$= 8$ஆவது உறுப்பு $+ \frac{1}{4}$ [9ஆவது உறுப்பு-8ஆவது உறுப்பு]

$= 35 + \frac{1}{4}[40-35] = 35+1.25 = 36.25$

தொடர்ச்சியற்ற வரிசை: (கால்மானங்களைக் காணுதல்)

படிகள்:

1. குவிவு அலைவெண்ணைக் காண்க.
2. $\left(\frac{N+1}{4}\right)$ இன் மதிப்பு காண்க.
3. $\left(\frac{N+1}{4}\right)$க்கு பக்கத்திலுள்ள அதிகமாக வரும் குவிவு அலைவெண்ணைக் காண்க, அவ்வெண்ணிற்கு எதிரே உள்ள X இன் மதிப்பு Q_1 ஆகும்.
4. $3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ மதிப்பு காண்க.
5. $3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ க்கு பக்கத்திலுள்ள அதிகமாக வரும் குவிவு அலைவெண்ணைக் காண்க, அவ்வெண்ணிற்கு எதிரே உள்ள X-ன் மதிப்பு Q_3 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 23:

X	5	8	12	15	19	24	30
f	4	3	2	4	5	2	4

தீர்வு:

x	f	c.f
5	4	4
8	3	7 ←
12	2	9
15	4	13
19	5	18
24	2	20 ←
30	4	24
	24	

$$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} \text{ உறுப்பு} = \left(\frac{24+1}{4}\right) = \left(\frac{25}{4}\right)$$

$= 6.25$ ஆவது உறுப்பு $Q_1 = 8;$

$$Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} \text{ உறுப்பு} = 3\left(\frac{24+1}{4}\right) = 18.75 \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$\therefore Q_3 = 24$

தொடர்ச்சியான வரிசைக்கு கால்மானங்களைக் காணுதல்,

1. குவிவு அலைவெண்களைக் காண்க.
2. $\left(\frac{N}{4}\right)$ இன் மதிப்பு காண்க.
3. $\left(\frac{N}{4}\right)$க்கு பக்கத்திலுள்ள அதிகமாக வரும் குவிவு அலைவெண்ணைக் கண்டு, அவ்வெண்ணிற்கு எதிரே உள்ள பிரிவு இடைவெளி முதல் கால்மான பிரிவு எனப்படும்.
4. $3\left(\frac{N}{4}\right)$ இன் மதிப்பு காண்க.
5. $3\left(\frac{N}{4}\right)$க்கு பக்கத்திலுள்ள அதிகமாக வரும் குவிவு அலைவெண்ணைக் கண்டு, அவ்வெண்ணிற்கு எதிரே உள்ள பிரிவு இடைவெளி மூன்றாம் கால்மான பிரிவு எனப்படும். பிறகு பின்வரும் வாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தி Q_1, Q_3 வைக் காணவும்.

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f_1} \times c_1$$

$$Q_3 = l_3 + \frac{3\left(\frac{N}{4}\right) - m_3}{f_3} \times c_3$$

இதில் l_1 = முதல் கால்மான பிரிவின் கீழ் எல்லை

f_1 = முதல் கால்மான பிரிவின் அலைவெண்

c_1 = முதல் கால்மான பிரிவின் பிரிவுத் தூரம்

m_1= முதல் கால்மான பிரிவிற்கு முந்தைய குவிவு அலைவெண்

l_3 = மூன்றாம் கால்மான பிரிவின் கீழ் எல்லை

f_3 = மூன்றாம் கால்மான பிரிவின் அலைவெண்

c_3 = மூன்றாம் கால்மான பிரிவின் பிரிவுத் தூரம்

m_3 = மூன்றாம் கால்மான பிரிவிற்கு முந்தைய குவிவு அலைவெண்.

எடுத்துக்காட்டு 24:

தேர்வில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவற்றின் கால்மானங்களைக் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0-10	11
10-20	18
20-30	25
30-40	28
40-50	30
50-60	33
60-70	22
70-80	15
80-90	12
90-100	10

தீர்வு:

C.I.	F	cf
0-10	11	11
10-20	18	29
20-30	25	54
30-40	28	82
40-50	30	112
50-60	33	145
60-70	22	167
70-80	15	182
80-90	12	194
90-100	10	204
	204	

$$\left(\frac{N}{4}\right) = \left(\frac{204}{4}\right) = 51; \quad 3\left(\frac{N}{4}\right) = 153$$

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f_1} \times c_1$$

$$= 20 + \frac{51-29}{25} \times 10 = 20 + 8.8 = 28.8$$

$$Q_3 = l_3 + \frac{3\left(\frac{N}{4}\right) - m_3}{f_3} \times c_3$$

$$= 60 + \frac{153-145}{22} \times 12 = 60 + 4.36 = 64.36$$

பதின்மானங்கள்:

மொத்த மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையை 10 சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் அளவைகள் பதின் மானங்கள் எனப்படும். $D_1, D_2 \ldots D_9$. என்ற ஒன்பது பதின்மானங்கள் முறையே முதல் பதின்மானம், . . . ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 25:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரத்திற்கு D_5 வைக் காண்க.

5, 24, 36, 12, 20, 8

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை ஏறு வரிசையில் எழுதுக

5, 8, 12, 20, 24, 36

$$D_5 = \left(\frac{5(n+1)}{10}\right)^{th} \text{மதிப்பு} = \left(\frac{5(6+1)}{10}\right)^{th} \text{மதிப்பு} = (3.5)^{th} \text{மதிப்பு}$$

$$= 3^{\text{ஆவது}}\ \text{உறுப்பு} + \frac{1}{2}\left[4^{\text{ஆவது}}\ \text{உறுப்பு} - 3^{\text{ஆவது}}\ \text{உறுப்பு}\right]$$

$$= 12 + \frac{1}{2}\ [20 - 12]$$

$$= 12 + 4 = 16$$

வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்திற்கு பதின்மானங்கள்:

எடுத்துக்காட்டு 26:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரத்திற்கு D_3 மற்றும் D_7 காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
அலைவெண்	5	7	12	16	10	8	4

தீர்வு:

C.I	f	c.f
0-10	5	5
10-20	7	12
20-30	12	24
30-40	16	40
40-50	10	50
50-60	8	58
60-70	4	62
	62	

D_3 உறுப்பு $= \left(\frac{3N}{10}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= \left(\frac{3\times 62}{10}\right)$ ஆவது உறுப்பு $= (18.6)$ ஆவது உறுப்பு

18.6 ஆவது உறுப்பு 20-30 என்ற இடைவெளியில் உள்ளது.

$$\therefore D_3 = l + \frac{3\left(\frac{N}{10}\right) - m}{f} \times c$$

$$= 20 + \frac{18.6 - 12}{12} \times 10 = 20 + 5.5 = 25.5$$

D_7 உறுப்பு $= \left(\frac{7\times N}{10}\right)^{th}$ உறுப்பு $= \left(\frac{7\times 62}{10}\right)^{th}$ உறுப்பு

$= \left(\frac{434}{10}\right)^{th}$ உறுப்பு $= (43.4)$ ஆவது உறுப்பு

43.4 ஆவது உறுப்பு 40-50 என்ற இடைவெளியில் உள்ளது.

$$D_7 = l + \frac{\left(\frac{7N}{10}\right) - m}{f} \times c$$

$$= 40 + \frac{43.4 - 40}{10} \times 10 = 40 + 3.4 = 43.4$$

நூற்றுமானங்கள்:

நூற்றுமான மதிப்புகளானது பரவலை 100 சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும். ஒவ்வொன்றும் 1 சதவீத அளவினைக் குறிக்கும். நூற்றுமானம் (P_k) மதிப்பானது மொத்த மதிப்புகளில் சரியாக k% வரை அமையும் மாறியின் மதிப்பாகும்.

