3. **அடுக்கு விதி :** ஒரு எண்ணின் அடுக்கின் மடக்கையானது அந்த எண்ணின் மடக்கையினை அடுக்கால் பெருக்குவதற்குச் சமமாகும். அதாவது,

$\log_a (M)^n = n\log_a M$; a, M மிகை எண்கள், $a \neq 1$

4. **அடிமான மாற்றல் விதி :** M, a, b என்பன மிகை எண்கள் மற்றும் $a \neq 1$, $b \neq 1$ எனில்,

$\log_a M = (\log_b M) \times (\log_a b)$

குறிப்புரை:

(i) a ஒரு மிகை எண் மற்றும் $a \neq 1$ எனில், $\log_a a = 1$.

(ii) a ஒரு மிகை எண் மற்றும் $a \neq 1$ எனில், $\log_a 1 = 0$.

(iii) a மற்றும் b மிகை எண்கள் $a \neq 1$, $b \neq 1$ எனில், $(\log_a b) \times (\log_b a) = 1$ மற்றும் $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

(iv) a மற்றும் b மிகை எண்கள் மற்றும் $b \neq 1$ எனில், $b^{\log_b a} = a$.

(v) $a > 0$ எனில், $\log_a 0$ வரையறுக்கப்படவில்லை.

(vi) b, x மற்றும் y மிகை எண்கள், $b \neq 1$ மற்றும் $\log_b x = \log_b y$ எனில், $x = y$ ஆகும். இதன் மறுதலையும் உண்மை.

(vii) எல்லா மடக்கைகளிலும் அடிமானம் 1 ஆக இல்லாமல் பார்த்துக் கொள்ளவேண்டும். ஏனெனில், அடிமானம் 1 உடைய மடக்கையை கருதினால், எடுத்துக்காட்டாக, $\log_1 9$ ஐ கருதினால், இதன் மதிப்பு x எனில், $x = \log_1 9$ அல்லது $1^x = 9$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆனால் எந்த மெய்யெண் x-க்கும் $1^x = 9$ எனக் கிடைக்காது.

எடுத்துக்காட்டு 3.10

சுருக்குக (i) $\log_5 25 + \log_5 625$ (ii) $\log_5 4 + \log_5 \left(\frac{1}{100}\right)$

தீர்வு

(i) $\log_5 25 + \log_5 625 = \log_5 (25 \times 625)$ $(\because \log_a (M \times N) = \log_a M + \log_a N)$

$= \log_5 (5^2 \times 5^4) = \log_5 5^6 = 6 \log_5 5$ $(\because \log_a (M)^n = n \log_a M)$

$= 6(1) = 6$ $(\because \log_a a = 1)$

(ii) $\log_5 4 + \log_5 \left(\frac{1}{100}\right) = \log_5 \left(4 \times \frac{1}{100}\right)$ $(\because \log_a (M \times N) = \log_a M + \log_a N)$

$= \log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = \log_5 \left(\frac{1}{5^2}\right) = \log_5 5^{-2} = -2 \log_5 5$ $(\because \log_a (M)^n = n \log_a M)$

$= -2(1) = -2$ $(\because \log_a a = 1)$

எடுத்துக்காட்டு 3.11

சுருக்குக $\log_8 128 - \log_8 16$

தீர்வு $\log_8 128 - \log_8 16 = \log_8 \frac{128}{16}$ $(\because \log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N)$

$= \log_8 8 = 1$ $(\because \log_a a = 1)$

எடுத்துக்காட்டு 3.12

$\log_{10} 125 = 3 - 3 \log_{10} 2$ என நிரூபி.

தீர்வு $3 - 3 \log_{10} 2 = 3 \log_{10} 10 - 3 \log_{10} 2 = \log_{10} 10^3 - \log_{10} 2^3$

$= \log_{10} 1000 - \log_{10} 8 = \log_{10} \frac{1000}{8}$

$= \log_{10} 125$

$\therefore \log_{10} 125 = 3 - 3 \log_{10} 2$

எடுத்துக்காட்டு 3.13

$\log_3 2 \times \log_4 3 \times \log_5 4 \times \log_6 5 \times \log_7 6 \times \log_8 7 = \frac{1}{3}$ என நிரூபி.

தீர்வு $\log_3 2 \times \log_4 3 \times \log_5 4 \times \log_6 5 \times \log_7 6 \times \log_8 7$

$= (\log_3 2 \times \log_4 3) \times (\log_5 4 \times \log_6 5) \times (\log_7 6 \times \log_8 7)$

$= \log_4 2 \times \log_6 4 \times \log_8 6 = (\log_4 2 \times \log_6 4) \times \log_8 6 \quad (\because \log_a M = \log_b M \times \log_a b)$

$= \log_6 2 \times \log_8 6 = \log_8 2 = \frac{1}{\log_2 8} \quad (\because \log_a b = \frac{1}{\log_b a})$

$= \frac{1}{\log_2 2^3} = \frac{1}{3\log_2 2} \quad (\because \log_a (M)^n = n\log_a M)$

$= \frac{1}{3} \quad (\because \log_2 2 = 1)$

எடுத்துக்காட்டு 3.14

$25^{-2\log_5 3}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $25^{-2\log_5 3} = (5^2)^{-2\log_5 3} = 5^{-4\log_5 3} \quad (\because n\log_a M = \log_a M^n)$

$= 5^{\log_5 3^{-4}} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \quad (\because b^{\log_b a} = a)$

எடுத்துக்காட்டு 3.15

தீர்க்க $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

தீர்வு $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

$\Longrightarrow \quad \frac{1}{\log_x 16} + \frac{1}{\log_x 4} + \frac{1}{\log_x 2} = 7 \quad (\because \log_a b = \frac{1}{\log_b a})$

$\frac{1}{\log_x 2^4} + \frac{1}{\log_x 2^2} + \frac{1}{\log_x 2} = 7$

$\frac{1}{4\log_x 2} + \frac{1}{2\log_x 2} + \frac{1}{\log_x 2} = 7 \quad (\because n\log_a M = \log_a M^n)$

$\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right]\frac{1}{\log_x 2} = 7 \quad \Longrightarrow \left[\frac{7}{4}\right]\frac{1}{\log_x 2} = 7$

$\frac{1}{\log_x 2} = 7 \times \frac{4}{7}$

$\log_2 x = 4 \quad (\because \log_a b = \frac{1}{\log_b a})$

$2^4 = x$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$\therefore \quad x = 16$

எடுத்துக்காட்டு 3.16

தீர்க்க $\dfrac{1}{2+\log_x 10} = \dfrac{1}{3}$

தீர்வு $\dfrac{1}{2+\log_x 10} = \dfrac{1}{3}$

குறுக்குப் பெருக்கல் செய்ய, நாம் பெறுவது

$2 + \log_x 10 = 3$

$\Longrightarrow \log_x 10 = 3 - 2 = 1$

$x^1 = 10$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$\therefore x = 10$

எடுத்துக்காட்டு 3.17

தீர்க்க $\log_3(\log_2 x) = 1$

தீர்வு $\log_2 x = y$ என்க. (1)

பிறகு, $\log_3 y = 1$

$3^1 = y$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$\therefore y = 3$

$y = 3$ என (1)-ல் பதிலிட $\log_2 x = 3$ எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே, $2^3 = x$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$\therefore x = 8$

எடுத்துக்காட்டு 3.18

தீர்க்க $\log_2(3x-1) - \log_2(x-2) = 3$

தீர்வு $\log_2(3x-1) - \log_2(x-2) = 3$

$\log_2\left(\dfrac{3x-1}{x-2}\right) = 3$ $\left(\because \log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N\right)$

$2^3 = \dfrac{3x-1}{x-2}$ (அடுக்குக்குறி அமைப்பு)

$8 = \dfrac{3x-1}{x-2}$

குறுக்குப் பெருக்கல் செய்ய, நாம் பெறுவது

$8(x-2) = 3x - 1 \Longrightarrow 8x - 16 = 3x - 1$

$8x - 3x = -1 + 16 \Longrightarrow 5x = 15$

$\therefore x = 3$

எடுத்துக்காட்டு 3.19

$\log_5 1125 = 2\log_5 6 - \frac{1}{2}\log_5 16 + 6\log_{49} 7$ என நிரூபி.

தீர்வு $2\log_5 6 - \frac{1}{2}\log_5 16 + 6\log_{49} 7$

$$= \log_5 6^2 - \log_5 (16)^{\frac{1}{2}} + 3\times 2\log_{49} 7 = \log_5 36 - \log_5 4 + 3\log_{49} 7^2$$

$$= \log_5\left(\frac{36}{4}\right) + 3\log_{49} 49 = \log_5 9 + 3(1)$$

$$= \log_5 9 + 3\log_5 5 = \log_5 9 + \log_5 (5)^3$$

$$= \log_5 9 + \log_5 125 = \log_5 (9\times 125) = \log_5 1125$$

$$\therefore\ \log_5 1125 = 2\log_5 6 - \frac{1}{2}\log_5 16 + 6\log_{49} 7$$

எடுத்துக்காட்டு 3.20

தீர்க்க $\log_5\sqrt{7x-4} - \frac{1}{2} = \log_5\sqrt{x+2}$

தீர்வு $\log_5\sqrt{7x-4} - \frac{1}{2} = \log_5\sqrt{x+2}$

$$\log_5\sqrt{7x-4} - \log_5\sqrt{x+2} = \frac{1}{2}$$

$$\log_5\left(\frac{\sqrt{7x-4}}{\sqrt{x+2}}\right) = \frac{1}{2} \qquad \left(\because \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N\right)$$

$$\log_5\left(\frac{7x-4}{x+2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\left[\log_5\left(\frac{7x-4}{x+2}\right)\right] = \frac{1}{2} \qquad (\because \log_a M^n = n\log_a M)$$

$$\log_5\left(\frac{7x-4}{x+2}\right) = 1$$

$$5^1 = \frac{7x-4}{x+2} \quad \text{(அடுக்குக்குறி அமைப்பு)}$$

குறுக்குப் பெருக்கல் செய்ய, $7x-4 = 5(x+2)$,

$$7x-4 = 5x+10 \implies 7x-5x = 10+4$$

$$\implies 2x = 14$$

$$\therefore\ x = 7$$

பயிற்சி 3.2

1. பின்வரும் கூற்றுகளில் எவை சரி அல்லது தவறு எனக் காண்க.

(i) $\log_5 125 = 3$ (ii) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = 3$

(iii) $\log_4(6+3) = \log_4 6 + \log_4 3$ (iv) $\log_2\left(\frac{25}{3}\right) = \frac{\log_2 25}{\log_2 3}$

(v) $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$ (vi) $\log_a(M-N) = \log_a M \div \log_a N$

2. பின்வருவனவற்றிற்குச் சமமான மடக்கை அமைப்பினைக் காண்க.

(i) $2^4 = 16$ (ii) $3^5 = 243$ (iii) $10^{-1} = 0.1$

(iv) $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$ (v) $25^{\frac{1}{2}} = 5$ (vi) $12^{-2} = \frac{1}{144}$

3. பின்வருவனவற்றிற்குச் சமமான அடுக்குக்குறி அமைப்பினைக் காண்க.

(i) $\log_6 216 = 3$ (ii) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ (iii) $\log_5 1 = 0$

(iv) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$ (v) $\log_{64}\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{2}$ (vi) $\log_{0.5} 8 = -3$

4. பின்வருவனவற்றின் மதிப்பினைக் காண்க.

(i) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$ (ii) $\log_7 343$ (iii) $\log_6 6^5$

(iv) $\log_{\frac{1}{2}} 8$ (v) $\log_{10} 0.0001$ (vi) $\log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3}$

5. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $\log_2 x = \frac{1}{2}$ (ii) $\log_{\frac{1}{5}} x = 3$ (iii) $\log_3 y = -2$

(iv) $\log_x 125\sqrt{5} = 7$ (v) $\log_x 0.001 = -3$ (vi) $x + 2\log_{27} 9 = 0$

6. பின்வருவனவற்றைச் சுருக்குக.

(i) $\log_{10} 3 + \log_{10} 3$ (ii) $\log_{25} 35 - \log_{25} 10$

(iii) $\log_7 21 + \log_7 77 + \log_7 88 - \log_7 121 - \log_7 24$ (iv) $\log_8 16 + \log_8 52 - \frac{1}{\log_{13} 8}$

(v) $5\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3 - 6\log_{64} 4$ (vi) $\log_{10} 8 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4$

7. பின்வரும் ஒவ்வொரு சமன்பாட்டினையும் தீர்க்க.

(i) $\log_4(x+4) + \log_4 8 = 2$ (ii) $\log_6(x+4) - \log_6(x-1) = 1$

(iii) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{11}{6}$ (iv) $\log_4(8\log_2 x) = 2$

(v) $\log_{10} 5 + \log_{10}(5x+1) = \log_{10}(x+5) + 1$

(vi) $4\log_2 x - \log_2 5 = \log_2 125$

(vii) $\log_3 25 + \log_3 x = 3\log_3 5$

(viii) $\log_3(\sqrt{5x-2}) - \frac{1}{2} = \log_3(\sqrt{x+4})$

8. $\log_a 2 = x$, $\log_a 3 = y$ மற்றும் $\log_a 5 = z$ எனில், பின்வரும் ஒவ்வொன்றின் மதிப்பினையும் x, y மற்றும் z இவற்றின் மூலம் காண்க.

(i) $\log_a 15$ (ii) $\log_a 8$ (iii) $\log_a 30$

(iv) $\log_a\left(\frac{27}{125}\right)$ (v) $\log_a\left(3\frac{1}{3}\right)$ (vi) $\log_a 1.5$

9. பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க.

(i) $\log_{10} 1600 = 2 + 4\log_{10} 2$ (ii) $\log_{10} 12500 = 2 + 3\log_{10} 5$

(iii) $\log_{10} 2500 = 4 - 2\log_{10} 2$ (iv) $\log_{10} 0.16 = 2\log_{10} 4 - 2$

(v) $\log_5 0.00125 = 3 - 5\log_5 10$ (vi) $\log_5 1875 = \frac{1}{2}\log_5 36 - \frac{1}{3}\log_5 8 + 20\log_{32} 2$

3.4 பொது மடக்கைகள் (Common Logarithms)

கணக்கீடுகளுக்குத் தசம எண்ணுருவின் அடிப்படை எண்ணான 10 ஐ அடிமானத்திற்கு தர்க்க ரீதியான எண்ணாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. அடிமானம் 10 ஆக உள்ள மடக்கைகள் பொது மடக்கைகள் எனப்படும். எனவே, இனிவரும் கணக்குகளில் மடக்கையானது அடிமானம் இல்லாமல் பயன்படுத்தப்படுகிறது. அதாவது, $\log \mathrm{N}$ என்பது $\log_{10} N$ என பொருள் கொள்ளப்படுகிறது. பின்வரும் அட்டவணையைக் கருதுக.

எண் N	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000	10000
N ன் அடுக்குக் குறி அமைப்பு	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4
$\log N$	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4

எனவே N என்பது 10-ன் முழு எண் அடுக்கு எனில், $\log N$ என்பது ஒரு முழு ஆகும். 3.16-ன் அல்லது 31.6-ன் அல்லது 316-ன் மடக்கை என்ன?

இப்போது, $3.16 = 10^{0.4997}$; $31.6 = 10^{1.4997}$; $316 = 10^{2.4997}$

$$\therefore \log 3.16 = 0.4997; \log 31.6 = 1.4997; \log 316 = 2.4997.$$

1-ல் இருந்து 10 வரை உள்ள ஒரு எண்ணின் மடக்கை 0-ல் இருந்து 1 வரை உள்ள ஒரு எண் ஆகும்; 10-ல் இருந்து 100 வரை உள்ள ஒரு எண்ணின் மடக்கை 1-ல் இருந்து 2 வரை உள்ள ஒரு எண் ஆகும். இதுபோன்றே மற்ற எண்களின் மடக்கைகளும் அமையும்.

ஒரு மடக்கையின் முழுஎண் பகுதி நேர்க்கூறு (characteristic) எனவும் தசமப்பின்னப் பகுதி பதின்மானக்கூறு (mantissa) எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக,

$\log 3.16 = 0.4997$; நேர்க்கூறு 0 மற்றும் பதின்மானக்கூறு 0.4997

$\log 31.6 = 1.4997$; நேர்க்கூறு 1 மற்றும் பதின்மானக்கூறு 0.4997

$\log 316 = 2.4997$; நேர்க்கூறு 2 மற்றும் பதின்மானக்கூறு 0.4997

ஒன்றை விட குறைவான எண்களின் மடக்கை ஒரு குறை எண் ஆகும். ஒரு எண்ணின் மடக்கை குறை எண்ணாக இருந்த போதிலும், அதன் பதின்மானக்கூறினை எப்போதும் மிகை எண்ணாகவே எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

நேர்க்கூறினைக் காண்பதற்கு அறிவியல் குறியீடு ஒரு சிறப்பான முறையைக் கொடுக்கிறது. அறிவியல் குறியீட்டில், $316 = 3.16\times10^2$. எனவே, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned}\log 316 &= \log(3.16\times10^2)\\ &= \log 3.16 + \log 10^2\\ &= 0.4997 + 2 = 2.4997.\end{aligned}$$

எனவே, 10-ன் அடுக்கு மடக்கையின் நேர்க்கூறினைக் காண்பதற்கு பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.21

பின்வருவனவற்றின் நேர்க்கூறினை எழுதுக.

(i) log 27.91 (ii) log 0.02871 (iii) log 0.000987 (iv) log 2475.

தீர்வு

(i) அறிவியல் குறியீட்டில், 27.91 = 2.791×10^{1}

$\therefore$ நேர்க்கூறு = 1

(ii) அறிவியல் குறியீட்டில், 0.02871 = 2.871×10^{-2}

$\therefore$ நேர்க்கூறு = –2

(iii) அறிவியல் குறியீட்டில், 0.000987 = 9.87×10^{-4}

$\therefore$ நேர்க்கூறு = – 4

(iv) அறிவியல் குறியீட்டில், 2475 = 2.475×10^{3}

$\therefore$ நேர்க்கூறு = 3

பின்வரும் விதிகளின்படி ஒரு எண்ணின் நேர்க்கூறினைப் பார்த்த மாத்திரத்தில் தீர்மானிக்க முடியும்.

(i) ஒன்று அல்லது ஒன்றை விட அதிகமான ஒரு எண்ணின் நேர்க்கூறு குறையற்ற (non-negative)மதிப்புடையது. மேலும் அது தசமப்புள்ளிக்கு முன் உள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையை விட ஒன்று குறைவாக இருக்கும்.

(ii) ஒன்றை விட குறைவான ஒரு எண்ணின் நேர்க்கூறு குறை (negative) மதிப்புடையது மேலும் அது தசமப்புள்ளியை அடுத்து உடனடியாக தொடர்ந்து வரும் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கையை விட ஒன்று அதிகமாக இருக்கும். நேர்க்கூறின் குறை குறியை $\bar{1}, \bar{2}, \ldots$ என எழுதுவோம். எடுத்துக்காட்டாக, 0.0316-ன் நேர்க்கூறு $\bar{2}$.

(iii) பதின்மானக்கூறு எப்போதும் மிகை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.22

log 4586 = 3.6615 என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) log 45.86 (ii) log 45860 (iii) log 0.4586

(iv) log 0.004586 (v) log 0.04586 (vi) log 4.586

தீர்வு log 4586-ன் பதின்மானக்கூறு 0.6615.

(i) log 45.86 = 1.6615 (ii) log 45860 = 4.6615

(iii) log 0.4586 = $-1 + 0.6615 = \bar{1}.6615$ (iv) log 0.004586 = $-3 + 0.6615 = \bar{3}.6615$

(v) log 0.04586 = $-2 + 0.6615 = \bar{2}.6615$ (vi) log 4.586 = 0.6615

3.4.1 மடக்கையைக் காணும் முறை

ஒரு எண்ணின் நேர்க்கூறு ஏற்கனவே கூறப்பட்டது போல எளிதில் அறிய முடியும் என்பதால், மடக்கை அட்டவணை வெறும் பதின்மானக்கூறுகளை மட்டுமே கொண்டிருக்கும். சம இலக்கங்களை வரிசை மாறாமல் கொண்டுள்ள, ஆனால் தசமப்புள்ளியில் மட்டும் மாறுபடும் எல்லா எண்களின் மடக்கைகளின் பதின்மானக்கூறுகளும் ஒன்றே. பதின்மானக்கூறுகள் நான்கு தசம திருத்தமான எண்ணாக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மடக்கை அட்டவணை பின்வரும் மூன்று பகுதிகளைக் கொண்டது.

(i) முதல் நிரல் 1.0, 1.1, 1.2, 1.3,...என 9.9 வரை உள்ள எண்களைக் கொண்டது.

(ii) அடுத்து பத்து நிரல்கள் 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 என்ற தலைப்புகளைக் கொண்டு பதின்மானக்கூறுகளைக் கொண்டுள்ளது.

(iii) இந்த நிரல்களுக்கு அடுத்து சராசரி வித்தியாசம் என்ற தலைப்பில் மீண்டும் 9 நிரல்கள் உள்ளது. இந்த நிரல்கள் 1, 2, ..., 9 என்ற எண்களால் குறிக்கப்படுகிறது.

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு எண்ணின் பதின்மானக்கூறினை எவ்வாறு காண்பது என்று நாம் விளக்குவோம்.

கொடுக்கப்பட்ட எண் 40.85 என்க. இதனை $40.85 = 4.085\times10^{1}$ என எழுதலாம்.

$\therefore$ நேர்க்கூறு 1 ஆகும்.

4.0 என்ற எண்ணுக்கு எதிரே உள்ள நிரை பின்வருமாறு மடக்கை அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

										சராசரி வித்தியாசங்கள்								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10

N = 4.0-க்கு நேராக இலக்கம் 8 ஆவது நிரலுக்குக் கீழே உள்ள எண்ணை நாம் குறிக்க அந்த எண் 0.6107 . பிறகு சராசரி வித்தியாசத்தில் **5** ஆவது நிரலுக்குக் கீழே உள்ள எண் 0.0005 ஐ எடுத்துக்கொள்ள தேவையான பதின்மானக்கூறு 0.6107 + 0.0005 = 0.6112.

$\therefore \log 40.85 = 1.6112$.

3.4.2 எதிர்மடக்கைகள் (Antilogarithms)

ஒரு எண்ணின் மடக்கை x எனில், அந்த எண்ணை x-ன் எதிர்மடக்கை என அழைக்கப்படும். இதை antilog x என எழுதலாம். அதாவது, $\log y = x$ எனில், $y = \text{antilog}\, x$ ஆகும்.