தொடர்பு:

$P_{25} = Q_1$; $P_{50} = D_5 = Q_2 =$ இடைநிலை மற்றும் $P_{75} = Q_3$

எடுத்துக்காட்டு 27:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு P_{15} யைக் கணக்கிடுக.

5, 24 , 36 , 12 , 20 , 8

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை ஏறுவரிசையில் எழுதுக.

5, 8, 12, 20, 24, 36

$P_{15} = \left(\frac{15(n+1)}{100}\right)^{th}$ உறுப்பு

$= \left(\frac{15\times 7}{100}\right)^{th}$ உறுப்பு

$= (1.05)$ ஆவது உறுப்பு

$= 1$ ஆவது உறுப்பு $+ 0.05$ (2 ஆவது உறுப்பு $-$ 1 ஆவது உறுப்பு)

$= 5 + 0.05\ (8-5)$

$= 5 + 0.15 = 5.15$

வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்திற்கு நூற்றுமானங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 28:

பின்வரும் அலைவெண் பரவலைக் கொண்டு P_{53} யைக் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
அலைவெண்	5	8	12	16	20	10	4	3

தீர்வு:

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்	குவிவு அலைவெண்
0-5	5	5
5-10	8	13
10-15	12	25
15-20	16	41
20-25	20	61
25-30	10	71
30-35	4	75
35-40	3	78
மொத்தம	78	

$$P_{53} = l + \frac{\frac{53N}{100} - m}{f} \times c$$

$$= 20 + \frac{41.34 - 41}{20} \times 5$$

$$= 20 + 0.085 = 20.085.$$

முகடு:

ஓர் பரவலில் எந்த மதிப்பு அதிக முறை வருகிறதோ, அம்மதிப்பே முகட்டைக் குறிக்கும். எந்த மதிப்பைச் சுற்றி ஏனைய மதிப்புகள் அனைத்தும் அடர்ந்திருக்கின்றனவோ அம்மதிப்பே முகடு எனப்படும்.

கிராக்ஸ்டன் மற்றும் கௌடனின் வரையறைப்படி "எல்லா மதிப்புகளும் ஒரு மதிப்பைச் சுற்றி மிகவும் அடர்ந்திருக்குமே யானால் அந்த மதிப்பே ஒரு பரவலின் முகட்டு மதிப்பாகும். இதுவே தொடரில் உள்ள மதிப்புகளில் முக்கிய மதிப்பாக கருதப்படுகிறது.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளைச் சுற்றி அலைவெண்கள் அதன் மையப்பகுதியில் அடர்ந்திருக்கின்றன என்பதை இது காட்டுகிறது. ஆகையால் அதிக அடர்வு உடைய புள்ளியைக் காண இவற்றை பயன்படுத்துகிறோம். எனவே இது இடக்குறியிட்ட அளவை ஆகும்.

சந்தை ஆய்வுகளின் போது ஒரு மேலாளர் பொருட்களின் எந்த அளவு அதிக அடர்வுள்ளதாக உள்ளது என்பதை அறிய முகட்டைப் பயன்படுத்துகிறார். எடுத்துக்காட்டாக பாதணிகள், மற்றும் ஆயத்த ஆடைகளைத் தயாரிக்கும் போது முகட்டளவு மற்றும் அதனை ஒட்டிய அளவுகளும் பெரிதும் தேவைப்படுகிறது.

முகட்டைக் கணித்தல்:

செப்பனிடா விவரங்கள் அல்லது தொகுக்கப்படா விவரங்கள்:

ஒரு தொடரில் உள்ள தனிப்பட்ட மதிப்புகள் அல்லது தொகுக்கப்படா விவரங்களின் முகட்டை ஆய்வின் மூலம் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 29:

2 , 7, 10, 15, 10, 17, 8, 10, 2

$\therefore$ முகடு $= M_0 = 10$

சில இடங்களில் முகட்டைக் காண இயலாது. ஒரு சில இடங்களில் ஒன்று, அதற்கு மேற்பட்ட முகட்டைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 30:

12, 10, 15, 24, 30 (முகடு இல்லை)

7, 10, 15, 12, 7, 14, 24, 10, 7, 20, 10

முகட்டின் மதிப்புகள் 7 மற்றும் 10

தொகுக்கப்பட்ட விவரங்கள்:

தொகுக்கப்பட்ட விவரத்தில் முகடு என்பது மிக உயர்ந்த நிகழ்வெண்ணை ஒத்த X-ன் மதிப்பு ஆகும்.

தொடர்ச்சியான பரவல்:

மிக உயர்ந்த நிகழ்வெண்ணிற்கு எதிரே உள்ள பிரிவு இடைவெளி முகட்டுப் பிரிவு எனப்படும். பிறகு வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்தி முகட்டை பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

$$\text{முகடு} = M_0 = l + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times C$$

l = முகட்டுப் பிரிவின் கீழ் எல்லை $\Delta_1 = f_1 - f_0$ $\Delta_2 = f_1 - f_2$

f_1 = முகட்டுப்பிரிவின் நிகழ்வெண்

f_0 = முகட்டுப்பிரிவின் முந்தைய நிகழ்வெண்

f_2 = முகட்டுப்பிரிவின் அடுத்த நிகழ்வெண்.

C = முகட்டுப்பிரிவின் பிரிவுத் தூரம்

மேற்கூறிய வாய்ப்பாட்டினை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\text{முகடு} = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c$$

குறிப்புகள்:

1. $(2f_1 - f_0 - f_2)$ மதிப்பு பூச்சியம் எனில் முகட்டை, பின்வரும் வாய்ப்பாட்டின் மூலம் பெறலாம்.

$$\text{முகடு } M_0 = l + \frac{(f_1 - f_0)}{|f_1 - f_0| + |f_1 - f_2|} \times c$$

2. முதல் பிரிவு இடைவெளியில் முகடு அமைந்தால் f_0 வின் மதிப்பை பூச்சியமாக எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.
3. திறந்த பிரிவு இடைவெளியைக் கொண்ட பரவலில் முகடானது திறந்த பிரிவு இடைவெளியில் அமையாத வரையில், முகட்டைக் கணிப்பதில் எந்த ஒரு சிக்கலும் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 31:

கீழ்க்கண்ட அலைவெண் பரவலுக்கு முகட்டைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்
0-50	5
50-100	14
100-150	40
150-200	91
200-250	150
250-300	87
300-350	60
350-400	38
400 க்கு மேல்	15

தீர்வு:

உயர்ந்த நிகழ்வெண் 150 அதற்கு ஒத்த பிரிவு இடைவெளி 200-250.

அதுவே முகட்டு பிரிவாகும். இதில் $l=200, f_1=150, f_0=91, f_2=87, C=50$

$$\text{முகடு} = M_0 = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c$$

$$= 200 + \frac{150-91}{2 \times 150 - 91 - 87} \times 50$$

$$= 200 + 24.18 = 224.18$$

முகட்டுப் பிரிவை நிர்ணயித்தல்:

மிக உயர்ந்த அலைவெண்ணே அலைவெண் பரவலுக்கான முகட்டுப் பிரிவாகும். ஆனால் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இடங்களில் முகட்டுப்பிரிவு பின்வரும் நிலைகளில்.

1. மிக உயர்ந்த அலைவெண் அடிக்கடி வருமேயானால்
2. பரவலின் ஆரம்பத்தில் அல்லது முடிவில் மிக உயர்ந்த அலைவெண் நிகழுமேயானால்
3. பரவலின் மதிப்புகள் ஒழுங்கற்ற முறையில் இருக்குமேயானால், தொகுப்பு முறையில் முகட்டு பிரிவு காணப்படுகிறது.

முகட்டைக் கணக்கிடுவதற்கான படிகள்:

6 நிரல்கள் கொண்ட ஓர் தொகுப்பு முறை அட்டவணை தயார் செய்தல் வேண்டும்.

1. முதல் நிரலில் கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண்களை எழுதுக.
2. இரண்டு இரண்டாகக் கூட்டி வரும் நிகழ்வெண்களை 2வது நிரலில் எழுதுக.
3. முதல் நிகழ்வெண்ணை விட்டு விட்டு, மீதியுள்ள அலைவெண்களை இரண்டு இரண்டாகக் கூட்டி 3வது நிரலில் எழுதுக.
4. மூன்று மூன்றாகக் கூட்டி வரும் நிகழ்வெண்களை 4வது நிரலில் எழுது.
5. முதல் நிகழ்வெண்ணை விட்டு விட்டு, மீதியுள்ள நிகழ்வெண்களை மூன்று மூன்றாகக் கூட்டி வரும் நிகழ்வெண்களை 5வது நிரலில் எழுதுக.
6. முதல் இரு நிகழ்வெண்களை விட்டு விட்டு, மீதியுள்ள நிகழ்வெண்களை மூன்று மூன்றாகக் கூட்டி 6வது நிரலில் எழுதுக.

ஒவ்வொரு நிரலிலும் உள்ள அதிகபட்ச நிகழ்வெண்களைக் கோடிட்டு காட்டவும். பிறகு முகட்டுப் பிரிவைக் காண ஓர் ஆய்வுப் பட்டியல் தயார் செய்ய வேண்டும். முகட்டுப் பிரிவைக் கண்டு பிடித்த பின்னர் வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்தி முகட்டின் மதிப்பை கணக்கிட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 32:

பின்வரும் அலைவெண் பரவலுக்கான முகட்டை கணக்கிடுக.

பிரிவு இடைவெளி	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
அலைவெண்	9	12	15	16	17	15	10	13

தீர்வு:

தொகுப்புமுறை அட்டவணை:

CI	f	2	3	4	5	6
0-5	9	21				
5-10	12		27	36		
10-15	15	31			**43**	
15-20	16		**33**			**48**
20-25	**17**	**32**		**48**		
25-30	15		25		42	38
30-35	10	23				
35-40	13					

பகுப்பாய்வு அட்டவணை:

நிரல்கள்	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
1					1			
2					1	1		
3				1	1			
4				1	1	1		
5		1	1	1				
6			1	1	1			
மொத்தம்		1	2	4	**5**	2		

அதிகபட்ச மதிப்பு 20-25 ல் இருப்பதால் அதுவே முகட்டு பிரிவாகும்

$$\text{முகடு} = M_o = l + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times C$$

இங்கு $l = 20$; $\Delta_1 = f_1 - f_0 = 17 - 16 = 1$

$\Delta_2 = f_1 - f_2 = 17 - 15 = 2$

$$\therefore M_0 = 20 + \frac{1}{1+2} \times 5 = 20 + 1.67 = 21.67$$

வரைபடம் மூலம் முகடு கணக்கிடல்:

படிகள்:

1. கொடுக்கப்பட்ட பரவலுக்கு ஒரு பரவல் செவ்வக படம் வரையவும்.
2. மிக உயர்ந்த செவ்வகம் முகட்டுப் பிரிவைக் குறிக்கும்.
3. இச் செவ்வகத்தின் மேல் வலது முனையை முந்தின செவ்வகத்தின் வலது முனையோடும் மேல் இடது முனையை அடுத்த செவ்வகத்தின் இடது முனையோடும் இணைக்கவும்.

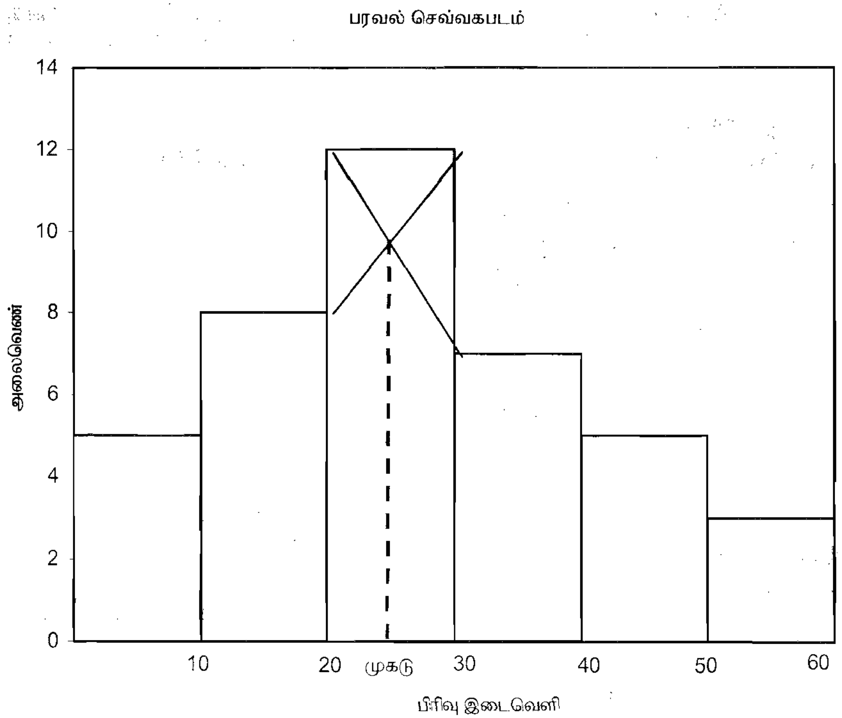
4. இவ்விரு கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியிலிருந்து X-அச்சுக்கு செங்குத்துக் கோடு வைரக, X-அச்சை வெட்டும் புள்ளி முகட்டைக் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 33:

பின்வரும் அலைவெண் பரவலுக்கான முகட்டின் மதிப்பை வரைபடம் மூலம் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
அலைவெண்	5	8	12	7	5	3

தீர்வு:



முகடு:

நிறைகள்:

1. இதனைக் கணக்கிடுவது எளிது. மேலும் சில இடங்களில் பார்த்த அளவிலே முகட்டைக் காண இயலும்.
2. முனை மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.

3. திறந்த பிரிவு இடைவெளியைக் கொண்ட பரவலுக்கும் இதனைக் கணக்கிட முடியும்.
4. இது பொதுவாக தொடரின் முக்கிய பகுதியின் சரியான மதிப்பைத் தருகிறது.
5. விவரத்தை சிறந்த முறையில் பிரதிபலிக்கும் ஓர் இட மதிப்பாக உள்ளது.

குறைகள்:

1. எல்லா மதிப்புகளையும் அடிப்படையாகக் கொண்டு அமைக்கப்படுவதில்லை.
2. கணித செயல்பாடுகளுக்கு இதனை பயன்படுத்த முடியாது.
3. சில இடங்களில் பொதுவாகவே முகடு சரியாக வரையறுக்கப்படாவிடில் முகட்டைக் காண இயலாது.
4. கூட்டுச் சராசரியை ஒப்பிடும்போது மாதிரி கணக்கெடுப்பின் ஏற்றத்தாழ்வுகளால் முகடு மிக அதிக அளவில் பாதிக்கப்படுகிறது.
5. உறுப்புகளின் முக்கிய தொடர்பை கருத வேண்டிய இடங்களில் இது பொருந்தாது.