3.4.3 எதிர்மடக்கையைக் காணும் முறை

இப்புத்தகத்தின் கடைசியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள எதிர்மடக்கை அட்டவணை மூலம் ஒரு எண்ணின் எதிர்மடக்கையைக் காணலாம். இந்த அட்டவணையில் எதிர்மடக்கையின் மதிப்பு நான்கு தசமப்புள்ளி திருத்தமாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எதிர்மடக்கையைக் காண, நாம் பதின்மானக்கூறை மட்டும் கருத்தில் கொள்ளவேண்டும். முழுஎண் பகுதியில் எத்தனை இலக்கங்கள் உள்ளது என காண அல்லது தசமப்புள்ளிக்கு அடுத்து எத்தனை பூச்சியங்கள் உள்ளது என காண நாம் நேர்க்கூறைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

மடக்கை அட்டவணையை எவ்வாறு பயன்படுத்த வேண்டும் என்று மேலே குறிப்பிட்டோமோ அது போலவே எதிர்மடக்கை அட்டவணையையும் பயன்படுத்த வேண்டும்.

குறிப்பு: இப்புத்தகத்தின் கடைசியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மடக்கை அட்டவணையை நான்கு இலக்கங்ளைக் கொண்ட எண்களுக்கு மட்டுமே பயன்படுத்த முடியும். எனவே இப்பகுதியில் தீர்க்கப்படும் எல்லா மடக்கை கணக்குகளிலும் எண்களை நான்கு இலக்க எண்களாக மாற்றிக் கொள்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.23

(i) log 86.76 (ii) log 730.391 (iii) log 0.00421526 **காண்க.**

தீர்வு :

(i) $86.76 = 8.676 \times 10^{1}$ (அறிவியல் குறியீடு)

$\therefore$ நேர்க்கூறு 1 ஆகும். பதின்மானக்கூறைக் காண 8.676 என்ற எண்ணை எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

அட்டவணையிலிருந்து, $\log 8.67 = 0.9380$

6-ன் சராசரி வித்தியாசம் $= 0.0003$

$$\log 8.676 = 0.9380 + 0.0003 = 0.9383$$

$$\therefore \log 86.76 = 1.9383$$

(ii) $730.391 = 7.30391 \times 10^{2}$ (அறிவியல் குறியீடு)

$\therefore$ நேர்க்கூறு 2 ஆகும். பதின்மானக்கூறைக் காண 7.30391 என்ற எண்ணை எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். இதை 7.304 (நான்காவது தசம இலக்கம் 9, 5 ஐ விட பெரியது) என எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

அட்டவணையிலிருந்து, $\log 7.30 = 0.8633$

4-ன் சராசரி வித்தியாசம் $= 0.0002$

$$\log 7.304 = 0.8633 + 0.0002 = 0.8635$$

$$\therefore \log 730.391 = 2.8635$$

(iii) $0.00421526 = 4.21526 \times 10^{-3}$ (அறிவியல் குறியீடு)

$\therefore$ நேர்க்கூறு -3 ஆகும். பதின்மானக்கூறைக் காண 4.21526 என்ற எண்ணை எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். இதை 4.215 என எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். (நான்காவது தசம இலக்கம் 2, 5ஐ விட குறைவு).

அட்டவணையிலிருந்து, $\log 4.21 = 0.6243$

5-ன் சராசரி வித்தியாசம் $= 0.0005$

$$\log 4.215 = 0.6243 + 0.0005 = 0.6248$$

$$\therefore \log 0.00421526 = -3 + 0.6248 = \bar{3}.6248$$

எடுத்துக்காட்டு 3.24

பின்வருவனவற்றின் எதிர்மடக்கையினைக் காண்க.

(i) 1.8652   (ii) 0.3269   (iii) $\overline{2}.6709$

தீர்வு

(i) நேர்க்கூறு 1 ஆகும். எனவே அந்த எண், முழுஎண் பகுதியில் இரண்டு இலக்கங்களைக் கொண்டுள்ளது. பதின்மானக்கூறு 0.8652.

அட்டவணையிலிருந்து, antilog 0.865 = 7.328

2-ன் சராசரி வித்தியாசம் = 0.003

$$\text{antilog } 0.8652 = 7.328 + 0.003 = 7.331$$

$$\therefore \quad \text{antilog } 1.8652 = 73.31$$

(ii) நேர்க்கூறு 0 ஆகும். எனவே அந்த எண், முழுஎண் பகுதியில் ஒரு இலக்கத்தை கொண்டுள்ளது. பதின்மானக்கூறு 0.3269.

அட்டவணையிலிருந்து, antilog 0.326 = 2.118

9-ன் சராசரி வித்தியாசம் = 0.004

$$\therefore \text{antilog } 0.3269 = 2.118 + 0.004 = 2.122$$

(iii) நேர்க்கூறு -2. எனவே அந்த எண்ணில் முழுஎண் பகுதி இருக்காது. மேலும் தசமப்புள்ளியை அடுத்து உடனடியாக ஒரு பூச்சியம் இருக்கும். பதின்மானக்கூறு 0.6709.

அட்டவணையிலிருந்து, antilog 0.670 = 4.677

9-ன் சராசரி வித்தியாசம் = 0.010

$$\text{antilog } 0.6709 = 4.677 + 0.010 = 4.687$$

$$\therefore \text{antilog } \overline{2}.6709 = 0.04687$$

எடுத்துக்காட்டு 3.25

(i) 42.6×2.163 (ii) 23.17×0.009321 **ஆகியவற்றின் மதிப்பினைக் காண்க.**

தீர்வு

(i) $x = 42.6 \times 2.163$ என்க. இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} \log x &= \log(42.6 \times 2.163) \\ &= \log 42.6 + \log 2.163 \\ &= 1.6294 + 0.3351 = 1.9645 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \text{antilog } 1.9645 = 92.15$$

(ii) $x = 23.17 \times 0.009321$ என்க. இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\log x = \log(23.17 \times 0.009321) = \log 23.17 + \log 0.009321$$
$$= 1.3649 + \bar{3}.9694 = 1 + 0.3649 - 3 + 0.9694$$
$$= -2 + 1.3343 = -2 + 1 + 0.3343$$
$$= -1 + 0.3343 = \bar{1}.3343$$
$$\therefore \quad x = \text{antilog}\,\bar{1}.3343 = 0.2159$$

எடுத்துக்காட்டு 3.26

(i) $(36.27)^6$ (ii) $(0.3749)^4$ (iii) $\sqrt[5]{0.2713}$ ஆகியவற்றின் மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு

(i) $x = (36.27)^6$ என்க. இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\log x = \log(36.27)^6 = 6\log 36.27 = 6(1.5595) = 9.3570$$
$$\therefore x = \text{antilog}\,9.3570 = 2275000000$$

(ii) $x = (0.3749)^4$ என்க. இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\log x = \log(0.3749)^4 = 4\log 0.3749 = 4(\bar{1}.5739) = 4(-1 + 0.5739)$$
$$= -4 + 2.2956 = -4 + 2 + 0.2956 = -2 + 0.2956 = -2.2956$$
$$= \bar{2}.2956$$
$$\therefore x = \text{antilog}\,\bar{2}.2956 = 0.01975$$

(iii) $x = \sqrt[5]{0.2713} = (0.2713)^{\frac{1}{5}}$ என்க. இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\log x = \log(0.2713)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\log 0.2713$$
$$= \frac{1}{5}(\bar{1}.4335) = \frac{-1 + 0.4335}{5}$$
$$= \frac{(-1-4) + 4 + 0.4335}{5}$$
$$= \frac{-5 + 4.4335}{5} = \frac{-5}{5} + \frac{4.4335}{5}$$
$$= -1 + 0.8867 = \bar{1}.8867$$
$$\therefore x = \text{antilog}\,\bar{1}.8867 = 0.7703$$

எடுத்துக்காட்டு 3.27

சுருக்குக (i) $\dfrac{(46.7)\times\sqrt{65.2}}{(2.81)^3\times(4.23)}$ (ii) $\dfrac{(84.5)^4\times\sqrt[3]{0.0064}}{(72.5)^2\times\sqrt{62.3}}$

தீர்வு

(i) $x = \dfrac{(46.7)\times\sqrt{65.2}}{(2.81)^3\times(4.23)} = \dfrac{46.7\times(65.2)^{\frac{1}{2}}}{(2.81)^3\times 4.23}$ என்க.

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\log x = \log\left[\frac{46.7\times(65.2)^{\frac{1}{2}}}{(2.81)^3\times 4.23}\right]$$

$$= \log 46.7 + \log(65.2)^{\frac{1}{2}} - \log(2.81)^3 - \log 4.23$$

$$= \log 46.7 + \frac{1}{2}\log 65.2 - 3\log 2.81 - \log 4.23$$

$$= 1.6693 + \frac{1}{2}(1.8142) - 3(0.4487) - 0.6263$$

$$= 1.6693 + 0.9071 - 1.3461 - 0.6263$$

$$= 2.5764 - 1.9724 = 0.6040$$

$$\therefore x = \text{antilog } 0.6040 = 4.018$$

(ii) $x = \dfrac{(84.5)^4\times\sqrt[3]{0.0064}}{(72.5)^2\times\sqrt{62.3}} = \dfrac{(84.5)^4\times(0.0064)^{\frac{1}{3}}}{(72.5)^2\times(62.3)^{\frac{1}{2}}}$ என்க.

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\log x = \log\left[\frac{(84.5)^4\times(0.0064)^{\frac{1}{3}}}{(72.5)^2\times(62.3)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$= \log(84.5)^4 + \log(0.0064)^{\frac{1}{3}} - \log(72.5)^2 - \log(62.3)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 4\log 84.5 + \frac{1}{3}\log 0.0064 - 2\log 72.5 - \frac{1}{2}\log 62.3$$

$$= 4(1.9269) + \frac{1}{3}(\bar{3}.8062) - 2(1.8603) - \frac{1}{2}(1.7945)$$

$$= 7.7076 + \frac{1}{3}(-3 + 0.8062) - 3.7206 - 0.8973$$

$$= 3.0897 + (-1+0.2687) = 3+0.0897-1+0.2687$$

$$= 2+0.3584 = 2.3584$$

$$\therefore x = \text{antilog}2.3584 = 228.2$$

எடுத்துக்காட்டு 3.28

$\log_4 13.26$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $\log_4 13.26 = \log_{10} 13.26 \times \log_4 10$ $\quad (\because \log_a M = \log_b M \times \log_a b)$

$= \log_{10} 13.26 \times \dfrac{1}{\log_{10} 4}$ $\quad (\because \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a})$

$= \dfrac{1.1225}{0.6021} = x$ என்க.

பிறகு $x = \dfrac{1.1225}{0.6021}$. இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\log x = \log\left(\frac{1.1225}{0.6021}\right)$$

$$= \log 1.1225 - \log 0.6021 = 0.0503 - \bar{1}.7797$$

$$= 0.0503 - (-1 + 0.7797) = 0.0503 + 1 - 0.7797$$

$$= 1.0503 - 0.7797 = 0.2706$$

$$\therefore\ x = \text{antilog } 0.2706 = 1.865$$

பயிற்சி 3.3

1. பின்வருவனவற்றை அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதுக

(i) 92.43 (ii) 0.9243 (iii) 9243

(iv) 924300 (v) 0.009243 (vi) 0.09243

2. பின்வருவனவற்றின் நேர்க்கூறினைக் காண்க.

(i) log 4576 (ii) log 24.56 (iii) log 0.00257

(iv) log 0.0756 (v) log 0.2798 (vi) log 6.453

3. log 23750-ன் பதின்மானக்கூறு 0.3756 எனில், பின்வருவனவற்றின் மதிப்பினைக் காண்க.

(i) log 23750 (ii) log 23.75 (iii) log 2.375

(iv) log 0.2375 (v) log 23750000 (vi) log 0.00002375

4. மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றின் மதிப்பினைக் காண்க.

(i) log 23.17 (ii) log 9.321 (iii) log 329.5

(iv) log 0.001364 (v) log 0.9876 (vi) log 6576

5. எதிர்மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றின் மதிப்பினைக் காண்க.

(i) antilog 3.072 (ii) antilog 1.759 (iii) antilog $\bar{1}.3826$

(iv) antilog $\bar{3}.6037$ (v) antilog 0.2732 (vi) antilog $\bar{2}.1798$

6. மதிப்பிடுக.

(i) 816.3×37.42 (ii) $816.3 \div 37.42$ (iii) 0.000645×82.3

(iv) $0.3421 \div 0.09782$ (v) $(50.49)^5$ (vi) $\sqrt[3]{561.4}$

(vii) $\dfrac{175.23 \times 22.159}{1828.56}$ (viii) $\dfrac{\sqrt[3]{28} \times \sqrt[5]{729}}{\sqrt{46.35}}$ (ix) $\dfrac{(76.25)^3 \times \sqrt[3]{1.928}}{(42.75)^5 \times 0.04623}$

(x) $\sqrt[3]{\dfrac{0.7214 \times 20.37}{69.8}}$ (xi) $\log_9 63.28$ (xii) $\log_3 7$

நினைவில் கொள்க

- ஒரு எண் N ஐ அறிவியல் குறியீட்டில் $1 \leq a < 10$ என உள்ள தசமஎண் மற்றும்10-ன் முழு அடுக்கு ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனாக எழுதலாம். அதாவது,

  $N = a \times 10^n$ இங்கு $1 \leq a < 10$ மற்றும் n ஒரு முழு.

- $a^x = b\,(a > 0, a \neq 1)$ எனில், x என்பது அடிமானம் a உடைய b-ன் மடக்கையாகும். இதை $x = \log_a b$ என எழுதுவோம்.
- பெருக்கல் விதி : $\log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N$; a, M, N மிகை எண்கள், $a \neq 1$
- வகுத்தல் விதி : $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$; a, M, N மிகை எண்கள், $a \neq 1$
- அடுக்கு விதி : $\log_a (M)^n = n \log_a M$; a, M மிகை எண்கள், $a \neq 1$
- அடிமான மாற்றல் விதி : $\log_a M = \log_b M \times \log_a b, a \neq 1, b \neq 1$.
- ஒரு மடக்கையின் முழுஎண் பகுதி நேர்க்கூறு (*characteristic*) எனவும் தசமப்பின்னப் பகுதி பதின்மானக்கூறு (*mantisa*) எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

4 இயற்கணிதம்

Mathematics is as much an aspect of culture as it is a collection of algorithms

\- CARL BOYER

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகைப்படுத்துதல்.
- மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துதல்.
- காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துதல்.
- இயற்கணித முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்துதல்.
- பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணிப்படுத்துதல்.
- இரு மாறிகளில் உள்ள நேரியச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்.
- ஒரு மாறியில் உள்ள அசமன்பாட்டைத் தீர்த்தல்.

டையோபாண்டஸ்

(கி.பி.200 - கி.பி.284)

அல்லது

(கி.பி 214 -கி.பி 298)

சிர்க்கா என்ற நகரத்தில் வாழ்ந்த டையோபாண்டஸ் *(Diophantus)* ஒரு ஹெல்லனிஸ்டிக் கணித அறிஞர் ஆவார். அவர் வாழ்ந்த காலம் தெளிவாகத் தெரியாததால் நூறு ஆண்டுகளுக்கு முன்பே வாழ்ந்திருக்கலாம் எனவும் கருதப்படுகிறது. பதிமூன்று நூல்கள் அடங்கிய ஒரு கணிதப்புதையலான அரித்மெடிக்கா என்ற நூல்களின் தொகுப்பினை எழுதினார். ஆனால் அவற்றில் எஞ்சியுள்ளவை முதல் ஆறு நூல்கள் மட்டுமே. வடிவியல் முறைகளிலிருந்தும் பாபிலோனிய கணிதவியலிலிருந்தும் அவை மாறுபட்டவை. மேலும் இவர் தோராய **தீர்வு**களுக்கு பதிலாக மிகச்சரியான **தீர்வு**களை முதன்மைப்படுத்தினார். ஆகவே அரித்மெடிக்கா நூலானது கிரேக்க பாரம்பரிய கணிதவியலுடன் சிறிதளவே பொதுவாக இருந்தது.

4.1 அறிமுகம்

இயற்கணிதம் என்பது புரிந்து கொள்ள இயலாத கருத்துக்களை கொண்ட மிகவும் கடினமான தொடர்புகளைச் சுருக்கமாக, தெளிவாக, வேகமாக மற்றும் கேட்பவர்களைச் சிந்திக்கும் படியாக எடுத்துக் கூறுவதாகும். $ax = b$ என்ற நேரியச் சமன்பாடு, $ax^2 + bx = c$ என்ற இருபடிச் சமன்பாடு மற்றும் $x^2 + y^2 = z^2$ போன்ற பல்வேறு மாறிகளை உடைய தீர்மானிக்க முடியாத சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க பழங்கால எகிப்து மற்றும் பாபிலோனியா மக்கள் அறிய முற்பட்டதிலிருந்து இயற்கணித வரலாறு ஆரம்பிக்கிறது. 4000 வருடங்களுக்கும் மேலாக இது வளர்ச்சிப் பெற்றுள்ளது. ஆனால் 17 ஆம் நூற்றாண்டின் மத்தியில் விவரிக்கப்பட்ட இயற்கணித எளிய கணக்குகள் மற்றும் தொடர்புகள் நாம் இன்றைய நிலையில் குறிப்பிடப்படுவது போல இருந்தது. 20ஆம் நூற்றாண்டின் முற்பகுதியில் இயற்கணிதமானது அடிகோள்களின் தொகுப்பாக உருவெடுத்தது. பின்னர் இந்த அடிகோள் உத்திகள் நவீன இயற்கணிதம் எனக் கூறப்பட்டது. புதிய முக்கியமான முடிவுகள் கண்டறியப்பட்டன. மேலும் இயற்கணிதம் கணிதத்தின் அனைத்துத் துறைகளிலும் மற்றும் அறிவியலின் பற்பல துறைகளிலும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

4.2 இயற்கணிதக் கோவைகள் (Algebraic Expressions)

கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் என்ற நான்கு அடிப்படைக் கணிதச் செயல்கள், அடுக்குக்குறிகள் அல்லது

மூலங்களைக் கண்டெடுத்தல் ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி எண்கள் மற்றும் மாறிகளின் இணைப்பைக் கொண்டு அமைக்கப்படும் கோவைதான் ஒரு இயற்கணிதக் கோவை.

எடுத்துக்காட்டாக, $7,\ x,\ 2x-3y+1,\ \dfrac{5x^3-1}{4xy+1},\ \pi r^2$ மற்றும் $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ என்பன இயற்கணிதக் கோவைகள். சில மாறிகளின் கோவை என்பது அம்மாறிகளை மட்டுமே கொண்டுள்ள கோவை எனப் பொருள்படும். ஒரு இயற்கணிதக் கோவையில் மாறிகளே இல்லாவிடில் அது மாறிலி எனப் பொருள்படும். ஒரு இயற்கணிதக் கோவையில் மாறிகளுக்கு எண்களை பிரதியிடப்படும் போது கிடைக்கப்பெறும் விளைவெண் அம்மாறிகளின் மதிப்புகளுக்குண்டான கோவையின் மதிப்பு எனப்படும்.

ஒரு இயற்கணிதக் கோவையின் பகுதிகள் கூட்டல் அல்லது கழித்தல் குறிகளால் இணைக்கப்பட்டிருந்தால் அது இயற்கணிதக் கூடுதல் எனப்படும். ஒவ்வொரு பகுதியும் அதற்கு முன்னால் உள்ள குறியுடன் சேர்த்து ஒரு உறுப்பு எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, $3x^2y-\dfrac{4xz^2}{y}+\pi x^{-1}y$ என்ற இயற்கணிதக் கூடுதலில் $3x^2y,\ -\dfrac{4xz^2}{y}$ மற்றும் $\pi x^{-1}y$ ஆகியன உறுப்புகளாகும்.

ஒரு உறுப்பின் ஏதேனும் ஒருபகுதி மீதமுள்ள பகுதியுடன் பெருக்கப்பட்டிருப்பின், அப்பகுதியானது மீதமுள்ள பகுதியின் கெழு அல்லது குணகம் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, $-\dfrac{4xz^2}{y}$ என்ற உறுப்பில் $\dfrac{z^2}{y}$ -ன் கெழு $-4x$ மற்றும் $\dfrac{xz^2}{y}$-ன் கெழு –4 ஆகும். –4 ஐப் போன்று மாறிகளில்லாத கெழு எண்கெழு எனப்படும். $5x^2y$ மற்றும் $-12x^2y$ போன்ற உறுப்புகள் எண்கெழுக்களில் மட்டுமே வேறுபட்டுள்ளதால், இவைகள் ஒத்த உறுப்புகள் எனப்படும்.

$4\pi r^2$ போன்ற இயற்கணிதக் கோவை ஒரே ஒரு உறுப்பைக் கொண்ட இயற்கணிதக் கோவையாக கருதப்படும். இவ்வாறான ஒரு உறுப்பைக் கொண்ட கோவையானது ஓருறுப்புக் கோவை எனப்படும். இரண்டு உறுப்புகளைக் கொண்ட கோவையானது ஈருறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, $3x^2+2xy$ என்பது ஒரு ஈருறுப்புக் கோவை. அதேபோன்று $-2xy^{-1}+3\sqrt{x}-4$ என்பது ஒரு மூவுறுப்புக் கோவை எனவும் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளைக் கொண்ட கோவை ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை எனவும் அழைக்கலாம்.