அனுபவத்தொடர்பு:

சமச்சீரான பரவலில் சராசரி = இடைநிலை = முகடு என இருக்கும். சமச்சீரற்ற பரவலுக்கான சராசரிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பை பேராசிரியர் கார்ல் பியர்சன் (Prof. Karl Pearson) என்பவர் பின்வரும் வாய்ப்பாட்டின் மூலம் குறிப்பிடுகிறார்.

முகடு = 3 இடைநிலை அளவு - 2 சராசரி.

எடுத்துக்காட்டு 34:

சமச்சீரற்ற தொடரில் சராசரி மற்றும் இடைநிலைகள் முறையே 26.8 மற்றும் 27.9 எனில் சரியான முகடு என்ன?

தீர்வு:

அனுபவத் தொடர்பிற்கான வாய்ப்பாடு

$$\text{முகடு} = 3\ \text{இடைநிலை} - 2\ \text{சராசரி}$$

$$= 3 \times 27.9 - 2 \times 26.8 = 30.1$$

எடுத்துக்காட்டு 35:

சமச்சீரற்ற பரவலில் முகடு மற்றும் சராசரி முறையே 32.1 மற்றும் 35.4 எனில் இடைநிலை மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

அனுபவத் தொடர்பிற்கான வாய்ப்பாடு

$$\text{இடைநிலை} = \frac{1}{3}\ [2\ \text{சராசரி} + \text{முகடு}] = \frac{1}{3}\ [2 \times 35.4 + 32.1] = 34.3$$

பயிற்சி-6

I சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக:

1. பின்வருவனவற்றில் இடைநிலை எதைக் குறிக்கிறது?
   (அ) முதல் காலமானம் (இ) ஆறின் பதின்மானம்
   (ஆ) 50வது நூற்று மானம் (ஈ) மூன்றாம் காலமானம்
2. வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரமானது திறந்த பிரிவு இடைவெளிகளில் அமைந்திருந்தால் பின்வருவனவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றை கணக்கிட முடியாது.
   (அ) இடைநிலை (ஆ) முகடு
   (இ) கூட்டுச்சராசரி (ஈ) காலமானம்
3. $\left(\frac{1}{16}\right)$ மற்றும் $\left(\frac{4}{25}\right)$ என்ற இரு எண்களின் பெருக்குச் சராசரியானது
   (அ) $\left(\frac{1}{10}\right)$ (ஆ) $\left(\frac{1}{100}\right)$ (இ) 10 (ஈ) 100
4. சமச்சீரான பரவலில்
   (அ) சராசரி = இடைநிலை = முகடு
   (ஆ) சராசரி $\neq$ இடைநிலை $\neq$ முகடு
   (இ) சராசரி > இடைநிலை > முகடு
   (ஈ) சராசரி< இடைநிலை < முகடு
5. ஓர் பரவலில் முகட்டின் மதிப்பு தெளிவாக இல்லை எனில் பின்வரும் ஏதேனும் ஒரு முறையில் மூலம் முகட்டை பெற முடியும்.
   (அ) தொகுப்பு முறை (ஆ) யூகிப்பு முறை
   (இ) சுருக்கு முறை (ஈ) தட்டுத்தடுமாறி கற்றல் முறை
6. இந்தியாவில் உள்ள பெரும்பாலான மக்களின் பாதணியின் அளவு எண் 7 எனில் இது மைய மதிப்புகளில் எந்த அளவைக் குறிப்பிடுகிறது?
   (அ) சராசரி (ஆ) இரண்டாம் காலமானம்
   (இ) எட்டாவது பதின்மானம் (ஈ) முகடு
7. ஓர் வரிசைப் படுத்தப்பட்ட தொடரில் நடு மதிப்பு என்பது
   (அ) இரண்டாம் காலமானம் (ஆ) ஐந்தாவது பதின்மானம்
   (இ) 50வது நூற்றுமானம் (ஈ) மேற்கூறிய அனைத்தும்
8. ஒரு தொடரின் எந்த மதிப்பானது 10 சமபாகங்களாகப் பிரிக்கிறது
   (அ) காலமானங்கள் (ஆ) பதின்மானங்கள்
   (இ) இடைநிலை (ஈ) நூற்றுமானங்கள்

9. நூற்றுமானத்தில் பிரிவுகளின் மதிப்பின் மொத்த எண்ணிக்கை
(அ) 10 (ஆ) 59 (இ) 100 (ஈ) 99
10. முதல் கால்மானம் ஓர் அலைவெண் பரவலை பின்வரும் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது
(அ) 4:1 (ஆ) 1:4 (இ) 3:1 (ஈ) 1:3
11. சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களின் கூடுதல்
அ) பூச்சியம் (ஆ) குறைந்தபட்சம் (இ)அதிகபட்சம் (ஈ) 1
12. பரவல் செவ்வகபடம் என்ற வரைபடத்தின் மூலம் இதன் மதிப்பை கணக்கிடலாம்.
(அ) சராசரி (ஆ) இடைநிலை
(இ) முகடு (ஈ)மேற்கூறிய அனைத்தும்
13. இடைநிலை அளவை பின்வரும் வரைபடத்தின் மூலம் கணக்கிட முடியும்.
(அ) பரவல் செவ்வகப் படம் (ஆ) ஓகைவ்
(இ) பட்டை விளக்கப்படம் (ஈ) சிதறல் விளக்கப்படம்
14. ஆறாவது பதின்மானம் என்பது
(அ) இடைநிலை (ஆ) 50வது நூற்றுமானம்
(இ) 60வது நூற்றுமானம் (ஈ) முதல் கால் மானம்
15. எந்த சதவீத மதிப்பு 5 ஆவது மற்றும் 25 ஆவது நூற்றுமானங்களுக்கு இடையில் அமையும்?
(அ) 5% (ஆ) 20% (இ) 30% (ஈ) 75%

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக:

16. ஒவ்வொரு மதிப்புகளிலிருந்தும் 5 ஐ கழித்தோமேயானால் மதிப்புகளின் சராசரியும் _________ ஆக குறையும்.
17. 1 லிருந்து n வரையுள்ள ‘n’இயல் எண்களின் கூட்டுச் சராசரியானது__________.
18. ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு _________ எனில் பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிட இயலாது.
19. வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்கள் ________ கொடுக்கப்பட்டால் இடைநிலை அளவே மிகப் பொருத்தமான சராசரி ஆகும்.
20. மூன்றாம் கால்மானம் மற்றும் __________ நூற்றுமானம் இரண்டும் ஒன்றே.

III. பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளிக்க:

21. மையப் போக்கு அளவைகள் பற்றி நீவிர் அறிவது என்ன?
22. மையப்போக்கு அளவைகளில் சிறந்த அளவையின் சிறப்பு இயல்புகள் யாவை?
23. சராசரி என்பதன் பொருள் என்ன?

24. பெருக்குச் சராசரி மற்றும் இசைச் சராசரிகள் பொருத்தமான சராசரியாக இருப்பதற்கான இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகளைத் தருக.
25. இடைநிலை அளவை வரையறுக்க? இதன் நிறை, குறைகளை விவரிக்கவும்.
26. 10 குடும்பங்களின் மாத வருமானம் (ரூபாயில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

குடும்பம்	A	B	C	D	E	F	G
வருமானம் (ரூபாயில்)	30	70	60	100	200	150	300

இவற்றைக் கொண்டு (அ) நேரடி முறை மற்றும் (ஆ) சுருக்கு முறையில் கூட்டுச் சராசரி காண்க.

27. விவரங்களுக்கான கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

X:	5	8	12	15	20	24
F:	3	4	6	5	3	2

28. ஓர் நிறுவனத்தில் பணிபுரியும் தொழிலாளர்களின் வார வருமானத்தை பின்வரும் அட்டவணை விளக்குகிறது.

வார ஊதியம் (ரூபாய் 100 இல்)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	5	10	15	18	7	8	5	3

இவற்றின் சராசரி வார வருமானத்தைக் காண்க.

29. 20 மதிப்புகளின் சராசரி 45. 46 என்ற மதிப்பிற்கு பதிலாக 64 என்று எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டதால் திருத்தப்பட்ட சராசரியைக் காண்க.
30. பின்வரும் விவரங்களின் சராசரி 15.38 எனில் விடுபட்ட அலைவெண்ணைக் காண்க.

அளவு	10	12	14	16	18	20
அலைவெண்	3	7	___	20	8	5

31. ஒரு குறிப்பிட்ட வணிக நிறுவனத்தில் தொழிலாளர்களின் வார ஊதியம் (ரூபாயில்) பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 49-52 என்ற பிரிவு இடைவெளியின் நிகழ்வெண் விடுபட்டுள்ளது. அப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி ரூபாய்.47.2 எனில் விடுபட்ட நிகழ்வெண்ணைக் காண்க.

வார ஊதியம் (ரூபாய்)	40-43	43-46	46-49	49-52	52-55
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	31	58	60	—	27

32. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து இணைந்த கூட்டுச் சராசரியைக் கண்டுபிடி.

$X_1 = 2\overline{10}$ $n_1=50$ $X_2 = 150$ $n_2 = 100$

33. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து இணைந்த கூட்டுச் சராசரியைக் கண்டுபிடி.

℘ரிவு	1	2	3
ஏண்ணிக்கை	200	250	300
சுராசரி	25	10	15

34. ஒரு தொழிற்சாலையில் முதல் ஒன்பது மாதங்களின் சராசரி மாத உற்பத்தி 2584 அலகுகள் மேலும் மீதமுள்ள 3 மாதங்களின் சராசரி மாத உற்பத்தி 2416 அலகுகள் அவ்வருடத்திற்கான சராசரி மாத உற்பத்தியைக் கணக்கிடுக.

35. A,B,C என்ற பாடங்களில் ஒரு மாணவனின் எழுத்து மற்றும் வாய்மொழித் தேர்வின் மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு: எழுத்து தேர்வின் மொத்த மதிப்பெண் 75 எனவும், வாய்மொழித் தேர்வின் மொத்த மதிப்பெண் 25 எனவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. வாய்மொழித் தேர்வின் மதிப்பெண்ணை எடையாக கொண்டு எழுத்துத் தேர்வின் மதிப்பெண்களின் நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க. எழுத்து, மற்றும் வாய்மொழித் தேர்வின் மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு.

27, 24, 43, 5, 10, 15

36. எட்டு குடும்பங்களின் மாத வருமானம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் பெருக்குச் சராசரியைக் காண்க.

குடும்பம்	A	B	C	D	E	F	G	H
வருமானம் (ரூபாயில்)	70	10	500	75	8	250	8	42

37. மாதிரிக்காக எடுக்கப்பட்ட திருகாணிகளின் விட்டங்களின் அளவை பின்வரும் அட்டவணைத் தருகிறது. பெருக்குச் சராசரியைப் பயன்படுத்தி விட்ட சராசரியைக் காண்க.

விட்டம் (மி.மீ)	130	135	140	145	146	148	149	150	157
திருகாணிகளின் எண்ணிக்கை	3	4	6	6	3	5	2	1	1

38. ஒரு நிறுவனத்தில் ஒரு முதலீட்டாளர் ஒவ்வொரு மாதமும் ரூ.1200 மதிப்புள்ள பங்குகளை வாங்குகிறார். முதல் 5 மாதங்களில் ஒரு பங்கின் விலை முறையே ரூ.10, ரூ.12, ரூ.15, ரூ.20 மற்றும் ரூ.24 என்றவாறு வாங்கினார். 5 மாதங்களுக்கு பிறகு அவர் வாங்கிய பங்குகளின் சராசரி விலை என்ன?

39. பின்வரும் விவரங்களுக்கு இடைநிலை அளவைக் கணக்கிடுக.

25, 20, 15, 45, 18, 7, 10, 38, 12

40. பின்வரும் அலைவெண் பரவலுக்கு இடைநிலை அளவைக் கணக்கிடுக.

ஊதியம் (ரூபாயில்)	60-70	50-60	40-50	30-40	20-30
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	7	21	11	6	5

41. ஒரு நகரத்தில் 100 சிறிய சில்லறை நிறுவனத்தின் வருட சம்பள பட்டியல் தொடர்பான அலைவெண் பரவலின் அட்டவணைத் தருகிறது. இவற்றின் இடைநிலை சம்பள பட்டியலைக் காண்க.

வருடாந்திர சம்பள பட்டியல்	நிறுவனங்கள்
10 க்கு குறைவாக	8
10 மற்றும் 20 க்கு குறைவாக	12
20 மற்றும் 30 க்கு குறைவாக	18
30 மற்றும் 40 க்கு குறைவாக	30
40 மற்றும் 50 க்கு குறைவாக	20
50 மற்றும் 60 க்கு குறைவாக	12
	100

42. கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திலிருந்து முதல் மற்றும் மூன்றாம் மானங்கள், இடைநிலை ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

ஊதியம் (ரூபாயில்)	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	ஊதியம்	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
30 க்கு மேல்	520	70 க்கு மேல்	105
40 க்கு மேல்	470	80 க்கு மேல்	45
50 க்கு மேல்	399	90 க்கு மேல்	7
60 க்கு மேல்	210		

43. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து முதல் மற்றும் மூன்றாம் இடைநிலை D_6, P_{20} ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

மதிப்பெண்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	மதிப்பெண்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
10 க்கு குறைவாக	5	40-50	90
10-20	25	50-60	40
20-30	40	60-70	20
30-40	70	70 க்கு மேல்	10

44. பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஓகைவ் வளைவரைகள் வரைந்து அதன் மூலம் இடைநிலை அளவு முதல் மற்றும் மூன்றாம் கால் மானங்களைக் காண்க.

பிரிவுகள்	90-100	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160
அலைவெண்	16	22	45	60	50	24	10

45. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து முகடு மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

வருமானம் (ரூபாயில்)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
நபர்களின் எண்ணிக்கை	24	42	56	66	108	130	154

46. பின்வரும் விவரங்களுக்கு பரவல் செவ்வக படம் வரைந்து அதிலிருந்து முகடு மதிப்பினைக் காண்க.

வார ஊதியம் (ரூபாயில்)	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
தொழிலாளர் களின் எண்ணிக்கை	7	9	27	15	12	12	8

IV. செய்து பார்க்க :

47. உனது வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களின் உயரங்கள் மற்றும் எடைகளை அளவீடு செய்க. அவற்றின் சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு ஆகியவற்றை கணக்கிட்டு அவற்றை ஒப்பிடுக.
48. உனது வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களின் பல்வேறு பாடங்களில் பெற்ற சராசரி மதிப்பெண்களைக் காண்க.

விடைகள்:

I.

1. (ஆ)	2. (இ)	3. (அ)	4. (அ)
5. (அ)	6. (ஈ)	7. (ஈ)	8. (ஆ)
9. (இ)	10. (ஈ)	11. (அ)	12. (இ)
13. (ஆ)	14. (இ)	15. (ஆ)	

II.