4.3 பல்லுறுப்புக் கோவைகள் (Polynomials)

வகுத்திகளில் மாறிகள் இல்லாததும், மூலக் குறிகளின் உள்ளே மாறிகள் இல்லாததும் மற்றும் மிகை முழுக்களை அடுக்குகளாகக் கொண்ட, மாறிகளைக் கொண்டு அமையும் இயற்கணிதக் கோவை ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, $-2xy^{-1}+3\sqrt{x}-4$ என்ற மூவுறுப்புக் கோவை ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையல்ல. இருப்பினும் $3x^2y^4+\sqrt{2}\,xy-\dfrac{1}{2}$ என்ற மூவுறுப்புக் கோவை x மற்றும் y என்ற மாறிகளைக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். மாறிகளில்லாத $-\dfrac{1}{2}$ என்ற உறுப்பு பல்லுறுப்புக் கோவையின் மாறிலியாகும். பல்லுறுப்புக் கோவையிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்கெழுக்கள் பல்லுறுப்புக் கோவையின் கெழுக்களாகும். மேலேயுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையின் கெழுக்கள் $3,\ \sqrt{2}$ மற்றும் $-\dfrac{1}{2}$ ஆகும்.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையிலுள்ள ஒரு உறுப்பின் படி என்பது அவ்வுறுப்பிலுள்ள மாறிகளின் அடுக்குகளின் கூடுதல் ஆகும். அடுக்குகளைக் கூட்டும் போது ஒரு மாறியில் அடுக்கு இல்லையெனில் அதன் அடுக்கு ஒன்று எனக் கருதவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, $9xy^7 - 12x^3yz^2 + 3x - 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் $9xy^7$ என்ற உறுப்பின் படி $1 + 7 = 8$ மற்றும் $-12x^3yz^2$ என்ற உறுப்பின் படி $3 + 1 + 2 = 6$ மற்றும் $3x$ என்ற உறுப்பின் படி 1 ஆகும். மாறிலி உறுப்பின் படி பூச்சியம் என எப்போதும் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில் பூச்சியமல்லாத கெழுவைக் கொண்ட உறுப்புகளில் மிக உயர்ந்த படி கொண்ட உறுப்பின் படி அப்பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி (degree) எனக் கூறப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, மேலே எடுத்துக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 8. 0 என்ற ஒருறுப்பு மாறிலியும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் கருதப்பட்டாலும் இந்த குறிப்பிட்ட பல்லுறுப்பு கோவைக்கு படி வரையறுக்கப் படவில்லை.

4.3.1 ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

இப்பாடப் பகுதியில் ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவைகளை மட்டுமே நாம் எடுத்துக் கொள்வோம்.

முக்கிய கருத்து **ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவை**

x என்ற ஒரு மாறியில் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் இயற்கணித அமைப்பு

$$\mathrm{p}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ \ a_n \neq 0$$

இங்கு $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ ஆகியன மாறிலிகள் மற்றும் n என்பது ஒரு குறையற்ற மிகை முழு.

இங்கு, n என்பது பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி மற்றும் $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ என்பன பல்லுறுப்புக் கோவையின் கெழுக்கள். a_0 என்பது மாறிலி உறுப்பு. $a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}, \cdots, a_2x^2, a_1x, a_0.$ ஆகியன பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$-ன் உறுப்புகள். எடுத்துக்காட்டாக, $5x^2 + 3x - 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் x^2 - ன் கெழு 5, x -ன் கெழு 3 மற்றும் -1 என்பது மாறிலி. இப்பல்லுறுப்புக் கோவையின் மூன்று உறுப்புகள் $5x^2, 3x$ மற்றும் -1 ஆகும்.

4.3.2 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகைகள்

முக்கிய கருத்து **உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அடிப்படையிலான பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகைகள்**

ஒருறுப்புக் கோவை

ஒரே ஒரு உறுப்பைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஒருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

ஈருறுப்புக் கோவை

இரண்டு உறுப்புகளை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஈருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

மூவுறுப்புக் கோவை

மூன்று உறுப்புகளை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை மூவுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

குறிப்பு

1. ஒரு ஈருறுப்புக் கோவையானது, வெவ்வேறு படிகளைக் கொண்ட இரண்டு ஓருறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதல் ஆகும்.
2. ஒரு மூவுறுப்புக் கோவையானது, வெவ்வேறு படிகளைக் கொண்ட மூன்று ஓருறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதல் ஆகும்.
3. ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையானது, ஓருறுப்புக் கோவை அல்லது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட ஓருறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதல் ஆகும்.

முக்கிய கருத்து — படியின் அடிப்படையில் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகைகள்

மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவை

படி பூச்சியமாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவை ஆகும்.

இதன் பொதுவடிவம் : $p(x) = c$, இங்கு c ஒரு மெய்யெண்.

ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை அல்லது நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவை

படி ஒன்றாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை ஆகும்.

இதன் பொதுவடிவம் : $p(x) = ax+b$, a மற்றும் b மெய்யெண்கள் மேலும் $a \neq 0$.

இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை

படி இரண்டாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

இதன் பொது வடிவம்: $ax^2 + bx + c$, இங்கு a, b மற்றும் c ஆகியன மெய்யெண்கள் மேலும் $a \neq 0$.

முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை

படி மூன்றாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

இதன் பொது வடிவம் : $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ இங்கு a, b, c மற்றும் d ஆகியன மெய்யெண்கள் மேலும் $a \neq 0$.

எடுத்துக்காட்டு 4.1

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை அவற்றின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்து வகைப்படுத்துக.

(i) $x^3 - x^2$	(ii) $5x$	(iii) $4x^4 + 2x^3 + 1$	(iv) $4x^3$
(v) $x + 2$	(vi) $3x^2$	(vii) $y^4 + 1$	(viii) $y^{20} + y^{18} + y^2$
(ix) 6	(x) $2u^3 + u^2 + 3$	(xi) $u^{23} - u^4$	(xii) y

தீர்வு

$5x$, $3x^2$, $4x^3$, y மற்றும் 6 என்பன ஓருறுப்புக் கோவைகள் ஏனெனில், இவற்றில் ஒரே ஒரு உறுப்பு உள்ளது.

$x^3 - x^2$, $x + 2$, $y^4 + 1$ மற்றும் $u^{23} - u^4$ என்பன ஈருறுப்புக் கோவைகள் ஏனெனில், இவற்றில் இரண்டு உறுப்புகள் உள்ளன.

$4x^4 + 2x^3 + 1$, $y^{20} + y^{18} + y^2$ மற்றும் $2u^3 + u^2 + 3$ என்பன மூவுறுப்புக் கோவைகள் ஏனெனில், இவற்றில் மூன்று உறுப்புகள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 4.2

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை அவற்றின் படிகளைப் பொறுத்து வகைப்படுத்துக.

(i) $p(x) = 3$ (ii) $p(y) = \frac{5}{2}y^2 + 1$ (iii) $p(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 1$

(iv) $p(x) = 3x^2$ (v) $p(x) = x + 3$ (vi) $p(x) = -7$

(vii) $p(x) = x^3 + 1$ (viii) $p(x) = 5x^2 - 3x + 2$ (ix) $p(x) = 4x$

(x) $p(x) = \frac{3}{2}$ (xi) $p(x) = \sqrt{3}\,x + 1$ (xii) $p(y) = y^3 + 3y$

தீர்வு

$p(x) = 3,\ p(x) = -7,\ p(x) = \frac{3}{2}$ என்பன மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவைகள்.

$p(x) = x + 3,\ p(x) = 4x,\ p(x) = \sqrt{3}\,x + 1$ என்பன ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் ஏனெனில், மாறி x-ன் மிக உயர்ந்த படி 1.

$p(x) = 5x^2 - 3x + 2,\ p(y) = \frac{5}{2}y^2 + 1,\ p(x) = 3x^2$ என்பன இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் ஏனெனில், மாறியின் மிக உயர்ந்த படி 2.

$p(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 1,\ p(x) = x^3 + 1,\ p(y) = y^3 + 3y$ என்பன முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் ஏனெனில், மாறியின் மிக உயர்ந்த படி 3.

பயிற்சி 4.1

1. பின்வரும் இயற்கணிதக் கோவைகள் ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவையா எனக் கூறு. உன்னுடைய விடைக்கு காரணம் கூறுக.

   (i) $2x^5 - x^3 + x - 6$ (ii) $3x^2 - 2x + 1$ (iii) $y^3 + 2\sqrt{3}$

   (iv) $x - \frac{1}{x}$ (v) $\sqrt[3]{t} + 2t$ (vi) $x^3 + y^3 + z^6$

2. பின்வரும் ஒவ்வொன்றிலும் x^2 மற்றும் x-ன் கெழுக்களைக் காண்க.

   (i) $2 + 3x - 4x^2 + x^3$ (ii) $\sqrt{3}\,x + 1$ (iii) $x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + 4x - 1$

   (iv) $\frac{1}{3}x^2 + x + 6$

3. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் ஒவ்வொன்றின் படியினைக் காண்க.

   (i) $4 - 3x^2$ (ii) $5y + \sqrt{2}$ (iii) $12 - x + 4x^3$ (iv) 5

4. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை அவற்றின் படியினைப் பொறுத்து வகைப்படுத்துக.

   (i) $3x^2 + 2x + 1$ (ii) $4x^3 - 1$ (iii) $y + 3$

   (iv) $y^2 - 4$ (v) $4x^3$ (vi) $2x$

5. படி 27 ஆக உள்ள ஒரு ஈருறுப்புக் கோவை, படி 49 ஆக உள்ள ஒரு ஒருறுப்புக் கோவை, படி 36 ஆக உள்ள ஒரு மூவுறுப்புக் கோவை ஆகியவற்றிக்கு ஓர் உதாரணம் தருக.

4.3.3 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்கள்

$p(x) = x^2 - x - 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கருதுக. $x = -1$, $x = 1$ மற்றும் $x = 2$ எனில், $p(x)$ - ன் மதிப்புகளைக் காண்போம்.

$$p(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$
$$p(1) = (1)^2 - 1 - 2 = 1 - 1 - 2 = -2$$
$$p(2) = (2)^2 - 2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$$

அதாவது, $x = -1, 1$ மற்றும் 2 எனும் போது பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$-ன் மதிப்புகள் முறையே 0, –2 மற்றும் 0 ஆகும்.

மாறியின் சில மதிப்புகளுக்கு பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பு பூச்சியம் எனில், அந்த மதிப்பு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம் எனப்படும்.

$p(-1) = 0$. எனவே $x = -1$ என்பது $p(x) = x^2 - x - 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு பூச்சியம் ஆகும். இதேபோன்று, $x = 2$ எனில், $p(2) = 0$. எனவே $x = 2$ என்பதுவும் $p(x)$-ன் ஒரு பூச்சியம் ஆகும்.

முக்கிய கருத்து	பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம்
$p(x)$ என்பது x-ல் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை என்க. $p(a) = 0$ எனில், a என்பது $p(x)$-ன் ஒரு பூச்சியம் எனக் கூறுவோம்.	

குறிப்பு ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை பல்லுறுப்புக் கோவையின் படிக்கு சமமாகவோ அல்லது அதற்குக் குறைவாகவோ இருக்கும். கார்ல் பிரெடெரிக் காஸ் (1777 - 1855) என்பவர் 1798 ஆம் ஆண்டு தனது ஆராய்ச்சிப் பட்டப் படிப்புக் கட்டுரையில் n படி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு சரியாக n **தீர்வு**கள் உண்டு என நிரூபித்துள்ளார். இந்த முக்கியமான முடிவு இயற்கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.3

$p(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x - 9$ எனில், (i) $p(-1)$ மற்றும் (ii) $p(2)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு $p(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x - 9$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) $p(-1) = 5(-1)^3 - 3(-1)^2 + 7(-1) - 9 = -5 - 3 - 7 - 9$

$\therefore\ p(-1) = -24$

(ii) $p(2) = 5(2)^3 - 3(2)^2 + 7(2) - 9 = 40 - 12 + 14 - 9$

$\therefore\ p(2) = 33$

எடுத்துக்காட்டு 4.4

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்களைக் காண்க.

(i) $p(x) = 2x - 3$ (ii) $p(x) = x - 2$

தீர்வு

(i) $p(x) = 2x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே, $p\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right) = 2(0) = 0$ என நாம் பெறுகிறோம்.

$\therefore\ x = \frac{3}{2}$ என்பது $p(x)$-ன் பூச்சியம் ஆகும்.

(ii) $p(x) = x - 2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இப்போது, $p(2) = 2 - 2 = 0$

$\therefore\ x = 2$ என்பது $p(x)$- ன் பூச்சியம் ஆகும்.

4.3.4 பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளின் மூலங்கள்

$p(x)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை என்க. பின்னர் $p(x) = 0$ என்பது x-ல் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடு எனப்படும்.

$p(x) = x - 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக் கொள்க. $x = 1$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x) = x - 1$-ன் பூச்சியம் ஆகும். இப்போது, $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்க. அதாவது, $x - 1 = 0$-ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். $x - 1 = 0$ எனில், $x = 1$ ஆகும். $x = 1$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடு $p(x) = 0$-ன் மூலம் ஆகும்.

எனவே, பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்கள், ஒத்த பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஆகும்.

முக்கிய கருத்து	பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலம்
$x = a$ என்பது $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்தால், $x = a$ என்பது $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் எனப்படும்.	

எடுத்துக்காட்டு 4.5

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களைக் காண்க.

(i) $x - 6 = 0$ (ii) $2x + 1 = 0$

தீர்வு

(i) $x - 6 = 0$ எனில், $x = 6$

$\therefore\ x = 6$ என்பது $x - 6 = 0$ -ன் ஒரு மூலம் ஆகும்.

(ii) $2x + 1 = 0$ எனில், $2x = -1 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ x = -\frac{1}{2}$ என்பது $2x + 1 = 0$ -ன் ஒரு மூலம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.6

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளுக்கு அவற்றிற்கு எதிரே குறிப்பிட்டுள்ளவைகள் மூலங்களா என ஆராய்க.

(i) $2x^2 - 3x - 2 = 0; \quad x = 2, 3$

(ii) $x^3 + 8x^2 + 5x - 14 = 0; \quad x = 1, 2$

தீர்வு

(i) $p(x) = 2x^2 - 3x - 2$ என்க.

இப்போது, $p(2) = 2(2)^2 - 3(2) - 2 = 8 - 6 - 2 = 0$

$\therefore$ $x = 2$ என்பது $2x^2 - 3x - 2 = 0$-ன் ஒரு மூலம்ஆகும்.

ஆனால், $p(3) = 2(3)^2 - 3(3) - 2 = 18 - 9 - 2 = 7 \neq 0$

$\therefore$ $x = 3$ என்பது $2x^2 - 3x - 2 = 0$-ன் ஒரு மூலம் ஆகாது.

(ii) $p(x) = x^3 + 8x^2 + 5x - 14$ என்க.

$p(1) = (1)^3 + 8(1)^2 + 5(1) - 14 = 1 + 8 + 5 - 14 = 0$

$\therefore$ $x = 1$ என்பது $x^3 + 8x^2 + 5x - 14 = 0$-ன் ஒரு மூலம் ஆகும்.

ஆனால், $p(2) = (2)^3 + 8(2)^2 + 5(2) - 14 = 8 + 32 + 10 - 14 = 36 \neq 0$

$\therefore$ $x = 2$ என்பது $x^3 + 8x^2 + 5x - 14 = 0$-ன் ஒரு மூலம் ஆகாது.

பயிற்சி 4.2

1. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்களைக் காண்க.
   (i) $p(x) = 4x - 1$ (ii) $p(x) = 3x + 5$ (iii) $p(x) = 2x$ (iv) $p(x) = x + 9$
2. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களைக் காண்க.
   (i) $x - 3 = 0$ (ii) $5x - 6 = 0$ (iii) $11x + 1 = 0$ (iv) $-9x = 0$
3. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளுக்கு, அவற்றிக்கு எதிரே குறிப்பிட்டுள்ளவைகள் மூலங்களா என ஆராய்க.
   (i) $x^2 - 5x + 6 = 0; \quad x = 2, 3$ (ii) $x^2 + 4x + 3 = 0; \quad x = -1, 2$
   (iii) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0; \ x = 1, -2, 3$ (iv) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0; \ x = -1, 2, 3$

4.4 மீதித் தேற்றம் (Remainder Theorem)

மீதித் தேற்றம்

$p(x)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் என்க. $p(x)$-ஐ $(x - a)$ என்ற நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(a)$ ஆகும்.

குறிப்பு

1. $p(x)$-ஐ $(x+a)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(-a)$ ஆகும்.
2. $p(x)$-ஐ $(ax-b)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p\left(\frac{b}{a}\right)$ ஆகும்.
3. $p(x)$-ஐ $(ax+b)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p\left(-\frac{b}{a}\right)$ ஆகும்.
4. இங்கு $-a$, $\frac{b}{a}$ மற்றும் $-\frac{b}{a}$ ஆகியவைகள் முறையே வகுத்திகள் $x+a$, $ax-b$ மற்றும் $ax+b$ ஆகியவற்றின் பூச்சியங்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.7

$4x^3-5x^2+6x-2$ ஐ $(x-1)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு $p(x)=4x^3-5x^2+6x-2$ என்க. $x-1$-ன் பூச்சியம் 1.

$p(x)$ ஐ $(x-1)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(1)$ ஆகும்.

இப்போது, $p(1) = 4(1)^3-5(1)^2+6(1)-2$

$= 4-5+6-2 = 3$

$\therefore$ மீதி $= 3$.

எடுத்துக்காட்டு 4.8

x^3-7x^2-x+6 ஐ $(x+2)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு $p(x)=x^3-7x^2-x+6$ என்க. $x+2$-ன் பூச்சியம் -2 ஆகும்.

$p(x)$ ஐ $(x+2)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(-2)$ ஆகும்.

இப்போது, $p(-2) = (-2)^3-7(-2)^2-(-2)+6$

$= -8-7(4)+2+6$

$= -8-28+2+6 = -28$

$\therefore$ மீதி $= -28$

எடுத்துக்காட்டு 4.9

$2x^3-6x^2+5ax-9$ என்பதை $(x-2)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி 13 எனில், a-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $p(x)=2x^3-6x^2+5ax-9$ என்க. $(x-2)$-ன் பூச்சியம் 2.

$p(x)$-ஐ $(x-2)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(2)$ ஆகும்.

$p(2)=13$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\Longrightarrow \quad 2(2)^3-6(2)^2+5a(2)-9 = 13$$
$$2(8)-6(4)+10a-9 = 13$$
$$16-24+10a-9 = 13$$
$$10a-17 = 13$$
$$10a = 30$$
$$\therefore \quad a = 3$$

எடுத்துக்காட்டு 4.10

$x^3 + ax^2 - 3x + a$ ஐ $(x + a)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு

$p(x) = x^3 + ax^2 - 3x + a$ என்க.

$p(x)$-ஐ $(x + a)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(-a)$ ஆகும்.

$p(-a) = (-a)^3 + a(-a)^2 - 3(-a) + a = -a^3 + a^3 + 4a = 4a$

$\therefore$ மீதி $= 4a$.

எடுத்துக்காட்டு 4.11

$f(x) = 12x^3 - 13x^2 - 5x + 7$ ஐ $(3x + 2)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு $f(x) = 12x^3 - 13x^2 - 5x + 7$.

$f(x)$-ஐ $(3x + 2)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ ஆகும்.

இப்போது,
$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = 12\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 13\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 5\left(-\frac{2}{3}\right) + 7$$
$$= 12\left(-\frac{8}{27}\right) - 13\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{10}{3} + 7$$
$$= -\frac{32}{9} - \frac{52}{9} + \frac{10}{3} + 7 = \frac{9}{9} = 1$$

$\therefore$ மீதி $= 1$.

எடுத்துக்காட்டு 4.12

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $2x^3 + ax^2 + 4x - 12$ மற்றும் $x^3 + x^2 - 2x + a$ ஆகியவற்றை $(x - 3)$ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதிகள் சமம் எனில், a-ன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் மீதியையும் காண்க.

தீர்வு $p(x) = 2x^3 + ax^2 + 4x - 12$

மற்றும் $q(x) = x^3 + x^2 - 2x + a$ என்க.

$p(x)$-ஐ $(x - 3)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(3)$ ஆகும்.

இப்போது,
$$p(3) = 2(3)^3 + a(3)^2 + 4(3) - 12$$
$$= 2(27) + a(9) + 12 - 12$$
$$= 54 + 9a \qquad (1)$$

$q(x)$-ஐ $(x - 3)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $q(3)$ ஆகும்.

இப்போது,
$$q(3) = (3)^3 + (3)^2 - 2(3) + a$$
$$= 27 + 9 - 6 + a$$
$$= 30 + a \qquad (2)$$

மீதிகள் சமம் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், $p(3) = q(3)$ ஆகும்.

அதாவது, $54 + 9a = 30 + a$ ((1), (2) ஆகியவற்றின் படி)

$$9a - a = 30 - 54$$

$$8a = -24$$

$$\therefore a = -\frac{24}{8} = -3$$

$a = -3$ என $p(3)$-ல் பதிலிட, நாம் பெறுவது

$$p(3) = 54 + 9(-3) = 54 - 27 = 27$$

$\therefore$ மீதி $= 27$.

பயிற்சி 4.3

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதல் பல்லுறுப்புக் கோவையை இரண்டாம் பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதியை மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

   (i) $3x^3 + 4x^2 - 5x + 8$, $x - 1$

   (ii) $5x^3 + 2x^2 - 6x + 12$, $x + 2$

   (iii) $2x^3 - 4x^2 + 7x + 6$, $x - 2$

   (iv) $4x^3 - 3x^2 + 2x - 4$, $x + 3$

   (v) $4x^3 - 12x^2 + 11x - 5$, $2x - 1$

   (vi) $8x^4 + 12x^3 - 2x^2 - 18x + 14$, $x + 1$

   (vii) $x^3 - ax^2 - 5x + 2a$, $x - a$

2. $2x^3 - ax^2 + 9x - 8$ ஐ $(x - 3)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி 28 எனில், a-ன் மதிப்பைக் காண்க.

3. $(x + 2)$ ஆல் வகுக்கும் போது $x^3 - 6x^2 + mx + 60$ எனும் கோவையானது மீதி 2 ஐத் தருமானால் m-ன் மதிப்பைக் காண்க.

4. $(x - 1)$ என்பது $mx^3 - 2x^2 + 25x - 26$ ஐ மீதியின்றி வகுக்கிறது எனில், m-ன் மதிப்பைக் காண்க.

5. பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $x^3 + 3x^2 - m$ மற்றும் $2x^3 - mx + 9$ ஆகியவற்றை $(x - 2)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதிகள் சமம் எனில், m-ன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் மீதியையும் காண்க.

4.5 காரணித் தேற்றம் (Factor Theorem)

காரணித் தேற்றம்

$p(x)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் என்க. $p(a) = 0$ எனில், $(x - a)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

குறிப்பு $p(x)$-ன் ஒரு காரணி $(x - a)$ எனில், $p(a) = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.13

$(x-5)$ என்பது $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு காரணியா எனத் தீர்மானி.

தீர்வு காரணித் தேற்றத்தின்படி, $p(5) = 0$ எனில், $(x-5)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

இப்போது,
$$\begin{aligned} p(5) &= 2(5)^3 - 5(5)^2 - 28(5) + 15 \\ &= 2(125) - 5(25) - 140 + 15 \\ &= 250 - 125 - 140 + 15 = 0 \end{aligned}$$

$\therefore (x-5)$ என்பது $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.14

$(x-2)$ என்பது $2x^3 - 6x^2 + 5x + 4$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு காரணியா எனத் தீர்மானி.