16. 5   17 $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ 18. 0 மற்றும் எதிரிடை

19. திறந்த பிரிவு   20. $75^{\text{வது}}$

III .

26. 130	27. 13.13	28. 35	29. 44.1
30. 12	31. 44	32. 170	33. 16
34. 2542	35. 34	36. பெருக்கு சராசரி = 45.27	
37. 142.5மி.மீ	38. ரூ.14.63	39. இடைநிலை = 18	40. 51.42
41. 34	42. 57.3		

43. Q_1=30.714; Q_2=49.44; இடைநிலை=41.11; D_6=44.44; P_{20}=27.5

44. இடைநிலை =125.08; Q_1=114.18; Q_3=135.45

45 முகடு = 71.34

7. சிதறல் அளவைகள் - கோட்ட அளவை மற்றும் தட்டை அளவை

7.1 அறிமுகம்:

மைய நிலைப் போக்கு அளவைகள் ஒரு பரவலின் மையத் தன்மையை அறிய உதவுகின்றன. ஆனால் பரவலின் மதிப்புகள் மைய நிலைப் போக்கு அளவையினின்று இரு புறமும் எவ்வாறு சிதறி உள்ளன என்பதை அவை வெளிப்படுத்துவதில்லை, அலைவெண் பரவலின் இத்தகைய பண்பை பொதுவாக 'சிதறல்' என்று குறிப்பிடுவர். பரவலின் மதிப்புகளின் இடையே வேறுபாடுகள் அல்லது மாறுபாடுகள் உள்ளன. இந்த மாறுபாடுகளின் அளவை அளக்க வெவ்வேறு வகை சிதறல் அளவைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. ஒரு பரவலின் சிதறல் அளவை மதிப்பு குறைந்து காணப்பட்டால் அப்பரவலின் மதிப்புகள் அதிக சீரானவை என்றும், சிதறல் அளவை மதிப்பு அதிகமாக இருந்தால் அதன் மதிப்புகள் சீரற்றவை என்றும் வெளிப்படுத்தப்படுகின்றன. எடுத்துக் காட்டாக கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரண்டு மாணவர்களின் மதிப்பெண்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

மாணவர் I	மாணவர் II
68	85
75	90
65	80
67	25
70	65

மாணவர் ஒவ்வொருவரின் மதிப்பெண் கூடுதல் 345 மற்றும் சராசரி 69 ஆகவும் உள்ளன. உண்மை என்னவென்றால் இரண்டாவது மாணவன் ஒரு பாடத்தில் தோல்வி அடைந்துள்ளான். சராசரிகளை மட்டும் கணக்கில் கொண்டால் இரண்டு மாணவர்களுமே சமம். ஆனால் இரண்டாவது மாணவனை விட முதல் மாணவன் குறைந்த மாறுபாட்டளவை கொண்டவன். குறைந்த மாறுபாடு என்பது கருத்தில் கொள்ள வேண்டிய பண்பாகும்.

சிறந்த சிதறல் அளவைக்குரிய குணாதிசயங்கள்:

ஒரு விழுமிய சிதறல் அளவையிடம் எதிர்பார்க்கப்படும் பண்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1. இது நன்கு வரையறுக்கப்பட வேண்டும்.
2. இது பரவலின் எல்லா மதிப்புகளையும் சார்ந்து அமைதல் வேண்டும்.

3. இது விளிம்பு மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படாததாக இருக்க வேண்டும்.
4. இது மேலும் கணித விரிவாக்கத்திற்கு உட்படுத்திக் கொள்வதாக இருத்தல் வேண்டும்.
5. இது சாதாரணமாக புரிந்து கொள்ளக் கூடியதாக மற்றும் எளிதாக கணக்கிட கூடியதாக இருக்க வேண்டும்.

7.2 தனித்த மற்றும் ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவைகள்:

இங்கு இரண்டு வகை சிதறல் அளவைகள் உள்ளன, அவை

1. தனித்த சிதறல் அளவைகள்
2. ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவைகள்

ஒரு தொகுதி மதிப்புகளின் மாறுபாட்டு அளவையை அந்த மதிப்புகளின் அலகுகளைக் கொண்டே குறிப்பது தனித்த சிதறல் அளவைகளாகும். எடுத்துக் காட்டாக வெவ்வேறு நாட்களில் பெய்த மழை அளவுகள் மி.மீ என்ற அலகில் கிடைக்கப் பெற்றால் அவற்றின் மாறுபாட்டளவையும், எந்த ஒரு சிதறல் அளவையும் மி.மீ என்ற அலகிலேயே இருக்கும். இதற்கு மாறாக ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவைகள் அலகினை கொள்ளாமல் மூல அலகில்லாத ஓர் எண்ணாகிறது. வெவ்வேறு அலகுகளைக் கொண்ட இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தொகுதிகளின் மாறுபாட்டை ஒப்பிடுவதற்கு இவை பயன்படுகின்றன.

வெவ்வேறு தனித்த மற்றும் ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவைகள் கீழே பட்டியலிடப்பட்டுள்ளன.

	தனித்த அளவை	ஒப்பீட்டு அளவை
1.	வீச்சு	வீச்சுக் கெழு
2.	கால்மான விலக்கம்	கால்மான விலக்கக் கெழு
3.	சராசரி விலக்கம்	சராசரி விலக்கக் கெழு
4.	திட்ட விலக்கம்	மாறுபாட்டுக் கெழு

7.3 வீச்சு மற்றும் வீச்சுக் கெழு:

7.3.1 வீச்சு:

இது மிகவும் சாதாரண சிதறல் அளவையாகும். இது மிகப்பெரிய மற்றும் மிகச் சிறிய மதிப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறியீட்டில், வீச்சு = $L - S$.

இங்கு L = மிகப் பெரிய மதிப்பு.; S = மிகச் சிறிய மதிப்பு.

தனித்தொகுதி மற்றும் தொடர்ச்சியற்ற தொகுதிகளில் L மற்றும் S எளிதாக அறியப்படுகிறது. தொடர் தொகுதியில் கீழ்கண்ட இர்ணடு முறைகள் பின்பற்றப்படுகின்றன.

முறை 1:

L = அதிகபட்ச பிரிவின் மேல் எல்லை

S = குறைந்தபட்ச பிரிவின் கீழ் எல்லை.

முறை 2:

L = அதிகபட்ச பிரிவின் மைய மதிப்பு.

S = குறைந்தபட்ச பிரிவின் மைய மதிப்பு.

7.3.2 வீச்சுக் கெழு:

$$\text{வீச்சுக் கெழு} = \frac{L-S}{L+S}$$

எடுத்துக்காட்டு 1:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு வீச்சு மற்றும் அதன் கெழுவை காண்க.

$$7, 9, 6, 8, 11, 10, 4$$

தீர்வு:

$L=11$, $S=4$.

$$\text{வீச்சு} = L-S = 11-4 = 7$$

$$\text{வீச்சுக் கெழு} = \frac{L-S}{L+S}$$

$$= \frac{11-4}{11+4} = \frac{7}{15}$$

$$= 0.4667$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

கீழ்கண்ட பரவலிலிருந்து வீச்சு மற்றும் அதன் வீச்சுக் கெழுவை கணக்கிடுக.