தீர்வு $p(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x + 4$ என்க.

காரணித் தேற்றத்தின் படி, $p(2) = 0$ எனில், $(x-2)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

இப்போது, $p(2) = 2(2)^3 - 6(2)^2 + 5(2) + 4 = 2(8) - 6(4) + 10 + 4$

$= 16 - 24 + 10 + 4 = 6 \neq 0$

$\therefore (x-2)$ என்பது $2x^3 - 6x^2 + 5x + 5$-ன் ஒரு காரணி ஆகாது.

எடுத்துக்காட்டு 4.15

$(2x-3)$ என்பது $2x^3 - 9x^2 + x + 12$ -ன் ஒரு காரணியா எனத் தீர்மானி.

தீர்வு $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$ என்க. காரணித் தேற்றத்தின் படி, $p\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ எனில், $(2x-3)$ என்பது $p(x)$ -ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

இப்போது,
$$\begin{aligned} p\left(\frac{3}{2}\right) &= 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + 12 = 2\left(\frac{27}{8}\right) - 9\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{3}{2} + 12 \\ &= \frac{27}{4} - \frac{81}{4} + \frac{3}{2} + 12 = \frac{27 - 81 + 6 + 48}{4} = 0 \end{aligned}$$

$\therefore (2x-3)$ என்பது $2x^3 - 9x^2 + x + 12$ -ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.16

$(x-1)$ என்பது $x^3 + 5x^2 + mx + 4$-ன் ஒரு காரணி எனில், m-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $p(x) = x^3 + 5x^2 + mx + 4$ என்க

$(x-1)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, $p(1) = 0$ ஆகும்.

$$\begin{aligned} p(1) = 0 &\Longrightarrow (1)^3 + 5(1)^2 + m(1) + 4 = 0 \\ &\Longrightarrow 1 + 5 + m + 4 = 0 \\ & m + 10 = 0 \\ & \therefore m = -10 \end{aligned}$$

பயிற்சி 4.4

1. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு $(x+1)$ என்பது ஒரு காரணியா எனத் தீர்மானி.

   (i) $6x^4+7x^3-5x-4$ (ii) $2x^4+9x^3+2x^2+10x+15$

   (iii) $3x^3+8x^2-6x-5$ (iv) $x^3-14x^2+3x+12$

2. $(x+4)$ என்பது $x^3+3x^2-5x+36$-ன் ஒரு காரணியா எனத் தீர்மானி.
3. காரணித் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $(x-1)$ என்பது $4x^3-6x^2+9x-7$-ன் ஒரு காரணி எனக் காண்பி.
4. $(2x+1)$ என்பது $4x^3+4x^2-x-1$-ன் ஒரு காரணியா எனத் தீர்மானி.
5. $(x+3)$ என்பது $x^3-3x^2-px+24$-ன் ஒரு காரணி எனில், p-ன் மதிப்பைக் காண்க.

4.6 இயற்கணித முற்றொருமைகள் (Algebraic Identities)

முக்கிய கருத்து	இயற்கணித முற்றொருமைகள்
ஒரு சமன்பாடு அதிலுள்ள மாறிகளின் எம்மதிப்புக்கும் உண்மையாகவே இருக்குமானால், அச்சமன்பாடு ஒரு முற்றொருமை எனப்படும்.	

பின்வரும் முற்றொருமைகளை எட்டாம் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறோம். முதலில் அவற்றை பயன்படுத்தி சில கணக்குகளைத் தீர்ப்போம். இம்முற்றொருமைகளை விரிவாக்கி மூன்றாம் படியில் உள்ள மூவுறுப்புக் கோவைகளுக்குத் **தீர்வு** காண்போம்.

$$(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2 \qquad (a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$$

$$(a-b)^2 \equiv a^2-2ab+b^2 \qquad (x+a)(x+b) \equiv x^2+(a+b)x+ab$$

எடுத்துக்காட்டு 4.17

முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றை விரித்தெழுதுக.

(i) $(2a+3b)^2$ (ii) $(3x-4y)^2$ (iii) $(4x+5y)(4x-5y)$ (iv) $(y+7)(y+5)$

தீர்வு

(i) $(2a+3b)^2 = (2a)^2+2(2a)(3b)+(3b)^2$
$= 4a^2+12ab+9b^2$

(ii) $(3x-4y)^2 = (3x)^2-2(3x)(4y)+(4y)^2$
$= 9x^2-24xy+16y^2$

(iii) $(4x+5y)(4x-5y) = (4x)^2-(5y)^2$
$= 16x^2-25y^2$

(iv) $(y+7)(y+5) = y^2+(7+5)y+(7)(5)$
$= y^2+12y+35$

4.6.1 $(x \pm y \pm z)^2$ –ன் விரிவாக்கம்

(i) $(x+y+z)^2 = (x+y+z)(x+y+z)$

$= x(x+y+z)+y(x+y+z)+z(x+y+z)$

$= x^2+xy+xz+yx+y^2+yz+zx+zy+z^2$

$= x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

$$(x+y+z)^2 \equiv x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$

(ii) $(x-y+z)^2 = [x+(-y)+z]^2$

$= x^2+(-y)^2+z^2+2(x)(-y)+2(-y)(z)+2(z)(x)$

$= x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$

$(x-y+z)^2 \equiv x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$

இதேபோன்று, பின்வரும் விரிவாக்கங்களும் கிடைக்கின்றன.

(iii) $(x+y-z)^2 \equiv x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2zx$

(iv) $(x-y-z)^2 \equiv x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$

எடுத்துக்காட்டு 4.18

விரித்தெழுதுக (i) $(2x+3y+5z)^2$ (ii) $(3a-7b+4c)^2$ (iii) $(3p+5q-2r)^2$ (iv) $(7l-9m-6n)^2$

தீர்வு

(i) $(2x+3y+5z)^2 = (2x)^2+(3y)^2+(5z)^2+2(2x)(3y)+2(3y)(5z)+2(5z)(2x)$

$= 4x^2+9y^2+25z^2+12xy+30yz+20zx$

(ii) $(3a-7b+4c)^2$

$= (3a)^2+(-7b)^2+(4c)^2+2(3a)(-7b)+2(-7b)(4c)+2(4c)(3a)$

$= 9a^2+49b^2+16c^2-42ab-56bc+24ca$

(iii) $(3p+5q-2r)^2$

$= (3p)^2+(5q)^2+(-2r)^2+2(3p)(5q)+2(5q)(-2r)+2(-2r)(3p)$

$= 9p^2+25q^2+4r^2+30pq-20qr-12rp$

(iv) $(7l-9m-6n)^2$

$= (7l)^2+(-9m)^2+(-6n)^2+2(7l)(-9m)+2(-9m)(-6n)+2(-6n)(7l)$

$= 49l^2+81m^2+36n^2-126lm+108mn-84nl$

4.6.2 முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி $(x+a)(x+b)(x+c)$–ன் பெருக்கற்பலன் காணல்

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c) &= [(x+a)(x+b)](x+c)\\ &= [x^2+(a+b)x+ab](x+c)\\ &= x^3+(a+b)x^2+abx+cx^2+c(a+b)x+abc\\ &= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc\end{aligned}$$

$$\boxed{(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc}$$

4.6.3 $(x \pm y)^3$ -ன் விரிவாக்கம்

மேலே உள்ள முற்றொருமையில் $a = b = c = y$ என பிரதியிட,

$$(x+y)(x+y)(x+y) = x^3+(y+y+y)x^2+[(y)(y)+(y)(y)+(y)(y)]x+(y)(y)(y)$$

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= x^3+(3y)x^2+(3y^2)x+y^3\\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\end{aligned}$$

$$(x+y)^3 \equiv x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

(அல்லது) $(x+y)^3 \equiv x^3+y^3+3xy(x+y)$

மேலே உள்ள முற்றொருமையில் y-க்கு பதில் $-y$ என எடுத்துக்கொள்ள,

$$(x-y)^3 \equiv x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

(அல்லது) $(x-y)^3 \equiv x^3-y^3-3xy(x-y)$

4.6.2 மற்றும் 4.6.3-ல் உள்ள முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் கணக்குகளைத் தீர்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.19

பெருக்கற் பலன் காண்க. (i) $(x+2)(x+5)(x+7)$

(ii) $(a-3)(a-5)(a-7)$

(iii) $(2a-5)(2a+5)(2a-3)$

தீர்வு

(i) $(x+2)(x+5)(x+7)$

$$\begin{aligned}&= x^3+(2+5+7)x^2+[(2)(5)+(5)(7)+(7)(2)]x+(2)(5)(7)\\ &= x^3+14x^2+(10+35+14)x+70\\ &= x^3+14x^2+59x+70\end{aligned}$$

(ii) $(a-3)(a-5)(a-7) = [a+(-3)][a+(-5)][a+(-7)]$

$= a^3 + (-3-5-7)a^2 + [(-3)(-5)+(-5)(-7)+(-7)(-3)]a + (-3)(-5)(-7)$

$= a^3 - 15a^2 + (15+35+21)a - 105$

$= a^3 - 15a^2 + 71a - 105$

(iii) $(2a-5)(2a+5)(2a-3) = [2a+(-5)][2a+5][2a+(-3)]$

$= (2a)^3 + (-5+5-3)(2a)^2 + [(-5)(5)+(5)(-3)+(-3)(-5)](2a) + (-5)(5)(-3)$

$= 8a^3 + (-3)4a^2 + (-25-15+15)2a + 75$

$= 8a^3 - 12a^2 - 50a + 75$

எடுத்துக்காட்டு 4.20

$a+b+c = 15$ மற்றும் $ab+bc+ca = 25$ எனில், $a^2+b^2+c^2$ ஐ காண்க.

தீர்வு $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$.

எனவே, $15^2 = a^2+b^2+c^2+2(25)$

$225 = a^2+b^2+c^2+50$

$\therefore a^2+b^2+c^2 = 225-50 = 175$

எடுத்துக்காட்டு 4.21

விரித்தெழுதுக. (i) $(3a+4b)^3$ (ii) $(2x-3y)^3$

தீர்வு

(i) $(3a+4b)^3 = (3a)^3 + 3(3a)^2(4b) + 3(3a)(4b)^2 + (4b)^3$

$= 27a^3 + 108a^2b + 144ab^2 + 64b^3$

(ii) $(2x-3y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3$

$= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

எடுத்துக்காட்டு 4.22

தகுந்த முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் ஒவ்வொன்றினையும் மதிப்பிடுக.

(i) $(105)^3$ (ii) $(999)^3$

தீர்வு

(i) $(105)^3 = (100+5)^3$

$= (100)^3 + (5)^3 + 3(100)(5)(100+5) \quad (\because (x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y))$

$= 1000000 + 125 + 1500(105)$

$= 1000000 + 125 + 157500 = 1157625$

(ii) $(999)^3 = (1000-1)^3$

$$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000-1)$$

$$(\because (x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y))$$

$$= 1000000000 - 1 - 3000(999)$$

$$= 1000000000 - 1 - 2997000 = 997002999$$

x மற்றும் y-ன் கூட்டல், கழித்தல் மற்றும் பெருக்கலை உள்ளடக்கிய சில பயனுள்ள முற்றொருமைகள்.

$$x^3 + y^3 \equiv (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$
$$x^3 - y^3 \equiv (x-y)^3 + 3xy(x-y)$$

மேலே உள்ள முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி சில கணக்குகளைத் தீர்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.23

$x + y = 4$ மற்றும் $xy = 5$ எனில், $x^3 + y^3$ ஐக் காண்க.

தீர்வு $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ என நமக்குத் தெரியும்.

$\therefore \quad x^3 + y^3 = (4)^3 - 3(5)(4) = 64 - 60 = 4$

எடுத்துக்காட்டு 4.24

$x - y = 5$ மற்றும் $xy = 16$ எனில், $x^3 - y^3$ ஐக் காண்க.

தீர்வு $x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$ என நமக்குத் தெரியும்.

$\therefore \quad x^3 - y^3 = (5)^3 + 3(16)(5) = 125 + 240 = 365$

எடுத்துக்காட்டு 4.25

$x + \frac{1}{x} = 5$ எனில், $x^3 + \frac{1}{x^3}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ என நமக்குத் தெரியும்.

$y = \frac{1}{x}$ என பிரதியிட, $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$$= (5)^3 - 3(5) = 125 - 15 = 110$$

எடுத்துக்காட்டு 4.26

$y - \frac{1}{y} = 9$ எனில், $y^3 - \frac{1}{y^3}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$ என நமக்குத் தெரியும்.

$x = y, y = \frac{1}{y}$ என பிரதியிட, $y^3 - \frac{1}{y^3} = \left(y - \frac{1}{y}\right)^3 + 3\left(y - \frac{1}{y}\right)$

$$= (9)^3 + 3(9) = 729 + 27 = 756$$

பின்வரும் முற்றொருமை மேற்படிப்புகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

குறிப்பு $x+y+z = 0$ எனில், $x^3+y^3+z^3= 3xyz$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.27

சுருக்குக $(x + 2y + 3z)(x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 2xy - 6yz - 3zx)$

தீர்வு $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ என நமக்குத் தெரியும்.

$\therefore \quad (x + 2y + 3z)(x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 2xy - 6yz - 3zx)$

$= (x + 2y + 3z)[x^2 + (2y)^2 + (3z)^2 - (x)(2y) - (2y)(3z) - (3z)(x)]$

$= (x)^3 + (2y)^3 + (3z)^3 - 3(x)(2y)(3z)$

$= x^3 + 8y^3 + 27z^3 - 18xyz$

எடுத்துக்காட்டு 4.28

மதிப்பிடுக $12^3 + 13^3 - 25^3$

தீர்வு $x = 12,\ y = 13,\ z = -25$ என்க. பின்னர்,

$$x + y + z = 12 + 13 - 25 = 0$$

$x + y + z = 0$ எனில், $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ என நமக்குத் தெரியும்.

$$\therefore 12^3 + 13^3 - 25^3 = 12^3 + 13^3 + (-25)^3 = 3(12)(13)(-25) = -11700$$

பயிற்சி 4.5

1. பின்வருவனவற்றை விரித்தெழுதுக.

   (i) $(5x + 2y + 3z)^2$ (ii) $(2a + 3b - c)^2$ (iii) $(x - 2y - 4z)^2$ (iv) $(p - 2q + r)^2$

2. விரிவுக் காண்க.

   (i) $(x + 1)(x + 4)(x + 7)$ (ii) $(p + 2)(p - 4)(p + 6)$

   (iii) $(x + 5)(x - 3)(x - 1)$ (iv) $(x - a)(x - 2a)(x - 4a)$

   (v) $(3x + 1)(3x + 2)(3x + 5)$ (vi) $(2x + 3)(2x - 5)(2x - 7)$

3. இயற்கணித முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி x^2-ன் கெழு, x-ன் கெழு மற்றும் மாறிலி உறுப்புகளைக் காண்க.

   (i) $(x + 7)(x + 3)(x + 9)$ (ii) $(x - 5)(x - 4)(x + 2)$

   (iii) $(2x + 3)(2x + 5)(2x + 7)$ (iv) $(5x + 2)(1 - 5x)(5x + 3)$

4. $(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3 - 10x^2 + 45x - 15$ எனில், $a+b+c$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ மற்றும் $a^2+b^2+c^2$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. விரித்தெழுதுக : (i) $(3a+5b)^3$ (ii) $(4x-3y)^3$ (iii) $\left(2y-\frac{3}{y}\right)^3$

6. மதிப்புக் காண்க : (i) 99^3 (ii) 101^3 (iii) 98^3 (iv) 102^3 (v) 1002^3

7. $2x+3y=13$ மற்றும் $xy=6$ எனில், $8x^3+27y^3$ ஐக் காண்க.

8. $x-y=-6$ மற்றும் $xy=4$ எனில், x^3-y^3-ன் மதிப்பைக் காண்க.

9. $x+\frac{1}{x}=4$ எனில், $x^3+\frac{1}{x^3}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

10. $x-\frac{1}{x}=3$ எனில், $x^3-\frac{1}{x^3}$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

11. சுருக்குக : (i) $(2x+y+4z)(4x^2+y^2+16z^2-2xy-4yz-8zx)$

(ii) $(x-3y-5z)(x^2+9y^2+25z^2+3xy-15yz+5zx)$

12. மதிப்புக் காண்க : (i) $6^3-9^3+3^3$ (ii) $16^3-6^3-10^3$

4.7 பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துதல் (Factorization of Polynomials)

இயற்கணித கோவைகளின் பெருக்கற் பலனைக் கோவைகளின் கூடுதலாகவோ அல்லது வித்தியாசமாகவோ எவ்வாறு பங்கீட்டு பண்பைப் பயன்படுத்தி பிரித்து எழுதுவதைப் பற்றி கண்டோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $x(x+y) = x^2 + xy$

(ii) $x(y-z) = xy - xz$

(iii) $a(a^2-2a+1) = a^3 - 2a^2 + a$

இனி, கோவைகளின் கூடுதல் அல்லது வித்தியாசங்களை எவ்வாறு பெருக்கற் பலனாக மாற்றுவது என்பதைக் கற்போம்.

இப்போது, $ab+ac$ -ஐ எடுத்துக்கொள்க. பங்கீட்டு விதியைப் பயன்படுத்தி $a(b+c) = ab+ac$ என்பதை மாற்றுமுறையில் $ab+ac = a(b+c)$ என எழுதலாம். இம்முறையில் $ab+ac$ என்பதை $a(b+c)$ என எழுதுவது காரணிபடுத்துதல் எனப்படும். ab மற்றும் ac என்ற இரண்டு உறுப்புகளில் a என்பது ஒரு பொதுக் காரணி. இதேபோன்று,

$5m + 15 = 5(m) + 5(3) = 5(m+3)$.

$b(b-5) + g(b-5)$ ல் $(b-5)$ என்பது பொதுக் காரணி.

$b(b-5) + g(b-5) = (b-5)(b+g)$

எடுத்துக்காட்டு 4.29

பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $pq + pr - 3ps$ (ii) $4a - 8b + 5ax - 10bx$ (iii) $2a^3 + 4a^2$ (iv) $6a^5 - 18a^3 + 42a^2$

தீர்வு

(i) $pq + pr - 3ps = p(q + r - 3s)$

(ii) $4a - 8b + 5ax - 10bx = (4a - 8b) + (5ax - 10bx)$

$= 4(a - 2b) + 5x(a - 2b) = (a - 2b)(4 + 5x)$

(iii) $2a^3 + 4a^2$

$2a^2$ என்பது $2a^3$ மற்றும் $4a^2$ ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொதுக் காரணி.

$\therefore 2a^3 + 4a^2 = 2a^2(a + 2)$.

(iv) $6a^5 - 18a^3 + 42a^2$

$6a^2$ என்பது $6a^5$, $-18a^3$ மற்றும் $42a^2$ ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொதுக் காரணி.

$\therefore 6a^5 - 18a^3 + 42a^2 = 6a^2(a^3 - 3a + 7)$

4.7.1 முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்துதல்.

(i) $a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a + b)^2$

(ii) $a^2 - 2ab + b^2 \equiv (a - b)^2$ **(அல்லது)** $a^2 - 2ab + b^2 \equiv (-a + b)^2$

(iii) $a^2 - b^2 \equiv (a + b)(a - b)$

(iv) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \equiv (a + b + c)^2$

எடுத்துக்காட்டு 4.30

காரணிப்படுத்துக (i) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ (ii) $16a^2 - 8a + 1$ (iii) $9a^2 - 16b^2$

(iv) $(a + b)^2 - (a - b)^2$ (v) $25(a + 2b - 3c)^2 - 9(2a - b - c)^2$ (vi) $x^5 - x$

தீர்வு

(i) $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = (2x + 3y)^2$

(ii) $16a^2 - 8a + 1 = (4a)^2 - 2(4a)(1) + (1)^2 = (4a - 1)^2$ **(அல்லது)** $(1 - 4a)^2$

(iii) $9a^2 - 16b^2 = (3a)^2 - (4b)^2 = (3a + 4b)(3a - 4b)$

(iv) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = [(a + b) + (a - b)][(a + b) - (a - b)]$

$= (a + b + a - b)(a + b - a + b) = (2a)(2b) = (4)(a)(b)$

(v) $25(a + 2b - 3c)^2 - 9(2a - b - c)^2 = [5(a + 2b - 3c)]^2 - [3(2a - b - c)]^2$

$= [5(a + 2b - 3c) + 3(2a - b - c)]\,[5(a + 2b - 3c) - 3(2a - b - c)]$

$= (5a + 10b - 15c + 6a - 3b - 3c)(5a + 10b - 15c - 6a + 3b + 3c)$

$= (11a + 7b - 18c)(-a + 13b - 12c)$

(vi) $x^5 - x = x(x^4 - 1) = x[(x^2)^2 - (1)^2]$

$$= x(x^2+1)(x^2-1) = x(x^2+1)[(x)^2 - (1)^2]$$

$$= x(x^2+1)(x+1)(x-1)$$

4.7.2 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \equiv (a+b+c)^2$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்துதல்.

எடுத்துக்காட்டு 4.31

காரணிப்படுத்துக $a^2 + 4b^2 + 36 - 4ab - 24b + 12a$

தீர்வு $a^2 + 4b^2 + 36 - 4ab - 24b + 12a$

$$= (a)^2 + (-2b)^2 + (6)^2 + 2(a)(-2b) + 2(-2b)(6) + 2(6)(a) = (a - 2b + 6)^2$$

குறிப்பு:
$(a - 2b + 6)^2 = [(-1)(-a + 2b - 6)]^2 = (-1)^2(-a + 2b - 6)^2 = (-a + 2b - 6)^2$

எடுத்துக்காட்டு 4.32

காரணிப்படுத்துக $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy + 6yz - 12zx$

தீர்வு $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy + 6yz - 12zx$

$$= (2x)^2 + (-y)^2 + (-3z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(-3z) + 2(-3z)(2x)$$

$= (2x - y - 3z)^2$ (அல்லது) $(-2x + y + 3z)^2$

4.7.3 $x^3 + y^3$ மற்றும் $x^3 - y^3$ ஆகியவற்றைக் காரணிப்படுத்துதல்

$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x+y)^3$ என நமக்குத் தெரியும்.

அதாவது, $x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = (x+y)^3$

$$\Longrightarrow x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$

$$= (x+y)[(x+y)^2 - 3xy]$$

$$= (x+y)(x^2 + 2xy + y^2 - 3xy)$$

$$= (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 \equiv (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x-y)^3$ என நமக்குத் தெரியும்.

அதாவது, $x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = (x-y)^3$

$$\Longrightarrow x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$$
$$= (x-y)\left[(x-y)^2 + 3xy\right]$$
$$= (x-y)(x^2 - 2xy + y^2 + 3xy)$$
$$= (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$\boxed{x^3 - y^3 \equiv (x-y)(x^2 + xy + y^2)}$$

மேலே உள்ள முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.33

காரணிப்படுத்துக (i) $8x^3 + 125y^3$ (ii) $27x^3 - 64y^3$

தீர்வு

(i) $8x^3 + 125y^3 = (2x)^3 + (5y)^3$
$$= (2x+5y)[(2x)^2 - (2x)(5y) + (5y)^2]$$
$$= (2x+5y)(4x^2 - 10xy + 25y^2)$$

(ii) $27x^3 - 64y^3 = (3x)^3 - (4y)^3$
$$= (3x-4y)[(3x)^2 + (3x)(4y) + (4y)^2]$$
$$= (3x-4y)(9x^2 + 12xy + 16y^2)$$

பயிற்சி 4.6

1. பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக.
   (i) $2a^3 - 3a^2b + 2a^2c$ (ii) $16x + 64x^2y$ (iii) $10x^3 - 25x^4y$
   (iv) $xy - xz + ay - az$ (v) $p^2 + pq + pr + qr$
2. பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக.
   (i) $x^2 + 2x + 1$ (ii) $9x^2 - 24xy + 16y^2$
   (iii) $b^2 - 4$ (iv) $1 - 36x^2$
3. பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக.
   (i) $p^2 + q^2 + r^2 + 2pq + 2qr + 2rp$ (ii) $a^2 + 4b^2 + 36 - 4ab + 24b - 12a$
   (iii) $9x^2 + y^2 + 1 - 6xy + 6x - 2y$ (iv) $4a^2 + b^2 + 9c^2 - 4ab - 6bc + 12ca$
   (v) $25x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 20xy + 12yz - 30zx$
4. பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக.
   (i) $27x^3 + 64y^3$ (ii) $m^3 + 8$ (iii) $a^3 + 125$
   (iv) $8x^3 - 27y^3$ (v) $x^3 - 8y^3$

4.7.4 $ax^2+bx+c;\ a \neq 0$ என்ற வடிவில் உள்ள இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துதல்

இதுவரை பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் குறிப்பிட்ட வகைகளை, முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி காரணிப்படுத்துதலைப் பார்த்தோம். இப்பகுதியில் (i) a = 1 மற்றும் (ii) $a \neq 1$ எனும்போது, ax^2+bx+c என்ற இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவையை முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தாமல் எவ்வாறு இரு நேரியப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளாக பிரிப்பது என்பதைப் பார்ப்போம்.

(i) x^2+bx+c என்ற வடிவில் உள்ள இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தல்.

$(x+p)$ மற்றும் $(x+q)$ என்பன x^2+bx+c-ன் இரண்டு காரணிகள் எனில், நாம் பெறுவது,

$$\begin{aligned} x^2+bx+c &= (x+p)(x+q) \\ &= x(x+p)+q(x+p) \\ &= x^2+px+qx+pq \\ &= x^2+(p+q)x+pq \end{aligned}$$

இதிலிருந்து, $x^2+bx+c = (x+p)(x+q)$ எனக் காரணிப்படுத்த p , q என்ற இரு எண்களை $c = pq$ மற்றும் $b = p+q$ என்றவாறு காண வேண்டும்.

பின்வரும் கணக்குகளைக் காரணிப்படுத்த இந்த அடிப்படை யுக்தியைப் பயன்படுத்துவோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(1) $x^2+8x+15 = (x+3)(x+5)$

இங்கு $c = 15 = 3 \times 5$ மற்றும் $3+5 = 8 = b$

(2) $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$

இங்கு $c = 6 = (-2)\times(-3)$ மற்றும் $(-2)+(-3) = -5 = b$

(3) $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$

இங்கு $c = -2 = (+2)\times(-1)$ மற்றும் $(+2)+(-1) = 1 = b$

(4) $x^2-4x-12 = (x-6)(x+2)$

இங்கு $c = -12 = (-6)\times(+2)$ மற்றும் $(-6)+(+2) = -4 = b$

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் மாறிலி உறுப்பின் இரு காரணிகள், அவற்றின் கூடுதல் x-ன் கெழுவிற்குச் சமமாக உள்ளவாறு கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4.34

பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $x^2+9x+14$ (ii) $x^2-9x+14$ (iii) $x^2+2x-15$ (iv) $x^2-2x-15$

தீர்வு

(i) $x^2+9x+14$

காரணிப்படுத்த p, q என்ற இரு எண்களை $pq=14$ மற்றும் $p+q=9$ என்றவாறு நாம் காணவேண்டும்.

$$\begin{aligned} x^2+9x+14 &= x^2+2x+7x+14 \\ &= x(x+2)+7(x+2) \\ &= (x+2)(x+7) \\ \therefore\ x^2+9x+14 &= (x+7)(x+2) \end{aligned}$$

14 -ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
1, 14	15
2, 7	9
தேவையான காரணிகள் 2, 7	

(ii) $x^2-9x+14$

காரணிப்படுத்த p, q என்ற இரு எண்களை $pq=14$ மற்றும் $p+q=-9$ என்றவாறு நாம் காணவேண்டும்.

$$\begin{aligned} x^2-9x+14 &= x^2-2x-7x+14 \\ &= x(x-2)-7(x-2) \\ &= (x-2)(x-7) \\ \therefore\ x^2-9x+14 &= (x-2)(x-7) \end{aligned}$$

14 -ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
–1, –14	–15
–2, –7	–9
தேவையான காரணிகள்–2, –7	

(iii) $x^2+2x-15$

காரணிப்படுத்த p, q என்ற இரு எண்களை $pq=-15$ மற்றும் $p+q=2$ என்றவாறு நாம் காணவேண்டும்.

$$\begin{aligned} x^2+2x-15 &= x^2-3x+5x-15 \\ &= x(x-3)+5(x-3) \\ &= (x-3)(x+5) \\ \therefore\ x^2+2x-15 &= (x-3)(x+5) \end{aligned}$$

–15 -ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
–1, 15	14
–3, 5	2
தேவையான காரணிகள் –3, 5	

(iv) $x^2-2x-15$

காரணிப்படுத்த p, q என்ற இரு எண்களை $pq=-15$ மற்றும் $p+q=-2$ என்றவாறு நாம் காணவேண்டும்.

$$\begin{aligned} x^2-2x-15 &= x^2+3x-5x-15 \\ &= x(x+3)-5(x+3) \\ &= (x+3)(x-5) \\ \therefore\ x^2-2x-15 &= (x+3)(x-5) \end{aligned}$$

–15 -ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
1, –15	–14
3, –5	–2
தேவையான காரணிகள் 3, –5	

(ii) ax^2+bx+c என்ற வடிவில் உள்ள இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துதல்

$a \neq 1$ என்பதால் ax^2+bx+c-ன் நேரிய காரணிகள் $(rx+p)$ மற்றும் $(sx+q)$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.

எனவே, $ax^2+bx+c = (rx+p)(sx+q)$
$= rsx^2+(ps+qr)x+pq$

இருபுறமும் x^2-ன் கெழுக்களை ஒப்பிட, நாம் பெறுவது $a = rs$ இதேபோன்று x-ன் கெழுக்களை ஒப்பிட, நாம் பெறுவது $b = ps+qr$ மற்றும் மாறிலி உறுப்புக்களை ஒப்பிட, பெறுவது $c = pq$

இவை நமக்குத் தெரிவிப்பது என்ன வெனில், ps மற்றும் qr என்ற இரு மெய்யெண்களின் கூடுதல் b மற்றும் அவ்வெண்களின் பெருக்கல் $(ps)\times(qr) = (pr)\times(sq) = ac$

எனவே, ax^2+bx+c-ஐக் காரணிப்படுத்த, நாம் இரு எண்களின் கூடுதல் b-க்கு சமமாகவும் அவற்றின் பெருக்கற்பலன் ac-க்கு சமமாகவும் இருக்குமாறு காணவேண்டும்.

ax^2+bx+c-ஐ காரணிப்படுத்த பின்பற்ற வேண்டிய படிகள் பின்வருமாறு.

படி 1 : x^2-ன் கெழுவை மாறிலி உறுப்புடன் பெருக்க வேண்டும்.

படி 2 : இப்பெருக்கற்பலனை இருகாரணிகளாகப் பிரிக்க வேண்டும். அவ்வாறு பிரிக்கும் போது காரணிகளின் கூடுதல் x-ன் கெழுவிற்குச் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

படி 3 : இப்பெருக்கற்பலனை இரு சோடிகளாகப் பிரித்து காரணிப்படுத்தவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.35

பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $2x^2+15x+27$ (ii) $2x^2-15x+27$

(iii) $2x^2+15x-27$ (iv) $2x^2-15x-27$

தீர்வு

(i) $2x^2+15x+27$

x^2-ன் கெழு $= 2$; மாறிலி உறுப்பு $= 27$

$\therefore$ அவற்றின் பெருக்கல் $= 2\times 27 = 54$

x-ன் கெழு $= 15$

அதாவது, நாம் காண வேண்டிய இரு எண்களின் பெருக்கல் 54 மற்றும் அவற்றின் கூடுதல் 15

54 -ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
1, 54	55
2, 27	29
3, 18	21
6, 9	15
தேவையான காரணிகள் 6, 9	

அவ்விரு எண்கள் 6 மற்றும் 9

$$2x^2+15x+27 = 2x^2+6x+9x+27$$
$$= 2x(x+3)+9(x+3)$$
$$= (x+3)(2x+9)$$

$$\therefore\ 2x^2+15x+27 = (x+3)(2x+9)$$

(ii) $2x^2 - 15x + 27$

x^2-ன் கெழு = 2 ; மாறிலி உறுப்பு = 27

அவற்றின் பெருக்கல் = $2 \times 27 = 54$

x-ன் கெழு = –15

∴ இரு எண்களின் பெருக்கல் = 54;

அவற்றின் கூடுதல் = –15

54 -ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
–1, –54	–55
–2, –27	–29
–3, –18	–21
–6, –9	–15
தேவையான காரணிகள்	–6, –9

$$2x^2 - 15x + 27 = 2x^2 - 6x - 9x + 27$$
$$= 2x(x-3) - 9(x-3)$$
$$= (x-3)(2x-9)$$
$$\therefore 2x^2 - 15x + 27 = (x-3)(2x-9)$$

(iii) $2x^2 + 15x - 27$

x^2-ன் கெழு = 2 ; மாறிலி உறுப்பு = – 27

அவற்றின் பெருக்கல்= $2 \times -27 = -54$

x-ன் கெழு = 15

∴ இரு எண்களின் பெருக்கல் = –54;

அவற்றின் கூடுதல் = 15

–54 -ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
–1, 54	53
–2, 27	25
–3, 18	15
தேவையான காரணிகள்	–3, 18

$$2x^2 + 15x - 27 = 2x^2 - 3x + 18x - 27$$
$$= x(2x-3) + 9(2x-3)$$
$$= (2x-3)(x+9)$$
$$\therefore 2x^2 + 15x - 27 = (2x-3)(x+9)$$

(iv) $2x^2 - 15x - 27$

x^2-ன் கெழு = 2 ; மாறிலி உறுப்பு = –27

அவற்றின் பெருக்கல்= $2 \times -27 = -54$

x-ன் கெழு = –15

∴ இரு எண்களின் பெருக்கல் = –54;

அவற்றின் கூடுதல் = –15

–54 -ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
1, –54	–53
2, –27	–25
3, –18	–15
தேவையான காரணிகள்	3, –18

$$2x^2 - 15x - 27 = 2x^2 + 3x - 18x - 27$$
$$= x(2x+3) - 9(2x+3)$$
$$= (2x+3)(x-9)$$
$$\therefore 2x^2 - 15x - 27 = (2x+3)(x-9)$$

எடுத்துக்காட்டு 4.36

காரணிப்படுத்துக $(x+y)^2+9(x+y)+8$

தீர்வு $x+y=p$ என்க.

பின்னர் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு p^2+9p+8 என மாறுகிறது.

p^2-ன் கெழு = 1; மாறிலி உறுப்பு = 8

அவற்றின் பெருக்கல் = $1\times 8 = 8$

p-ன் கெழு = 9

$\therefore$ இரு எண்களின் பெருக்கல் = 8;

அவற்றின் கூடுதல் = 9

8 -ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூடுதல்
1, 8	9
தேவையான காரணிகள்	1, 8

$$p^2+9p+8 = p^2+p+8p+8$$
$$= p(p+1)+8(p+1)$$
$$= (p+1)(p+8)$$

$p=x+y$ எனப் பிரதியிட கிடைப்பது,

$$(x+y)^2+9(x+y)+8 = (x+y+1)(x+y+8)$$

எடுத்துக்காட்டு 4.37

காரணிப்படுத்துக (i) x^3-2x^2-x+2 (ii) x^3+3x^2-x-3

தீர்வு

(i) $p(x)=x^3-2x^2-x+2$ என்க.

$p(x)$ என்பது முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை, எனவே இதற்கு மூன்று நேரிய காரணிகள் இருக்கலாம். மாறிலி உறுப்பு 2. 2-ன் காரணிகள் –1, 1, –2 மற்றும் 2 ஆகும்.

$p(-1)=(-1)^3-2(-1)^2-(-1)+2 = -1-2+1+2=0$

$\therefore$ $(x+1)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$p(1)=(1)^3-2(1)^2-1+2 = 1-2-1+2=0$

$\therefore$ $(x-1)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$p(-2)=(-2)^3-2(-2)^2-(-2)+2 = -8-8+2+2=-12\neq 0$

$\therefore$ $(x+2)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகாது.

$p(2)=(2)^3-2(2)^2-2+2 = 8-8-2+2=0$

$\therefore$ $(x-2)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$p(x)$-ன் மூன்று காரணிகள் $(x+1),(x-1)$ மற்றும் $(x-2)$ ஆகும்.

$\therefore$ $x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-1)(x-2)$.

மாற்று முறை

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x-2) - 1(x-2)$$
$$= (x-2)(x^2-1)$$
$$= (x-2)(x+1)(x-1) \qquad [\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ என்க.

$p(x)$ என்பது முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை, எனவே இதற்கு மூன்று நேரிய காரணிகள் இருக்கலாம்.மாறிலி உறுப்பு -3. -3 -ன் காரணிகள் $-1, 1, -3$ மற்றும் 3 ஆகும்.

$$p(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - (-1) - 3 = -1 + 3 + 1 - 3 = 0$$

$\therefore (x+1)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$$p(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 1 - 3 = 1 + 3 - 1 - 3 = 0$$

$\therefore (x-1)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$$p(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - (-3) - 3 = -27 + 27 + 3 - 3 = 0$$

$\therefore (x+3)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$p(x)$-ன் மூன்று காரணிகள் $(x+1), (x-1)$ மற்றும் $(x+3)$ ஆகும்.

$$\therefore x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x+1)(x-1)(x+3).$$

பயிற்சி 4.7

1. பின்வரும் ஒவ்வொன்றினையும் காரணிப்படுத்துக.

(i) $x^2 + 15x + 14$ (ii) $x^2 + 13x + 30$ (iii) $y^2 + 7y + 12$
(iv) $x^2 - 14x + 24$ (v) $y^2 - 16y + 60$ (vi) $t^2 - 17t + 72$
(vii) $x^2 + 14x - 15$ (viii) $x^2 + 9x - 22$ (ix) $y^2 + 5y - 36$
(x) $x^2 - 2x - 99$ (xi) $m^2 - 10m - 144$ (xii) $y^2 - y - 20$

2. பின்வரும் ஒவ்வொன்றினையும் காரணிப்படுத்துக.

(i) $3x^2 + 19x + 6$ (ii) $5x^2 + 22x + 8$ (iii) $2x^2 + 9x + 10$
(iv) $14x^2 + 31x + 6$ (v) $5y^2 - 29y + 20$ (vi) $9y^2 - 16y + 7$
(vii) $6x^2 - 5x + 1$ (viii) $3x^2 - 10x + 8$ (ix) $3x^2 + 5x - 2$
(x) $2a^2 + 17a - 30$ (xi) $11 + 5x - 6x^2$ (xii) $8x^2 + 29x - 12$
(xiii) $2x^2 - 3x - 14$ (xiv) $18x^2 - x - 4$ (xv) $10 - 7x - 3x^2$

3. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $(a+b)^2 + 9(a+b) + 14$ (ii) $(p-q)^2 - 7(p-q) - 18$

4. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $x^3 + 2x^2 - x - 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - x + 3$
(iii) $x^3 + x^2 - 4x - 4$ (iv) $x^3 + 5x^2 - x - 5$

4.8 நேரியச் சமன்பாடுகள் (Linear Equations)

a, b ஆகியன மாறிலிகளாகவும் மற்றும் $a \neq 0$ எனவும் கொண்ட $ax + b = 0$ என்றமைந்த ஒரு மாறியில் உள்ள நேரியச் சமன்பாடுகளை நினைவு கூர்வோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $3x + 2 = 8$ ஐ தீர்ப்போம்.

$$3x = 8 - 2 \implies 3x = 6 \implies x = \frac{6}{3} \implies x = 2$$

உண்மையில், ஒரு மாறியைக் கொண்ட நேரியச்சமன்பாட்டுக்கு ஒரே ஒரு (தனித்த) **தீர்வு** மட்டுமே உண்டு.

4.8.1 இரு மாறிகளில் ஒரு சோடி நேரியச் சமன்பாடுகள்

இரு மாறிகளில் உள்ள நேரியச் சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம் $ax + by = c$, இங்கு a, b மற்றும் c என்பன மாறிலிகள் மேலும் $a \neq 0$, $b \neq 0$.

x, y என்ற இருமாறிகளில் அமைந்த ஒரு சோடி நேரியச் சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (2)$$

இங்கு, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 மற்றும் c_2 என்பன மாறிலிகள் மற்றும் $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ மற்றும் $b_2 \neq 0$.

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் (x_0, y_0) நிவர்த்தி செய்தால், (x_0, y_0) என்பது இவ்விரு சமன்பாடுகளின் ஒரு **தீர்வு** ஆகும். ஆகவே, இவ்விரு சமன்பாடுகளுக்கும் **தீர்வு** காண்பது அவற்றை நிறைவு செய்யும் வரிசைச் சோடி (x_0, y_0) ஐ கண்டுபிடிப்பதாகும்.

பிரதியிடும் முறை, நீக்கல் முறை மற்றும் குறுக்குப் பெருக்கல் முறை ஆகியன சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்குத் **தீர்வு** காணும் சில முறைகள் ஆகும்.

இப்பாடப்பகுதியில் பிரதியிடும் முறையை மட்டுமே எடுத்துக்கொண்டு இருமாறிகளில் உள்ள நேரியச் சமன்பாடுகளுக்குத் **தீர்வு** காண்போம்.

பிரதியிடும் முறை (Substitution Method)

இந்த முறையில், ஒரு சமன்பாட்டில் உள்ள இரு மாறிகளில் ஒன்றை மற்றதின் சார்பாக கண்டுபிடித்து பின்னர் அதை அடுத்த சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு **தீர்வு** காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.38

பின்வரும் ஒருசோடி சமன்பாடுகளை பிரதியிடும் முறையில் தீர்க்க.

$2x + 5y = 2$ மற்றும் $x + 2y = 3$

தீர்வு $2x + 5y = 2 \qquad (1)$

$x + 2y = 3 \qquad (2)$

சமன்பாடு (2)-ல் இருந்து, $x = 3 - 2y$ (3)

எனக் கிடைக்கிறது.

x-ன் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட, $2(3-2y)+5y = 2$

$$\Longrightarrow 6 - 4y + 5y = 2$$

$$-4y + 5y = 2 - 6$$

$\therefore\ y = -4$ எனக் கிடைக்கிறது.

$y = -4$ என (3)-ல் பிரதியிட,

$x = 3 - 2(-4) = 3 + 8 = 11$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\therefore$ **தீர்வு** $x = 11$ மற்றும் $y = -4$

எடுத்துக்காட்டு 4.39

$x + 3y = 16,\ 2x - y = 4$ ஐ பிரதியிடும் முறையில் தீர்.

தீர்வு

$$x + 3y = 16 \qquad (1)$$

$$2x - y = 4 \qquad (2)$$

சமன்பாடு (1)-ல் இருந்து, $x = 16 - 3y$ (3)

எனக் கிடைக்கிறது.

x-ன் மதிப்பை (2)-ல் பிரதியிட,

$$2(16-3y) - y = 4$$

$$\Longrightarrow 32 - 6y - y = 4$$

$$-6y - y = 4 - 32$$

$$-7y = -28$$

$y = \dfrac{-28}{-7} = 4$ எனக் கிடைக்கிறது.

$y = 4$ என (3)-ல் பிரதியிட, $x = 16 - 3(4)$

$= 16 - 12 = 4$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\therefore$ **தீர்வு** $x = 4$ மற்றும் $y = 4$.

எடுத்துக்காட்டு 4.40

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 4$ மற்றும் $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 7\ (x \neq 0, y \neq 0)$ என்பதைப் பிரதியிடும் முறையில் தீர்.

தீர்வு

$\dfrac{1}{x} = a$ மற்றும் $\dfrac{1}{y} = b$ என்க.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு மாறுகின்றன.

$$a + b = 4 \quad (1)$$

$$2a + 3b = 7 \quad (2)$$

சமன்பாடு (1)-ல் இருந்து, $b = 4 - a$ (3)

எனக் கிடைக்கிறது.

b-ன் மதிப்பை (2)-ல் பிரதியிட, $2a + 3(4 - a) = 7$

$$\Longrightarrow 2a + 12 - 3a = 7$$

$$2a - 3a = 7 - 12$$

$-a = -5 \Longrightarrow a = 5$ எனக் கிடைக்கிறது.

$a = 5$ என (3)-ல் பிரதியிட, $b = 4 - 5 = -1$

ஆனால், $\frac{1}{x} = a \Rightarrow x = \frac{1}{a} = \frac{1}{5}$

$$\frac{1}{y} = b \Rightarrow y = \frac{1}{b} = \frac{1}{-1} = -1$$

$\therefore$ **தீர்வு** $x = \frac{1}{5}$, $y = -1$

எடுத்துக்காட்டு 4.41

ஒரு பேனா மற்றும் ஒரு நோட்டுப் புத்தகம் சேர்ந்து விலை ₹ 60. பேனாவின் விலை நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலையை விட ₹ 10 குறைவு எனில், ஒவ்வொன்றின் விலையைக் காண்க.

தீர்வு ஒரு பேனாவின் விலை ₹ x என்க.