அளவு	60-63	63-66	66-69	69-72	72-75
எண்ணிக்கை	5	18	42	27	8

தீர்வு:

L = அதிக பட்ச பிரிவின் மேல் எல்லை = 75

S = குறைந்த பட்ச பிரிவின் கீழ் எல்லை. = 60

$$\text{வீச்சு} = L-S = 75-60 = 15$$

$$\text{வீச்சுக் கெழு} = \frac{L-S}{L+S}$$

$$= \frac{75-60}{75+60}$$

$$= \frac{15}{135} = 0.1111$$

7.3.3 வீச்சின் சிறப்பியல்புகள் மற்றும் குறைபாடுகள்:

சிறப்பியல்புகள்:

1. இது புரிந்து கொள்வதற்கு எளிதானது.
2. இது கணக்கிடுவதற்கு எளிதானது.
3. தரக்கபட்டுப்பாடு, தட்ப வெட்ப நிலை முன்னறிதல், மற்றும் பங்கு விலை ஆய்வு போன்ற பல வகை கணக்குகளில் வீச்சு பெரிதும் பயன்படுகிறது.

குறைபாடுகள்:

1. இது விளிம்பு மதிப்புகளால் பெரிதும் பாதிக்கப்படுகின்றது.
2. இது இரு விளிம்பு மதிப்புகளை மட்டும் சார்ந்துள்ளது.
3. திறந்த-வெளி பிரிவு இடைவெளிகளில் இதை கணக்கிட முடியாது.
4. இது மேலும் கணக்கியல் விரிவாக்கத்திற்கு உகந்ததல்ல.
5. இது எப்போதாவது பயன்படுத்தப்படும் அளவை.

7.4 கால்மான விலக்கம் மற்றும் கால்மான விலக்கக் கெழு:

7.4.1 கால்மான விலக்கம்: (Q.D)

வரையறை:

கால்மான விலக்கமானது, முதல் மற்றும் மூன்றாம் கால்மான விலக்கங்களிடையே உள்ள வித்தியாசத்தில் பாதியாகும். எனவே இது அரை இடைக் கால்மான வீச்சு எனப்படுகிறது.

குறியீடுகளில், $Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$. Q_1, Q_2 மற்றும் Q_3 என்ற கால்மானங்களில், $Q_3 - Q_1$ என்பது இடைக்கால்மான வீச்சு எனவும், $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$, அரை இடைக் கால்மான வீச்சு எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன.

7.4.2 கால்மான விலக்கக் கெழு:

$$\text{கால்மான விலக்கக் கெழு } Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

எடுத்துக்காட்டு 3:

கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு கால்மான விலக்கத்தை காண்க:

$$391, 384, 591, 407, 672, 522, 777, 733, 1490, 2488$$

தீர்வு:

கொடுத்திருக்கும் மதிப்புகளை ஏறுவரிசையில் அமைக்கவும்.

384, 391, 407, 522, 591, 672, 733, 777, 1490, 2488.

Q_1 மதிப்பு, $\frac{n+1}{4} = \frac{10+1}{4} = 2.75$ ஆவது உறுப்பின் மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது.

$Q_1 = 2$ ஆவது மதிப்பு $+ 0.75$ (3 ஆவது மதிப்பு $- 2$ ஆவது மதிப்பு)

$= 391 + 0.75\,(407 - 391)$

$= 391 + 0.75 \times 16$

$= 391 + 12 = 403$

Q_3 இன் மதிப்பு, $3\,\frac{n+1}{4} = 3 \times 2.75 = 8.25$ ஆவது உறுப்பின் மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது.

$Q_3 = 8$ ஆவது மதிப்பு$+ 0.25$ (9 ஆவது மதிப்பு$-$ 8 ஆவது மதிப்பு)

$= 777 + 0.25\,(1490 - 777)$

$= 777 + 0.25\,(713)$

$= 777 + 178.25$

$= 955.25$

$$Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{955.25 - 403}{2}$$

$$= \frac{552.25}{2}$$

$$= 276.125$$

எடுத்துக்காட்டு 4:

கூலித் தொழிலாளர்களின் வார ஊதியங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கால்மான விலக்கம் மற்றும் கால்மான விலக்கக் கெழு இவற்றை கணக்கிடுக.

வார ஊதியம் (ரூ)	100	200	400	500	600
வாரங்களின் எண்ணிக்கை	5	8	21	12	6

தீர்வு:

வார ஊதியம் (ரூ)	வாரங்களின் எண்ணிக்கை	வாரங்களின் திறள் எண்ணிக்கை
100	5	5
200	8	13
400	21	34
500	12	46
600	6	52
மொத்தம்	N=52	

Q_1 இன் மதிப்பு, $\frac{N+1}{4} = \frac{52+1}{4} = 13.25$ ஆவது உறுப்பின் மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது.

$Q_1 = 13$ ஆவது மதிப்பு $+ 0.25$ (14 ஆவது மதிப்பு $- 13$ ஆவது மதிப்பு)

$= 13$ ஆவது மதிப்பு $+ 0.25\,(400 - 200)$

$= 200 + 0.25\,(400 - 200)$

$= 200 + 0.25\,(200)$

$= 200 + 50 = 250$

Q_3 இன் மதிப்பு, $3\left(\frac{N+1}{4}\right) = 3 \times 13.25 = 39.75$ ஆவது உறுப்பின் மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது.

$Q_3 = 39$ ஆவது மதிப்பு $+ 0.75$ (40 ஆவது மதிப்பு$-$ 39 ஆவது மதிப்பு)

$= 500 + 0.75\,(500 - 500)$

$= 500 + 0.75 \times 0 = 500$

கால்மான விலக்கம் $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{500 - 250}{2} = \frac{250}{2} = 125$

கால்மான விலக்கக் கெழு $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{500 - 250}{500 + 250}$$

$$= \frac{250}{750} = 0.3333$$

எடுத்துக்காட்டு 5:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு, கால்மான விலக்கம் மற்றும் கால்மான விலக்கக் கெழு காண்க.

C.I :	351 – 500	501 – 650	651 – 800	801–950	951–1100
f :	48	189	88	4	28

தீர்வு:

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்	உண்மை பிரிவு இடைவெளிகள்	குவிவு அலைவெண்
351- 500	48	350.5- 500.5	48
501- 650	189	500.5- 650.5	237
651- 800	88	650.5- 800.5	325
801- 950	47	800.5- 950.5	372
951- 1100	28	950.5- 1100.5	400
மொத்தம்	N = 400		

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f_1} \times c_1$$

$$\frac{N}{4} = \frac{400}{4} = 100$$

Q_1 பிரிவு 500.5 – 650.5

$l_1 = 500.5,\ m_1 = 48,\ f_1 = 189,\ c_1 = 150$

$$\therefore Q_1 = 500.5 + \frac{100-48}{189} \times 150$$

$$= 500.5 + \frac{52 \times 150}{189}$$

$$= 500.5 + 41.27 = 541.77$$

$$Q_3 = l_3 + \frac{3\frac{N}{4} - m_3}{f_3} \times c_3$$

$$3\frac{N}{4} = 3 \times 100 = 300,$$

Q3 பிரிவு 650.5 – 800.5

$l_3 = 650.5,\ m_3 = 237,\ f_3 = 88,\ C_3 = 150$

$$\therefore Q_3 = 650.5 + \frac{300-237}{88} \times 150$$

$$= 650.5 + \frac{63 \times 150}{88}$$

$$= 650.5 + 107.39$$

$$= 757.89$$

$$\therefore \text{கால்மான விலக்கம்} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{757.89 - 541.77}{2}$$

$$= \frac{216.12}{2}$$

$$= 108.06$$

$$\text{கால்மான விலக்கக் கெழு} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

$$= \frac{757.89 - 541.77}{757.89 + 541.77}$$

$$= \frac{216.12}{1299.66} = 0.1663$$

7.4.3 கால்மான விலக்கத்தின் சிறப்பியல்புகள் மற்றும் குறைபாடுகள்:

சிறப்பியல்புகள்:

1. இது புரிந்து கொள்வதற்கு சுலபமாகவும் மற்றும் கணக்கிடுவதற்கு எளிதானதாகவும் உள்ளது.
2. இது விளிம்பு மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படாது.
3. இதை திறந்த வெளி பிரிவு விவரங்களிலும் கணக்கிட இயலும்.