ஒரு நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை ₹ y என்க.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் படி, $x + y = 60$ (1)

$$x = y - 10 \quad (2)$$

x-ன் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட, $y - 10 + y = 60$

$$\Longrightarrow y + y = 60 + 10 \Longrightarrow 2y = 70$$

$$\therefore y = \frac{70}{2} = 35$$

$y = 35$ ஐ (2)-ல் பிரதியிட, $x = 35 - 10 = 25$

ஒரு பேனாவின் விலை ₹ 25.

ஒரு நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை ₹ 35.

எடுத்துக்காட்டு 4.42

மூன்று கணிதப் புத்தகங்கள் மற்றும் நான்கு அறிவியல் புத்தகங்களின் மொத்த விலை ₹ 216. மூன்று கணிதப் புத்தகங்களின் விலையும் நான்கு அறிவியல் புத்தகங்களின் விலையும் சமம் எனில், ஒவ்வொரு புத்தகத்தின் விலையைக் காண்க.

தீர்வு

ஒரு கணிதப் புத்தகத்தின் விலை ₹ x மற்றும் ஒரு அறிவியல் புத்தகத்தின் விலை ₹ y என்க. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் படி,

$$3x + 4y = 216 \quad (1)$$

$$3x = 4y \quad (2)$$

சமன்பாடு (2)-ல் இருந்து, $x = \frac{4y}{3}$ (3)

x-ன் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட, $3\left(\frac{4y}{3}\right) + 4y = 216$

$$\Longrightarrow 4y + 4y = 216 \Longrightarrow 8y = 216$$

$$\therefore y = \frac{216}{8} = 27$$

$y = 27$ என (3)-ல் பிரதியிட, $x = \frac{4(27)}{3} = 36$

$\therefore$ ஒரு கணிதப் புத்தகத்தின் விலை ₹ 36.

ஒரு அறிவியல் புத்தகத்தின் விலை ₹ 27.

எடுத்துக்காட்டு 4.43

தருமபுரி பேருந்து நிலையத்திலிருந்து பாலக்கோட்டிற்கு இரண்டு பயணச்சீட்டுகளும், காரிமங்கலத்திற்கு மூன்று பயணச்சீட்டுகளும் வாங்க மொத்த கட்டணம் ₹ 32. பாலக்கோட்டிற்கு மூன்று பயணச்சீட்டுகளும், காரிமங்கலத்திற்கு ஒரு பயணச்சீட்டும் வாங்க மொத்த கட்டணம் ₹ 27. தருமபுரியிலிருந்து பாலக்கோடு மற்றும் காரிமங்கலம் செல்ல கட்டணங்களைக் காண்க.

தீர்வு

தருமபுரியிலிருந்து பாலக்கோட்டிற்கு கட்டணம் ₹ x எனவும் மற்றும் காரிமங்கலத்திற்கு கட்டணம் ₹ y எனவும் கொள்க.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் படி,

$$2x + 3y = 32 \quad (1)$$

$$3x + y = 27 \quad (2)$$

சமன்பாடு (2)-ல் இருந்து, $y = 27 - 3x$ (3)

y-ன் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட, $2x + 3(27 - 3x) = 32$

$$\Longrightarrow 2x + 81 - 9x = 32$$

$$2x - 9x = 32 - 81$$

$$-7x = -49$$

$$\therefore x = \frac{-49}{-7} = 7$$

$x = 7$ என (3)-ல் பிரதியிட, $y = 27 - 3(7) = 27 - 21 = 6$

$\therefore$ தருமபுரியிலிருந்து பாலக்கோட்டிற்கு கட்டணம் ₹ 7, காரிமங்கலத்திற்கு கட்டணம் ₹ 6.

எடுத்துக்காட்டு 4.44

இரு எண்களின் கூடுதல் 55, அவற்றின் வித்தியாசம் 7 எனில், அந்த எண்களைக் காண்க.

தீர்வு

இரு எண்கள் x, y என்க. இங்கு $x > y$ என்போம்.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் படி, $x + y = 55$ (1)

$x - y = 7$ (2)

சமன்பாடு (2)-ல் இருந்து, $x = 7 + y$ (3)

x-ன் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட, $7 + y + y = 55$

$$\Longrightarrow 2y = 55 - 7 = 48$$

$$\therefore y = \frac{48}{2} = 24$$

$y = 24$ என (3)-ல் பிரதியிட, $x = 7 + 24 = 31$.

$\therefore$ தேவையான இரு எண்கள் 31 மற்றும் 24.

எடுத்துக்காட்டு 4.45

ஒரு இரண்டு இலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதல் 11. இலக்கங்களை இடமாற்றி அமைக்கும் போது கிடைக்கும் எண் முந்தைய எண்ணை விட 9 குறைவு எனில், அந்த எண்ணைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு

ஒரு இரண்டிலக்க எண்ணின் பத்தாம் இலக்கம் x எனவும் ஒன்றாம் இலக்கம் y எனவும் கொள்க. பிறகு அந்த எண் $10x + y$.

இலக்கங்களின் கூடுதல் $x + y = 11$ (1)

இலக்கங்களை இடமாற்றி அமைக்க கிடைக்கும் எண் $10y + x$.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின்படி, $(10x + y) - 9 = 10y + x$

$$\Longrightarrow 10x + y - 10y - x = 9$$

$$9x - 9y = 9$$

இருபுறமும் 9 ஆல் வகுக்க, $x - y = 1$ (2)

சமன்பாடு (2)-ல் இருந்து, $x = 1 + y$ (3)

x-ன் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட, $1 + y + y = 11$

$$\Longrightarrow 2y + 1 = 11$$

$$2y = 11 - 1 = 10$$

$\therefore y = \frac{10}{2} = 5$, $y = 5$ என (3) ல் பிரதியிட, $x = 1 + 5 = 6$

$\therefore$ அந்த எண் $10x + y = 10(6) + 5 = 65$

4.9 ஒரு மாறியில் உள்ள நேரிய அசமன்பாடுகள் (Linear Inequations in One Variable)

$x+4=6$ என்பது ஒரு மாறியில் அமைந்த நேரியச் சமன்பாடு ஆகும். இச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்க $x=2$ என கிடைக்கும். ஒரு மாறியில் உள்ள நேரியச்சமன்பாட்டில் மாறிக்கு ஒரே ஒரு மதிப்பு மட்டும் உண்டு.

$x+4>6$ என்ற அசமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

அதாவது, $x > 6-4$

$x > 2$

ஆகவே **2**-க்குஅதிகமான எந்த மெய்யெண்ணும் இந்த அசமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும். நிழலிடப்படாத வட்டப் பகுதி குறிக்கும் எண்ணை **தீர்வு** கணத்தில் சேர்க்கக் கூடாது என்பதைக் குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4.46

தீர்க்க $4(x-1)\le 8$

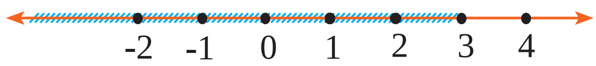
தீர்வு

$4(x-1)\le 8$

இருபுறமும் 4 ஆல் வகுக்க,

$x-1\le 2$

$\Longrightarrow \quad x\le 2+1 \Longrightarrow x\le 3$



மூன்று மற்றும் மூன்றுக்கு குறைவான அனைத்து மெய்யெண்களும் கொடுக்கப்பட்ட அசமன்பாட்டின் **தீர்வு**கள் ஆகும்.

நிழலிடப்பட்ட வட்டப்பகுதி குறிக்கும் எண்ணை **தீர்வு** கணத்தில் சேர்க்க வேண்டும் என்பதைக் குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4.47

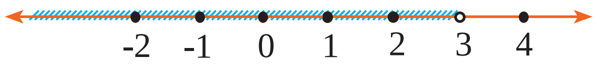
தீர்க்க $3(5-x)>6$

தீர்வு $3(5-x)>6$

இருபுறமும் 3 ஆல் வகுக்க, $5-x>2$

$\Longrightarrow -x > 2-5 \Longrightarrow -x > -3$

$\therefore\ x<3$ (கீழே கொடுத்துள்ள குறிப்புரையை பார்க்க)



மூன்றைவிட குறைவான அனைத்து மெய்யெண்களும் கொடுக்கப்பட்ட அசமன்பாட்டின் **தீர்வு**கள் ஆகும்.

குறிப்புரை (i) $-a>-b \Longrightarrow a<b$ (ii) $a<b \Longrightarrow \dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}\ ;\ a\neq 0, b\neq 0$

(iii) $a<b \Longrightarrow ka<kb$ for $k>0$ (iv) $a<b \Longrightarrow ka>kb\ ;\ k<0$

எடுத்துக்காட்டு 4.48

தீர்க்க $3 - 5x \leq 9$

தீர்வு $3 - 5x \leq 9$

$$\Longrightarrow -5x \leq 9 - 3 \Longrightarrow -5x \leq 6$$

$$\Longrightarrow 5x \geq -6 \Longrightarrow x \geq -\frac{6}{5} \Longrightarrow x \geq -1.2$$

-1.2 மற்றும் -1.2-க்கு அதிகமான அனைத்து மெண்யெண்களும் கொடுக்கப்பட்ட அசமன்பாட்டின் **தீர்வு**கள் ஆகும்.

பயிற்சி 4.8

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளை பிரதியிடும் முறையில் தீர்க்க.
   (i) $x + 3y = 10;\ 2x + y = 5$ (ii) $2x + y = 1;\ 3x - 4y = 18$
   (iii) $5x + 3y = 21;\ 2x - y = 4$ (iv) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 9;\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 12 \quad (x \neq 0, y \neq 0)$
   (v) $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 7;\ \frac{5}{x} - \frac{4}{y} = 6\ (x \neq 0, y \neq 0)$
2. கூடுதல் 24 மற்றும் வித்தியாசம் 8 என்றவாறு உள்ள இரு எண்களைக் காண்க.
3. ஒரு இரண்டிலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதல் 9. இலக்கங்களை இடமாற்ற கிடைக்கும் இரு இலக்க எண், முந்தைய எண்ணின் இருமடங்கைக் காட்டிலும் 18 அதிகம் எனில், அவ்வெண்ணைக் காண்க.
4 கவியிடமும் குறளிடமும் ஆப்பிள் பழங்கள் உள்ளன. " நீ எனக்கு 4 பழங்களைத் தந்தால், என்னிடம் உள்ள பழங்களின் எண்ணிக்கை உன்னிடம் உள்ளதைப் போல மூன்று மடங்கு", என கவி குறளிடம் கூறினார். "நீ எனக்கு 26 பழங்களைத் தந்தால் என்னிடம் உள்ள பழங்களின் எண்ணிக்கை, உன்னிடம் உள்ளதைப் போல இருமடங்காகும்", என குறள் பதிலளித்தார். ஒவ்வொருவரிடமும் எத்தனைப் பழங்கள் உள்ளன ?
5. பின்வரும் அசமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.
   (i) $2x + 7 > 15$ (ii) $2(x-2) < 3$ (iii) $2(x+7) \leq 9$ (iv) $3x + 14 \geq 8$

நினைவில் கொள்க

- x என்ற ஒரு மாறியில் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் இயற்கணித அமைப்பு $p(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\,,\, a_n \neq 0$ இங்கு $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ என்பன மாறிலிகள் மற்றும் n ஒரு குறையற்ற மிகை முழு.

- $p(x)$ என்பது x-ல் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை என்க. $p(a) = 0$ எனில், a என்பது $p(x)$-ன் ஒரு பூச்சியம் எனக் கூறுவோம்.

- $x = a$ என்பது $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்தால், $x = a$ என்பது $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் எனப்படும்

- மீதித் தேற்றம்: $p(x)$என்பது ஏதேனும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் என்க. $p(x)$ஐ $(x - a)$ என்ற நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுத்தால் மீதி $p(a)$ ஆகும்

- காரணித் தேற்றம்: $p(x)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் என்க. $p(a) = 0$ எனில், $(x-a)$ என்பது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

- $(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
- $(x + y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ $\qquad$ $x^3 + y^3 \equiv (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
- $(x - y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ $\qquad$ $x^3 - y^3 \equiv (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
- $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
- $(x + a)(x + b)(x + c) \equiv x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$

5 ஆயத்தொலை வடிவக்கணிதம்

I hope that posterity will judge me kindly, not only as to the things which I have explained, but also as to those which I have intentionally omitted so as to leave to others the pleasure of discovery

\- RENE DESCARTES

முதன்மைக் குறிக்கோள்கள்

- கார்டீசியன் ஆயத்தொலை முறையை புரிந்து கொள்ளுதல்.
- x மற்றும் y ஆயத்தொலைவுகளை அறிந்து கொள்ளுதல்.
- கார்டீசியன் தளத்தில் ஒரு புள்ளியை குறித்தல்.
- இரு புள்ளிகளுக்கு இடையிலான தொலைவைக் காணுதல்.

5.1 அறிமுகம்

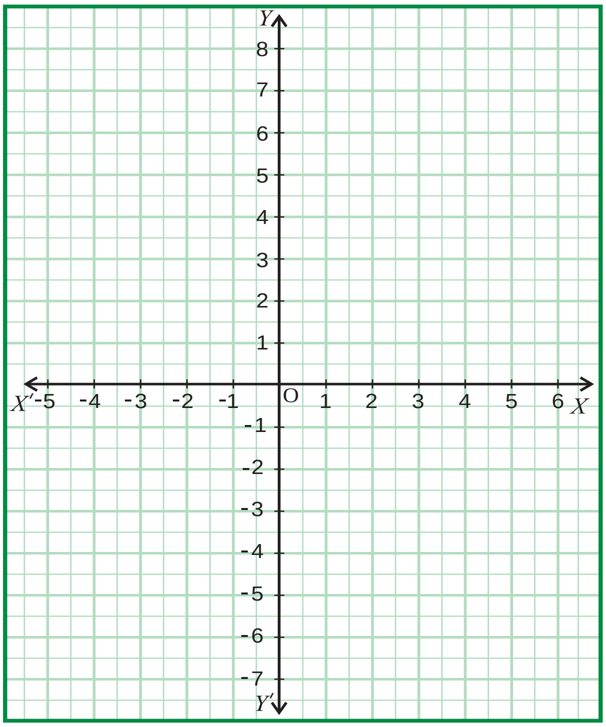
ஆயத்தொலை வடிவக்கணிதம் அல்லது பகுமுறை வடிவக்கணிதம் என்பது, எண்களாலான அச்சு தூரங்களின் வரிசை சோடிகளின் மூலம் தளத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிகளை விவரிப்பதே. இம்முறையை அறிமுகப்படுத்தி அதன்மூலம் புள்ளிகளை குறிக்கும் முறையை விவரித்தவர் ரேனே டேகார்ட் என்ற பிரெஞ்சு நாட்டு கணித வல்லுனர் ஆவார். அவர் இதே முறையை கொண்டு வளைவரைகளையும், கோடுகளையும் சமன்பாடுகளின் மூலம் விவரிக்க முடியும் என்று எடுத்துரைத்தார். இவரே வடிவியலையும் இயற்கணிதத்தையும் முதன் முதலில் இணைத்து பார்த்தவர். இந்த கண்டுபிடிப்புகளுக்காக அவரை கௌரவப்படுத்தும் விதமாக, ஒரு புள்ளியின் அச்சுத்தொலைவுகளை (அச்சுத்தூரங்களை) “கார்டீசியன்” அச்சுத்தூரங்கள் எனவும், அச்சு தளங்களை “கார்டீசியன் அச்சுத்தளங்கள்” எனவும் அழைக்கின்றோம். பகுமுறை வடிவக்கணிதத்தின் கண்டுபிடிப்பு நவீன கணிதத்தின் ஆரம்பமாக கருதப்படுகின்றது.

இந்த பாடப்பிரிவில், புள்ளிகளை கார்டீசியன் அச்சு தளத்தில் குறிக்கவும், புள்ளிகளின் அச்சுத்தூரங்களை கொண்டு இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவை அறிய உதவும் சூத்திரத்தை வருவிக்கவும் தெரிந்து கொள்வோம்.

டேகார்ட்
(1596-1650)

டேகார்ட் *(Descartes)* நவீன தத்துவத்தின் தந்தை என அழைக்கப்படுகிறார். அவர் அறிவியல் வழியில் அறிவுபூர்வமாக ஒரு புதிய முறையை சிந்தித்தார். அதன் மூலம் இயற்பியலிலும், வானவியலிலும் ஒரு புதிய பார்வையை ஏற்படுத்தினார். டேகார்ட் குறியீடுகளின் உதவியோடு பகுமுறை வடிவியலை எண் கணிதப்படுத்தி அதனை உயர்நிலைபடிகளைக் கொண்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பாக்கினார். ஒரு புள்ளியை அதன் அச்சு தூரங்கள் என்று அழைக்கப்படும் இரு எண்களைக் கொண்டு குறிக்க முடியும் எனக் கண்டவர் டேகார்ட்.

5.2 கார்டீசியன் அச்சுத்தொலைவு முறை



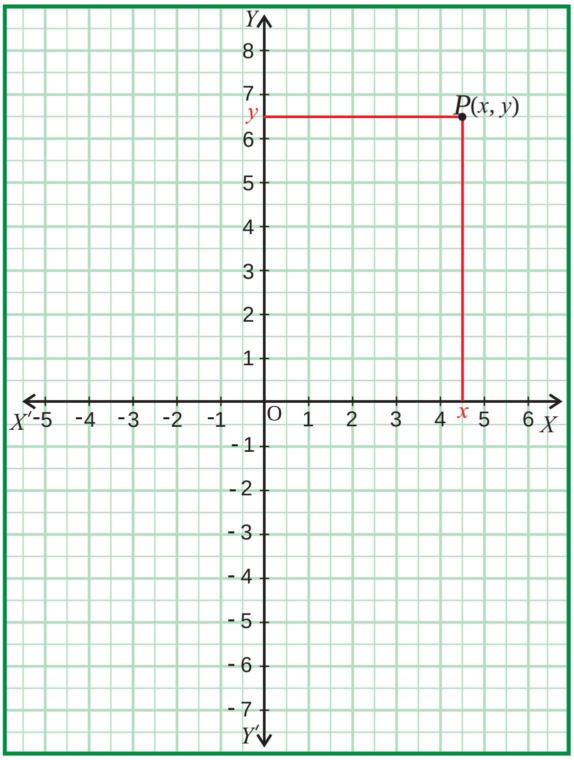
படம் 5.1

மெய்யெண்களின் தொகுப்பு என்ற பாடப்பிரிவில், எண் கோட்டின் மீது மெய்யெண்களை எவ்வாறு குறிக்கலாம் என நாம் கற்றிருக்கிறோம். மெய்யெண் கோட்டின் மீது ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணுக்கும், ஒரு தனிப்பட்ட P என்ற புள்ளி இருக்கும். அதே போல் எண் கோட்டின் மீது உள்ள ஒவ்வொரு P என்ற புள்ளியும் ஒரு தனிப்பட்ட மெய்யெண்ணால் அறியப்படும். இதேபோல் கார்டீசியன் அச்சுத்தொலைவு முறையில், தளத்தின் மேலுள்ள எந்த ஒரு P என்ற புள்ளியையும் அச்சுத்தூரங்கள் என்று அழைக்கப்படும் இரண்டு மெய்யெண்களை கொண்டு ஒரு நிலையான இடத்தில் குறிக்கலாம்.

கார்டீசியன் அச்சுத்தொலைவு முறை அல்லது செவ்வக அச்சுத்தொலைவு முறை என்பது ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரண்டு மெய்யெண் நேர்கோடுகளை கொண்ட ஒரு தளமாகும். அந்த இரண்டு செங்குத்து மெய்யெண் நேர்கோடுகள் கார்டீசியன் தளத்தின் அச்சுகள் எனப்படும். அவ்விரண்டு அச்சுகளும் பூச்சியத்தில் வெட்டிக் கொள்ளுமாறு அமைக்கப்பெற்று, அந்த புள்ளி ஆதிப்புள்ளி என அழைக்கப்படுகிறது. கிடையான மெய்யெண் நேர்கோடு x-அச்சு எனவும் குத்தான மெய்யெண் நேர்கோடு y-அச்சு எனவும் அழைக்கப்படுகின்றது. y-அச்சின் வலதுபுறம் உள்ள புள்ளிகளின் x-அச்சுத்தொலைவு மிகை எண்களாகவும் இடதுபுறம் உள்ள புள்ளிகளின் x-அச்சுத்தொலைவு குறை எண்களாகவும் கொள்ளப்படும். அதேபோல் x-அச்சின் மேற்புறம் உள்ள புள்ளிகளின் y-அச்சுத்தொலைவு மிகை எண்களாகவும் கீழ்புறம் உள்ள புள்ளிகளின் y-அச்சுத்தொலைவு குறை எண்களாகவும் கொள்ளப்படும். இரண்டு அச்சுகளிலும் ஒரே அலகினை பயன்படுத்துவோம்.

5.2.1 ஒரு புள்ளியின் அச்சுத்தொலைவுகள்

கார்டீசியன் முறையில் தளத்தின் மேல் உள்ள P என்ற எந்த ஒரு புள்ளியும் மெய்யெண்களாலான ஒரு வரிசை சோடியின் மூலம் அறியப்படும். அந்த மெய்யெண்களை



படம் 5.2

பெறுவதற்கு P என்ற புள்ளி வழியே இரண்டு நேர்க்கோடுகள் அச்சுகளுக்கு இணையாக வரையப்படும். குத்துக்கோடு x-அச்சினை வெட்டும் புள்ளி x-அச்சுத்தொலைவு எனவும், கிடைக்கோடு y-அச்சினை வெட்டும் புள்ளி y-அச்சுத்தொலைவு எனவும் அழைக்கப்படும். இவ்விரண்டும் P என்ற புள்ளியின் அச்சுத் தொலைவுகள் என்றழைக்கப்படுகின்றது. இதனை வழக்கமாக, முதலில் x-அச்சுத் தொலைவையும் இரண்டாவதாக y-அச்சுத் தொலைவையும் கொண்டு (x, y) என்ற வரிசை சோடியாக எழுதலாம்.

குறிப்புரை

1. (a, b) என்ற எந்த ஒரு வரிசை சோடியிலும், அதன் உறுப்புகள் a மற்றும் b ஒரு குறிப்பட்ட வரிசையில் அமைக்கப்படுகின்றது. எனவே வரிசை சோடிகள் (a, b) மற்றும் (b, a) வேறுபட்ட இரு வரிசை சோடிகள் ஆகும். அதாவது $(a,b) \neq (b,a)$.
2. $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ எனில் $a_1 = a_2$ மற்றும் $b_1 = b_2$ ஆகும்.
3. பின்வரும் பாடப்பகுதியில் புள்ளி மற்றும் புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்கள் இரண்டும் ஒன்றாக அறியப்படும்.

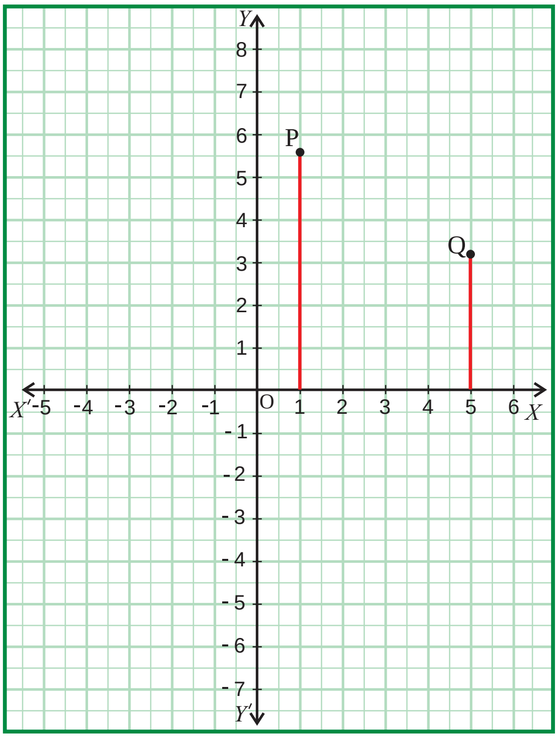
5.2.2 x-அச்சுத்தொலைவு

ஒரு புள்ளியின் x-அச்சுத்தூரம் அல்லது x-தொலைவு (abscissa), அப்புள்ளி y-அச்சின் வலப்புறமாக உள்ளதா அல்லது இடப்புறமாக உள்ளதா என அறிய உதவுகின்றது. P என்ற புள்ளியின் x-அச்சுத்தூரத்தை காண்பதற்கு:

(i) P என்ற புள்ளியிலிருந்து x-அச்சிற்கு ஒரு செங்குத்து கோடு வரைக.

(ii) அச்செங்குத்து கோடு x-அச்சினை சந்திக்கும் இடத்தின் எண்மதிப்பு அப்புள்ளியின் x-அச்சுத்தூரம் ஆகும்.

படம் 5.3-ல், P என்ற புள்ளியின் x-அச்சுத்தூரம் 1 மற்றும் Q என்ற புள்ளியின் x-அச்சுத்தூரம் 5 எனக் காண்கிறோம்.



படம் 5.3

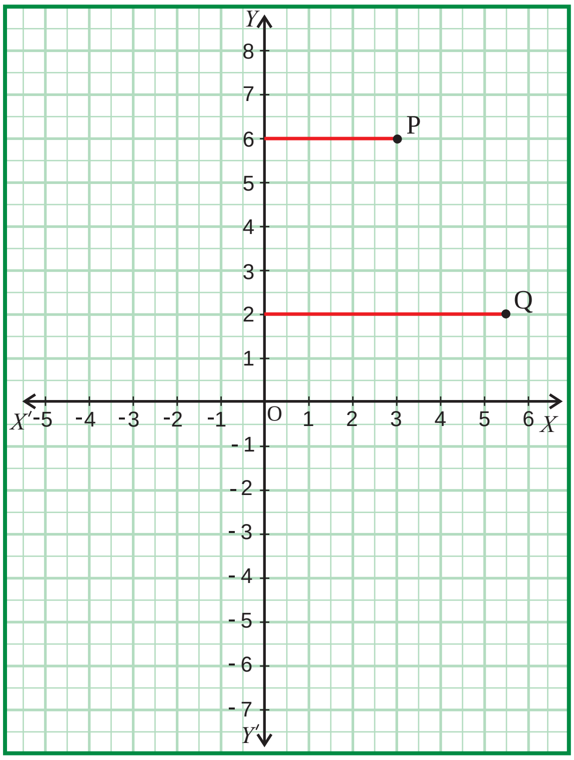
5.2.3 y-அச்சுத்தொலைவு

ஒரு புள்ளியின் y-அச்சுத்தூரம் அல்லது y-தொலைவு (ordinate), அப்புள்ளி x-அச்சின் மேற்புறமாக உள்ளதா அல்லது கீழ்புறமாக உள்ளதா என அறிய உதவுகின்றது. P என்ற புள்ளியின் y-அச்சுத்தூரத்தை காண்பதற்கு:

(i) P என்ற புள்ளியிலிருந்து y-அச்சிற்கு ஒரு செங்குத்து கோடு வரைக.

(ii) அச்செங்குத்து கோடு y-அச்சினை சந்திக்கும் இடத்தின் எண்மதிப்பு அப்புள்ளியின் y-அச்சுத்தூரம் ஆகும்.

படம் 5.4-ல், P என்ற புள்ளியின் y-அச்சுத்தூரம் 6 மற்றும் Q என்ற புள்ளியின் y-அச்சுத்தூரம் 2 எனக் காண்கிறோம்.



படம் 5.4

குறிப்பு

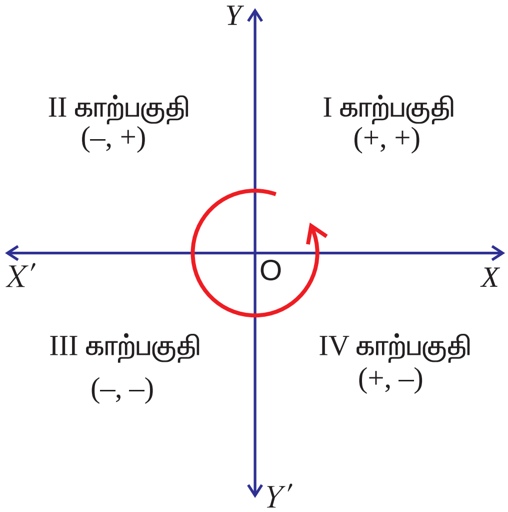
(i) x-அச்சின் மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியின் y-அச்சுத்தொலைவு பூச்சியம் ஆகும்.

(ii) y-அச்சின் மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியின் x-அச்சுத்தொலைவு பூச்சியம் ஆகும்.

(iii) ஆதிப்புள்ளியின் x மற்றும் y அச்சுத்தொலைவுகள் பூச்சியம் ஆகும். எனவே, ஆதிப்புள்ளியை (0,0) எனக் குறிப்போம்.

5.2.4 காற்பகுதிகள் (Quadrants)

செவ்வக அச்சுகளைக் கொண்ட தளம் கார்டீசியன் தளம் என்றழைக்கப்படும். கார்டீசியன் தளத்தின் அச்சுகள் அத்தளத்தை நான்கு பகுதிகளாக பிரிக்கின்றன. அவை படம் 5.5-ல் உள்ளவாறு, கடிகார எதிர் திசையில் எண்ணிடப்பட்டு I-ம் காற்பகுதி, II-ம் காற்பகுதி, III-ம் காற்பகுதி, மற்றும் IV-ம் காற்பகுதி என்றழைக்கப்படுகின்றன. x-அச்சுத்தூரம் I-ம் மற்றும் IV-ம் காற்பகுதிகளில் மிகை எண்களாகவும், II-ம் மற்றும் III-ம் காற்பகுதிகளில் குறை எண்களாகவும் இருக்கும். y-அச்சுத்தூரம் I-ம் மற்றும் II-ம் காற்பகுதிகளில் மிகை எண்களாகவும், III-ம் மற்றும் IV-ம் காற்பகுதிகளில் குறை எண்களாகவும் இருக்கும். படம் 5.5-ல் அச்சுத்தூரங்களின் இயற்கணித குறிகள் அடைப்பு குறிகளுக்குள் காட்டப்பட்டுள்ளன.



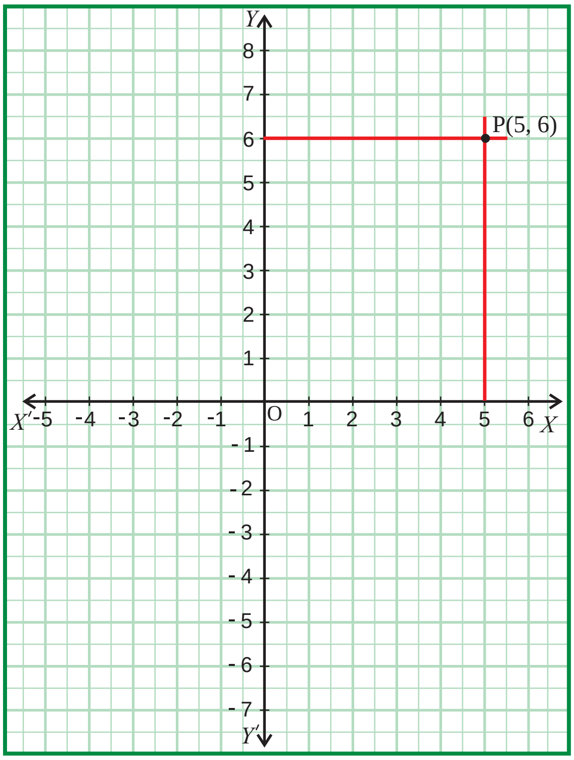
படம் 5.5

ஒவ்வொரு புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்களின் குறிகள் எவ்வாறு அமைகின்றன என்பது பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பகுதி	கால்பகுதி	அச்சுத்தூரங்களின் தன்மை	அச்சுத்தூரங்களின் இயற்கணித குறிகள்
XOY	I	$x > 0, y > 0$	+, +
X′OY	II	$x < 0, y > 0$	−, +
X′OY′	III	$x < 0, y < 0$	−, −
XOY′	IV	$x > 0, y < 0$	+, −

5.2.5 செவ்வக அச்சுத்தூர முறையில் ஒரு புள்ளியை குறித்தல்

கார்டீசியன் அச்சுத்தூர முறையில் ஒரு புள்ளியை எப்படி குறிப்பது என ஒரு எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்குவோம். கார்டீசியன் அச்சுத்தூர முறையில் (5, 6) என்ற புள்ளியை குறிக்க, x-அச்சின் மேல் 5 வரும் வரை நகர்ந்து, பின் 5-ன் வழியே x-அச்சிற்கு செங்குத்தாக ஒரு கோடு வரைய வேண்டும். அதே போல் y-அச்சின் மேல் 6 வரும் வரை நகர்ந்து, பின் 6-ன் வழியே y-அச்சிற்கு செங்குத்தாக ஒரு கோடு வரைய வேண்டும். இந்த இரண்டு கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி (5, 6) ஆகும்.



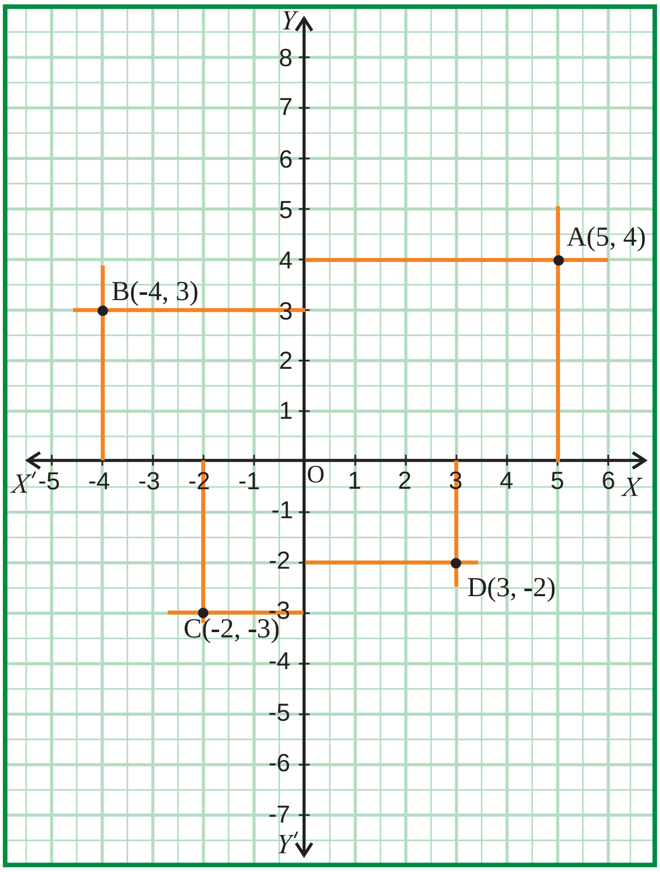
படம் 5.6

அதாவது, x-அச்சின் மிகை திசையில் 5 அலகுகள் நகர்ந்து பின் அங்கிருந்து y-அச்சின் மிகை திசையில் 6 அலகுகள் நகர்ந்தால் நாம் (5, 6) என்ற புள்ளியை அடைவோம். (5, 6) என்ற புள்ளி, y-அச்சிலிருந்து 5 அலகுகள் தொலைவிலும் x-அச்சிலிருந்து 6 அலகுகள் தொலைவிலும் உள்ளது. இவ்வாறு (5, 6) என்ற புள்ளி கார்டீசியன் தளத்தில் குறிக்கப்படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 5.1

கீழ்வரும் புள்ளிகளை செவ்வக அச்சுத்தொலைவு முறையில் குறிக்கவும்.

(i) $A\,(5, 4)$ (ii) $B\,(-4, 3)$ (iii) $C\,(-2, -3)$ (iv) $D\,(3, -2)$



படம் 5.7

தீர்வு

(i) கார்டீசியன் தளத்தில் (5,4) என்ற புள்ளியை குறிக்க, $x = 5$-ல் ஒரு குத்துக்கோடும், $y = 4$-ல் ஒரு கிடைக்கோடும் வரையவும். இந்த இரண்டு கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே A(5, 4) என்ற புள்ளியாகும்.

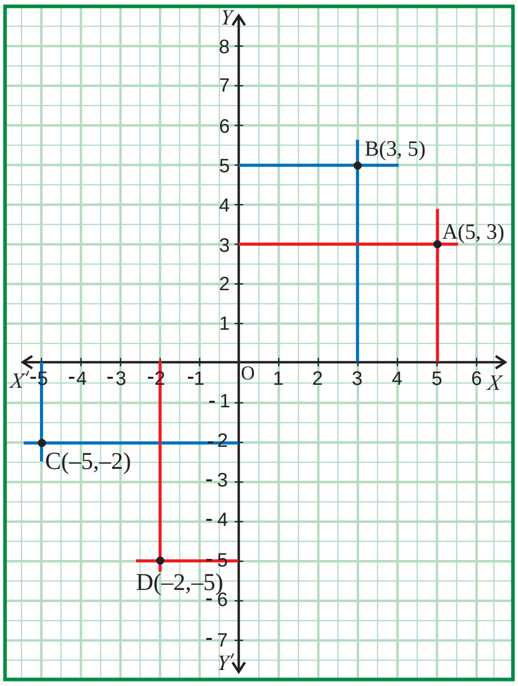
(ii) கார்டீசியன் தளத்தில் $(-4, 3)$ என்ற புள்ளியை குறிக்க, $x = -4$-ல் ஒரு குத்துக்கோடும், $y = 3$-ல் ஒரு கிடைக்கோடும் வரையவும். இந்த இரண்டு கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே $B(-4, 3)$ என்ற புள்ளியாகும்.

(iii) கார்டீசியன் தளத்தில் $(-2, -3)$ என்ற புள்ளியை குறிக்க, $x = -2$-ல் ஒரு குத்துக்கோடும், $y = -3$-ல் ஒரு கிடைக்கோடும் வரையவும். இந்த இரண்டு கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே $C(-2, -3)$ என்ற புள்ளியாகும்.

(iv) கார்டீசியன் தளத்தில் $(3, -2)$ என்ற புள்ளியை குறிக்க, $x = 3$-ல் ஒரு குத்துக்கோடும், $y = -2$-ல் ஒரு கிடைக்கோடும் வரையவும். இந்த இரண்டு கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே $D(3, -2)$ என்ற புள்ளியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.2

(i) (3, 5) மற்றும் (5, 3) (ii) (−2, −5) மற்றும் (−5, −2) என்ற புள்ளிகளை செவ்வக அச்சுத்தூர முறையில் குறிக்கவும்.

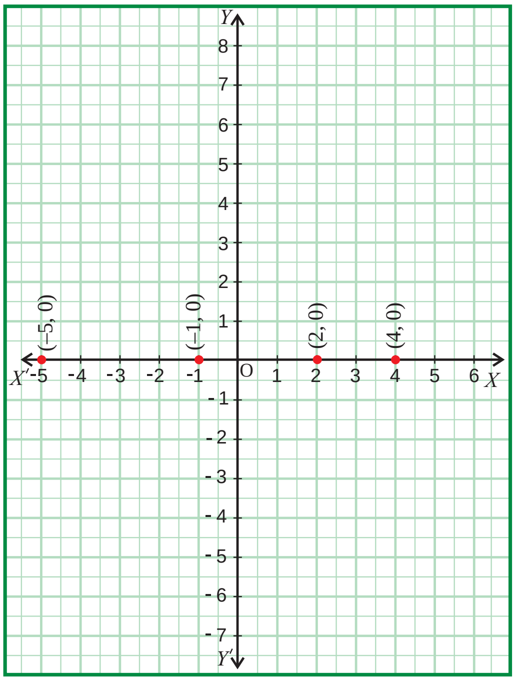


படம் 5.8

கார்டீசியன் தளத்தில், (x, y) என்ற புள்ளியின் x-அச்சுத்தொலைவு மற்றும் y-அச்சுத்தொலைவு ஆகியவற்றை இடம் மாற்றி எழுதும் போது, அது (y, x) என்ற வேறொரு புள்ளியாக அமையும் என அறியவும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.3

(–1, 0), (2, 0), (–5, 0) மற்றும் (4, 0) என்ற புள்ளிகளை செவ்வக அச்சுத்தூர முறையில் குறிக்கவும்.

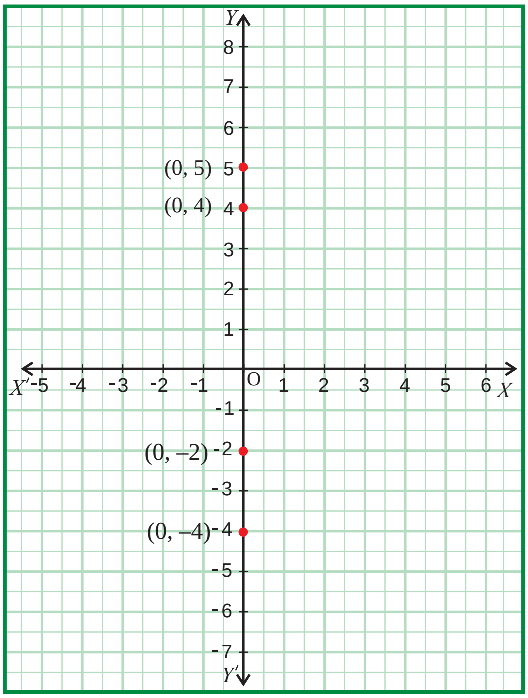


படம் 5.9

கார்டீசியன் தளத்தில், ஒரு புள்ளியின் y-அச்சுத்தொலைவு பூச்சியம் எனில், அந்த புள்ளி x-அச்சின் மேல் அமையும் என அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.4

(0, 4), (0,–2), (0, 5) மற்றும் (0,–4) என்ற புள்ளிகளை செவ்வக அச்சுத்தூர முறையில் குறிக்கவும்.

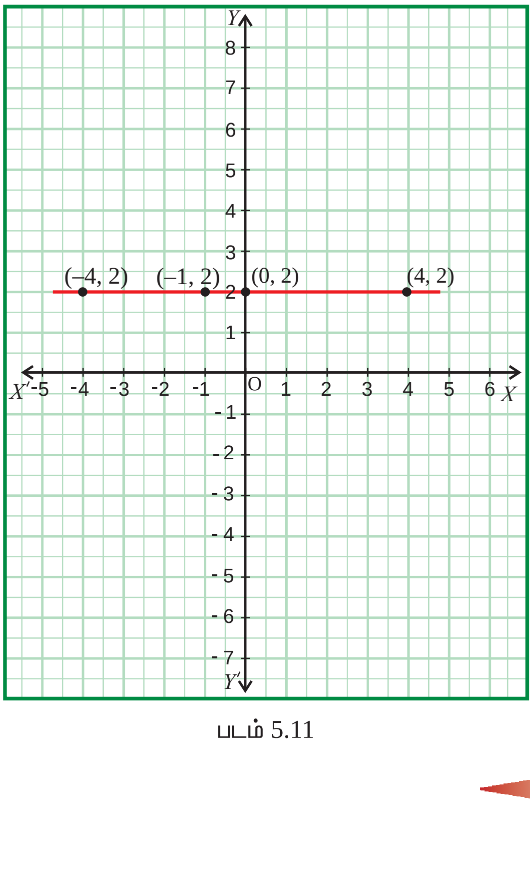


படம் 5.10

கார்டீசியன் தளத்தில், ஒரு புள்ளியின் x-அச்சுத்தொலைவு பூச்சியம் எனில் அப்புள்ளி y-அச்சின் மேல் அமையும் எனக் காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.5

(i) (–1, 2), (–4, 2), (4, 2) மற்றும் (0, 2) என்ற புள்ளிகளை செவ்வக அச்சுத்தூர முறையில் குறிக்கவும். அப்புள்ளிகளின் அமைப்பைப் பற்றி உன்னால் என்ன கூற முடியும்?



படம் 5.11

இப்புள்ளிகளைக் குறித்து, ஒரு கோட்டின் மூலம் இணைக்கும் போது அக்கோடு x-அச்சிற்கு இணையான ஒரு நேர்கோடாக அமைவதைக் காணலாம்.

குறிப்புரை x-அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் மேல் உள்ள புள்ளிகளின் y-அச்சுத்தொலைவுகள் சமமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.6

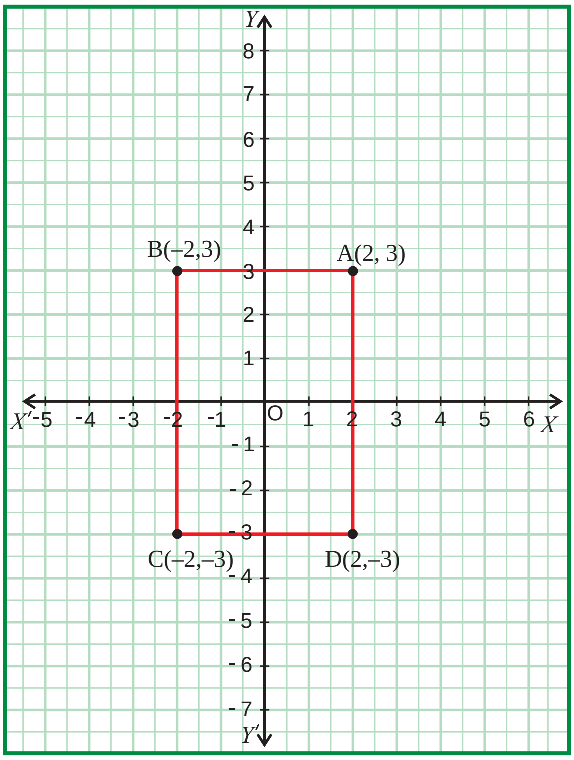
$A\,(2, 3)$, $B\,(-2, 3)$, $C\,(-2, -3)$ மற்றும் $D\,(2, -3)$ என்ற புள்ளிகள் அமையும் காற்பகுதியைக் காண்க. இப்புள்ளிகளை இணைப்பதால் எவ்வகை வரைபடம் கிடைக்கும் எனக் கூறுக.

தீர்வு

புள்ளி	A	B	C	D
காற்பகுதி	I	II	III	IV

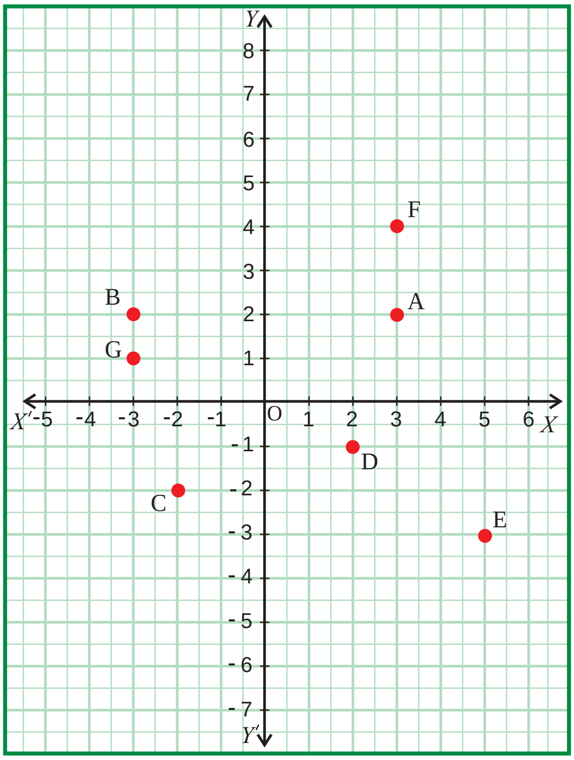
படத்திலிருந்து, $ABCD$ ஒரு செவ்வகமாகும்.

படம் 5.12-ல் உள்ள செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் பரப்பளவை உன்னால் காண முடியுமா?



படம் 5.12

எடுத்துக்காட்டு 5.7



படம் 5.13

படம் 5.13-ல் குறிக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளின் அச்சுத்தூரங்களைக் காண்க. இங்கு ஒவ்வொரு சதுரமும் ஓரலகு சதுரம் (Unit Square) ஆகும்.

தீர்வு A என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. இப்புள்ளி x-அச்சின் மிகை திசையில் ஆதிப்புள்ளியில் இருந்து மூன்று அலகுகள் தொலைவிலும் y-அச்சின் மிகை திசையில் ஆதிப்புள்ளியில் இருந்து இரண்டு அலகுகள் தொலைவிலும் அமைந்துள்ளது. எனவே, A-ன் அச்சுத்தொலைவுகள் $(3, 2)$ ஆகும்.

இதேபோல் மற்ற புள்ளிகள் B, C, D, E, F மற்றும் G ஆகியவற்றின் அச்சுத்தொலைவுகள் முறையே $(-3,2)$, $(-2,-2)$, $(2, -1)$, $(5, -3)$, $(3, 4)$, $(-3, 1)$ ஆகும்.

பயிற்சி 5.1

1. கீழ்வரும் வாக்கியங்கள் சரியா அல்லது தவறா எனக் கூறவும்.

    (i) (5, 7) என்ற புள்ளி நான்காம் காற்பகுதியில் அமைகிறது.

    (ii) $(-2, -7)$ என்ற புள்ளி மூன்றாம் காற்பகுதியில் அமைகிறது.

    (iii) $(8, -7)$ என்ற புள்ளி x-அச்சிற்கு கீழே அமைகிறது.

    (iv) (5, 2) மற்றும் $(-7, 2)$ என்ற புள்ளிகள் y-அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் மேல் உள்ளன.

    (v) $(-5, 2)$ என்ற புள்ளி y-அச்சிற்கு இடப்பக்கம் உள்ளது.

    (vi) (0, 3) என்ற புள்ளி x-அச்சின் மேல் உள்ளது.

    (vii) $(-2, 3)$ என்பது இரண்டாம் காற்பகுதியில் உள்ள ஒரு புள்ளி ஆகும்.

    (viii) $(-10, 0)$ என்ற புள்ளி x-அச்சின் மேல் உள்ளது.

    (ix) $(-2, -4)$ என்ற புள்ளி x-அச்சிற்கு மேற்பகுதியில் அமைகிறது.

    (x) x-அச்சின் மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளிக்கும் y-அச்சுத்தொலைவு பூச்சியம் ஆகும்.

2. கார்டீசியன் அச்சுத்தூர முறையில், பின்வரும் புள்ளிகளைக் குறித்து அவை எந்த காற்பகுதியில் அமைகின்றன எனக் கூறவும்.

    (i) (5, 2) (ii) $(-1, -1)$ (iii) (7, 0) (iv) $(-8, -1)$ (v) $(0, -5)$
    (vi) (0, 3) (vii) $(4, -5)$ (viii) (0, 0) (ix) (1, 4) (x) $(-5, 7)$

3. பின்வரும் புள்ளிகளின் x-அச்சுத்தொலைவுக் காண்க.

    (i) $(-7, 2)$ (ii) (3, 5) (iii) $(8, -7)$ (iv) $(-5, -3)$

4. பின்வரும் புள்ளிகளின் y-அச்சுத்தொலைவுக் காண்க.

    (i) (7, 5) (ii) (2, 9) (iii) $(-5, 8)$ (iv) $(7, -4)$

5. பின்வரும் புள்ளிகளை அச்சுத்தளத்தில் குறிக்கவும்.

    (i) (4, 2) (ii) $(4, -5)$ (iii) (4, 0) (iv) $(4, -2)$

    இப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு எவ்வாறு அமைந்துள்ளது எனக் கூறுக.

6. இரண்டுபுள்ளிகளில்ஒவ்வொன்றின் y-அச்சுத்தொலைவும் -6 என்க. அந்தபுள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு x-அச்சினை பொறுத்து எவ்வாறு அமையும் எனக் கூறுக.

7. இரண்டு புள்ளிகளில் ஒவ்வொன்றின் x-அச்சுத்தொலைவும் பூச்சியம் எனில், அந்த புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு x-அச்சினை பொறுத்து எவ்வாறு அமையும் எனக் கூறுக.

8. கார்டீசியன் தளத்தில் A (2, 4), B $(-3, 4)$, C $(-3, -1)$ மற்றும் D $(2, -1)$ என்ற புள்ளிகளை குறிக்கவும். வரிசை மாறாமல் இப்புள்ளிகளைக் கோட்டு துண்டுகளால் இணைப்பதால் எவ்வகை வரைபடம் கிடைக்கும் எனக் கூறுக.

9. செவ்வக அச்சுத்தொலைவு முறையில் $O(0, 0)$, $A(5, 0)$, $B(5, 4)$ என்ற புள்ளிகளை குறிக்கவும். $OABC$ ஒரு செவ்வகமாக அமையுமாறு C-ன் அச்சுத்தூரங்களைக் காண்க.

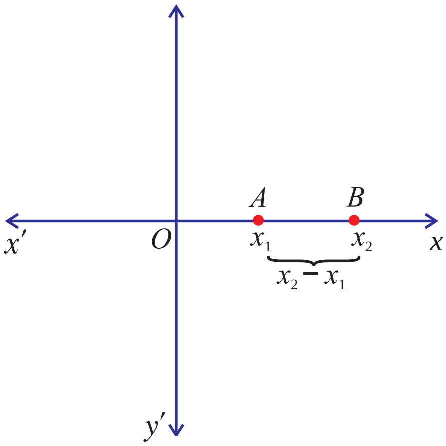
10. $ABCD$ என்ற செவ்வகத்தில், A, B, D என்ற புள்ளிகளின் அச்சுத்தூரங்கள் முறையே $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 3)$ எனில், C-ன் அச்சுத்தூரங்களைக் காண்க.

5.3 இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவு

பகுமுறை வடிவக்கணிதத்தில், மிக எளிமையானது இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவை கணக்கிடுவது ஆகும். A, B என்ற இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவு AB என்று குறிக்கப்படும்.

5.3.1 கார்டீசியன் தளத்தில் அச்சுக்களின் மீது உள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவு

இரு புள்ளிகள் x-அச்சின் மீது அமையும் போது அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொலைவை எளிதில் காண முடியும், ஏனெனில் அவ்விரு புள்ளிகளின் x-அச்சுத்தூரங்களின் வித்தியாசமே அத்தொலைவாகும்.



படம் 5.14

x-அச்சின் மீது அமையும் $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ என்ற இரு புள்ளிகளைக் கருதுக.

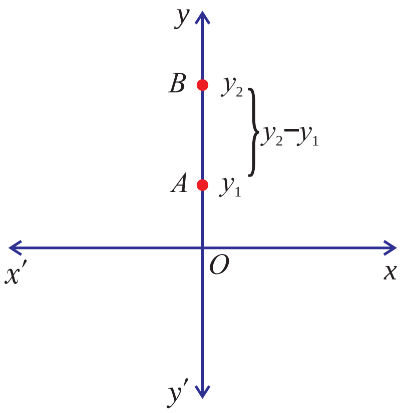
$x_2 > x_1$ எனில், A-லிருந்து B-ன் தொலைவு

$AB = OB - OA = x_2 - x_1$

$x_1 > x_2$ எனில், $AB = x_1 - x_2$

எனவே, $AB = |x_2 - x_1|$ ஆகும்.

அதேபோல் இரு புள்ளிகள் y-அச்சின் மீது அமையும் போது அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொலைவு அவற்றின் y-அச்சுத்தூரங்களின் வித்தியாசத்திற்கு சமமாகும். y-அச்சின் மீது அமையும் $A(0, y_1)$, $B(0, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளை கருதுக.



படம் 5.15

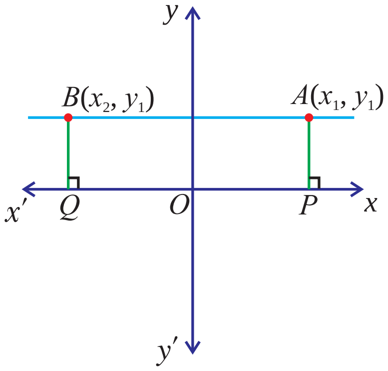
$y_2 > y_1$ எனில், A-ல் இருந்து B-ன் தொலைவு $AB = OB - OA = y_2 - y_1$

$y_1 > y_2$ எனில் $AB = y_1 - y_2$

எனவே, $AB = |y_2 - y_1|$ ஆகும்.

5.3.2 அச்சுக்கு இணையான நேர்கோட்டின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவு

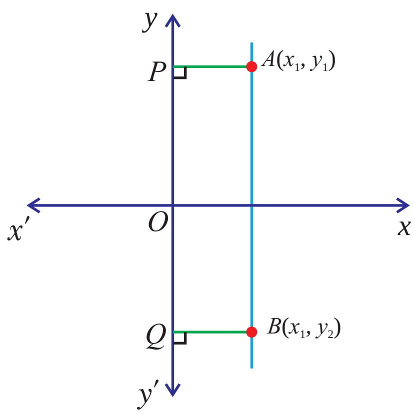
$A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_1)$ என்ற இரு புள்ளிகளை எடுத்து கொள்வோம். இப்புள்ளிகளின் y அச்சுத்தூரங்கள் சமமாக உள்ளதால் இவ்விரு புள்ளிகளும் x-அச்சிற்கு இணையான ஒரு நேர் கோட்டின் மேல் அமையும். A மற்றும் B-லிருந்து x-அச்சிற்கு முறையே AP மற்றும் BQ என்ற குத்துக்கோடுகளை வரையவும். A, B ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொலைவானது, P, Q ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொலைவுக்கு சமமாகும்.



படம் 5.16

எனவே, $AB = PQ = |x_1 - x_2|$

தற்போது y-அச்சிற்கு இணையாக உள்ள ஒரு கோட்டின் மேல் $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_1, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்க. y-அச்சிற்கு, A மற்றும் B-லிருந்து முறையே AP மற்றும் BQ என்ற குத்துக் கோடுகளை வரையவும். தற்போது P மற்றும் Q-ன் அச்சுத்தூரங்கள் $(0, y_1)$ மற்றும் $(0, y_2)$ ஆகும். A, B ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொலைவானது, P, Q ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொலைவுக்கு சமமாகும்.



படம் 5.17

எனவே, $PQ = AB = |y_1 - y_2|$

குறிப்புரை அச்சுக்கு இணையான நேர்கோட்டின் மேல் உள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இடையிலான தொலைவு, அந்த நேர்கோடு எந்த அச்சிற்கு இணையாக உள்ளதோ, அந்த அச்சுத்தொலைவுகளின் வித்தியாசமாகும்.

5.3.3 இரு புள்ளிகளின் இடைப்பட்டத் தொலைவு

கார்டீசியன் தளத்தில் $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். A, B-ல் இருந்து x-அச்சிற்கு வரையப்பட்ட குத்துகோடுகளின் அடிப்புள்ளிகள் முறையே P மற்றும் Q என்க. A-ல் இருந்து BQ விற்கு AR என்ற குத்துக்கோடு வரையவும். படம் 5.18-ல் இருந்து நாம் அறிவது,

$AR = PQ = OQ - 0P = x_2 - x_1$ மற்றும்

$BR = BQ - RQ = y_2 - y_1$

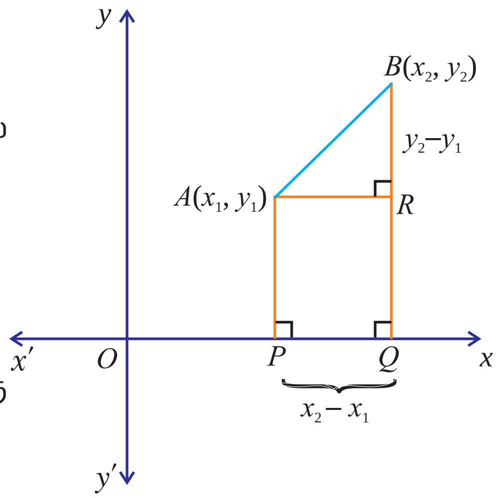
செங்கோண முக்கோணம் ARB-ல் இருந்து பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$AB^2 = AR^2 + RB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

அதனால், $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

எனவே A மற்றும் B என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவு

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



படம் 5.18

முக்கியகருத்து **இரு புள்ளிகளுக்கு இடையிலான தொலைவு**

(x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகளுக்கு இடையேயான தொலைவைக் காணும் சூத்திரம்

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

குறிப்புரை

(i) இச்சூத்திரம் மேலே கூறப்பட்ட அனைத்து வகை புள்ளிகளுக்கும் பொருந்தும்.

(ii) ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியின் தொலைவு $OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.8

(–4, 0) மற்றும் (3, 0) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு $(-4, 0)$ மற்றும் $(3, 0)$ என்பன x-அச்சின் மேல் உள்ள இரு புள்ளிகள்.

எனவே, $d = |x_1 - x_2| = |3 - (-4)| = |3 + 4| = 7$

மாற்றுமுறை :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 + 4)^2 + 0^2} = \sqrt{49} = 7$$

எடுத்துக்காட்டு 5.9

(–7, 2) மற்றும் (5, 2) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு $(5, 2)$ மற்றும் $(-7, 2)$ என்ற புள்ளிகள் x-அச்சிற்கு இணையான ஒரு கோட்டின் மீதுள்ளன.

எனவே, $d = |x_1 - x_2| = |-7 - 5| = |-12| = 12$

மாற்றுமுறை :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5 + 7)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{12^2} = \sqrt{144} = 12$$

எடுத்துக்காட்டு 5.10

(–5, – 6) மற்றும் (– 4, 2) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு $(x_1, y_1) = (-5, -6), (x_2, y_2) = (-4, 2)$ என்க.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ என்ற தொலைவு சூத்திரத்தை பயன்படுத்த,

$$d = \sqrt{(-4+5)^2 + (2+6)^2} = \sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.11

(0, 8) மற்றும் (6, 0) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவைக் காண்க.

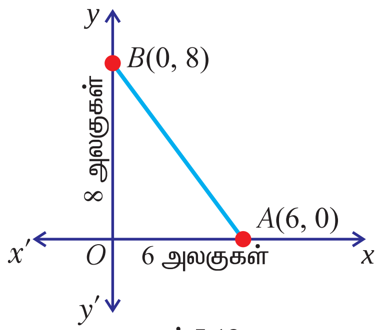
தீர்வு $(x_1, y_1) = (0, 8),\ (x_2, y_2) = (6, 0)$ என்க. இவ்விருப் புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவு

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(6-0)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

மாற்றுமுறை :

A, *B* என்பன (6, 0) மற்றும் (0, 8) என்ற புள்ளிகளையும், *O* என்பது ஆதிப்புள்ளியையும் குறிக்கட்டும். *A*(6, 0) என்ற புள்ளி*x*-அச்சின் மீதும், *B*(0, 8) என்ற புள்ளி *y*-அச்சின் மீதும் அமைந்துள்ளன. அச்சுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் செங்கோணம் என்பதால் *AOB* என்ற முக்கோணம் ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்.



படம் 5.19

$OA = 6, OB = 8$

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் படி,

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 36 + 64 = 100.$$

$$\therefore\ AB = \sqrt{100} = 10$$

எடுத்துக்காட்டு 5.12

(–3, –4) மற்றும் (5, –7) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு $(x_1, y_1) = (-3, -4), (x_2, y_2) = (5, -7)$ என்க.

இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவு

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(5+3)^2 + (-7+4)^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.13

(4, 2), (7, 5) மற்றும் (9, 7) என்ற மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டின் மீது அமையும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட மூன்று புள்ளிகள் A(4, 2), B(7, 5) மற்றும் C(9, 7) என்க.

தொலைவு சூத்திரத்தினைப் பயன்படுத்த,

$$AB^2 = (4-7)^2 + (2-5)^2 = (-3)^2 + (-3)^2 = 9 + 9 = 18$$

$$BC^2 = (9-7)^2 + (7-5)^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$$

$$CA^2 = (9-4)^2 + (7-2)^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$$

எனவே, $AB = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$; $BC = \sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$;

$CA = \sqrt{50} = \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2}$.

இங்கு $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$ எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே, A, B, C என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டின் மீது அமைகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 5.14

$A(-3, -4)$, $B(2, 6)$ மற்றும் $C(-6, 10)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகளாகுமா என தீர்மானிக்க.

தீர்வு தொலைவு சூத்திரத்தினைப் பயன்படுத்த,

$$AB^2 = (2+3)^2 + (6+4)^2 = 5^2 + 10^2 = 25 + 100 = 125$$

$$BC^2 = (-6-2)^2 + (10-6)^2 = (-8)^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80$$

$$CA^2 = (-6+3)^2 + (10+4)^2 = (-3)^2 + (14)^2 = 9 + 196 = 205$$

மேலும், $AB^2 + BC^2 = 125 + 80 = 205 = CA^2$

ஒரு பக்கத்தின் வர்க்கமானது மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் என்பதால், ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.15

$(a, a), (-a, -a)$ மற்றும் $(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $A(a, a)$, $B(-a, -a)$ மற்றும் $C(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ எனக் கொள்க.

தொலைவு சூத்திரம் $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ –ஐப் பயன்படுத்த,

$$AB = \sqrt{(a+a)^2 + (a+a)^2}$$

$$= \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2}\,a$$

$$BC = \sqrt{(-a\sqrt{3}+a)^2 + (a\sqrt{3}+a)^2} = \sqrt{3a^2 + a^2 - 2a^2\sqrt{3} + 3a^2 + a^2 + 2a^2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{8a^2} = \sqrt{4 \times 2a^2} = 2\sqrt{2}\,a$$

$$CA = \sqrt{(a+a\sqrt{3})^2 + (a-a\sqrt{3})^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2\sqrt{3} + 3a^2 + a^2 - 2a^2\sqrt{3} + 3a^2}$$

$$= \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2}\,a$$

எனவே, $AB = BC = CA = 2\sqrt{2}\,a$.

அனைத்து பக்கங்களும் சமமானதால், கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.16

(–7, –3), (5, 10), (15, 8) மற்றும் (3, –5) என்ற புள்ளிகளை, வரிசைமாறாமல் எடுத்து கொண்டால், அவை ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிகளாகும் என நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு A, B, C மற்றும் D என்பன முறையே $(-7, -3)$, $(5, 10)$, $(15, 8)$ மற்றும் $(3, -5)$ என்ற புள்ளிகளைக் குறிப்பதாகக் கொள்க. தொலைவு சூத்திரம் $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$AB^2 = (5+7)^2 + (10+3)^2 = 12^2 + 13^2 = 144 + 169 = 313$$

$$BC^2 = (15-5)^2 + (8-10)^2 = 10^2 + (-2)^2 = 100 + 4 = 104$$

$$CD^2 = (3-15)^2 + (-5-8)^2 = (-12)^2 + (-13)^2 = 144 + 169 = 313$$

$$DA^2 = (3+7)^2 + (-5+3)^2 = 10^2 + (-2)^2 = 100 + 4 = 104$$

எனவே,

$AB = CD = \sqrt{313}$ மற்றும் $BC = DA = \sqrt{104}$ என்பதால்

எதிர் பக்கங்கள் சமம். எனவே, $ABCD$ ஒரு இணைகரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.17

(3, –2), (3, 2), (–1, 2) மற்றும் (–1, –2) என்ற புள்ளிகளை வரிசை மாறாமல் எடுத்துக்கொண்டால் அவை ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகளாகும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு A, B, C மற்றும் D என்பன முறையே $(3, -2)$, $(3, 2)$, $(-1, 2)$ மற்றும் $(-1, -2)$ என்ற புள்ளிகளைக் குறிப்பதாகக் கொள்க.

தொலைவு சூத்திரம் $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.