குறைபாடுகள்:

1. இது எல்லா மதிப்புகளையும் சார்ந்து அமைவதில்லை. இது Q_1 மற்றும் Q_3 இரண்டை மட்டும் சார்ந்து அமையும். மேலும் 50 சதவீத விளிம்பு மதிப்புகளை இது தவிர்க்கிறது.
2. இது மேலும் கணக்கியல் விரிவாக்கத்திற்கு உகந்தது அல்ல.
3. இது, மாதிரி முறை ஏற்றத் தாழ்வுகளால் பாதிக்கப்படுகிறது.

7.5 சராசரி விலக்கம் மற்றும் சராசரி விலக்கக் கெழு:

7.5.1 சராசரி விலக்கம்:

வீச்சு மற்றும் கால்மான விலக்கம் எல்லா மதிப்புகளையும் சார்ந்தவை அல்ல. அவை இடம் அமைவதைக் குறிக்கும் அளவைகளாகும். ஒரு சராசரியிலிருந்து பரவலின் மதிப்புகள் எந்த அளவு சிதறி உள்ளன என்பதை இவை வெளிப்படுத்துவதில்லை. சிதறல் அளவையான சராசரி விலக்கம் பரவலின் எல்லா மதிப்புகளையும் சார்ந்து உள்ளது.

வரையறை:

ஏதாவது ஒரு மையப் போக்கு அளவையிலிருந்து, தொடரின் மதிப்புகள் ஏற்படுத்தும் விலக்கங்களின் சராசரியே சராசரி விலக்கமாகும். மையப் போக்கு அளவையானது கூட்டுச் சராசரி அல்லது இடைநிலை அல்லது முகடு ஆகும். எல்லா விலக்கங்களும் நேரிடை மதிப்புகளாகவே எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன, அதாவது குறிகள் தவிர்க்கப்படுகின்றன. கிளார்க் மற்றும் சேக்கடே கூற்றின் படி

‘சராசரி விலக்கமானது, பரவலின் மதிப்புகள் சராசரியாக எந்த அளவு கூட்டுச் சராசரி அல்லது இடைநிலையிலிருந்து சிதறி உள்ளன என்பதை குறிகளை தவிர்க்கும் நிலையில் கூறுவதாகும்’.

நாம் பொதுவாக சராசரி விலக்கத்தை, கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை அல்லது முகடு இதில் ஏதாவதொன்றிலிருந்து கணக்கிடுவோம். சில நேரங்களில் முகட்டை வரையறுக்க இயலாது, ஆகவே சராசரி விலக்கம் கூட்டுச் சராசரி மற்றும் இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்படுகிறது. கூட்டுச்சராசரி மற்றும் இடைநிலையில், இடைநிலையே விரும்பத்தக்கது. ஆனால் பொதுவான வழக்கத்தில், கூட்டுச்சராசரியின் பயன்பாடுகள் அதிகமாக உள்ளதால், சராசரி விலக்கம் பொதுவாக கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்படுகிறது. சராசரி விலக்கத்தை குறிப்பிட M.D என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

7.5.2 சராசரி விலக்கக் கெழு:

எந்த ஒரு மையப் போக்கு அளவையிலிருந்தும் கணக்கிடப்படும் சராசரி விலக்கமானது ஒரு தனித்த சிதறல் அளவையாகும். இரண்டு வெவ்வேறு தொடர்களின் மாறுபாட்டை ஒப்பிட்டு பார்க்க, ஒரு ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவை தேவைப்படுகிறது. சராசரி விலக்கத்தை பயன்படுத்தப்படும் சராசரியால் வகுத்து, ஒப்பீட்டு சராசரி விலக்கத்தை பெறலாம். சராசரி விலக்கக் கெழு

$$= \frac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி (அல்லது) இடைநிலை (அல்லது) முகடு}}$$

வேண்டிய மதிப்பு சதவீதத்தில் பெறப்பட வேண்டுமாயின்,
சராசரி விலக்கக் கெழு

$$= \frac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி (அல்லது) இடைநிலை (அல்லது) முகடு}} \times 100$$

7.5.3 சராசரி விலக்கத்தை கணக்கிடல்:

தனித் தொகுதிகள்:

1. தொகுதிகளின் கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை அல்லது முகடு இவற்றை கணக்கிடவும்.
2. சராசரியிலிருந்து மதிப்புகளின் விலக்கங்களை குறிகளை தவிர்க்கும் நிலையில் எடுக்கவும், அவற்றை $|D|$ என்று குறிப்பிடவும்.
3. அந்த விலக்கங்களின் மொத்தத்தை கணக்கிடவும், அதாவது $\Sigma\,|D|$.
4. கண்டுபிடிக்கப்பட்ட மொத்தத்தை, மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுக்கவும்.

குறியீடுகளில், சராசரி விலக்கம் $= \frac{\sum|D|}{n}$.

எடுத்துக்காட்டு 6:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு சராசரி விலக்கத்தை, கூட்டு சராசரி மற்றும் இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடு, மேலும் சராசரி விலக்கக் கெழுக்களையும் காண்க.

100, 150, 200, 250, 360, 490, 500, 600, 671

தீர்வு:

கூட்டுச் சராசரி $= \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{3321}{9} = 369$

இப்பொழுது விவரங்களை ஏறு வரிசையில் அமைக்கவும்.

100, 150, 200, 250, 360, 490, 500, 600, 671

இடைநிலை $= \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{ஆவது}}$ உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{9+1}{2}\right)^{\text{ஆவது}}$ உறுப்பின் மதிப்பு

$= 5^{\text{ஆவது}}$ உறுப்பின் மதிப்பு

$= 360$

X	$\lvert D\rvert = \lvert x-\bar{x}\rvert$	$\lvert D\rvert = \lvert x - \text{இடைநிலை}\rvert$
100	269	260
150	219	210
200	169	160
250	119	110
360	9	0
490	121	130
500	131	140
600	231	240
671	302	311
3321	1570	1561

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து சராசரி விலக்கம் $= \dfrac{\sum\lvert D\rvert}{n}$

$$= \frac{1570}{9}$$

$$= 174.44$$

சராசரி விலக்கக் கெழு $= \dfrac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\bar{x}}$

$$= \frac{174.44}{369}$$

$$= 0.47$$

இடை நிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம் $= \dfrac{\sum\lvert D\rvert}{n}$

$$= \frac{1561}{9}$$

$$= 173.44$$

சராசரி விலக்கக் கெழு $= \dfrac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை}}$

$$= \frac{173.44}{360}$$

$$= 0.48$$

7.5.4 சராசரி விலக்கம் - தொடர்ச்சியற்ற தொகுதி:

படிகள்:

1. ஒரு சராசரியைக் காண்க (கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை அல்லது முகடு)
2. சராசரியிலிருந்து மாறியின் மதிப்புகளுக்கு விலக்கங்களை, குறிகளை தவிர்க்கும் நிலையில் கண்டுபிடித்து அவற்றை $\lvert D\rvert$ எனக் குறிப்பிடுக.
3. ஒவ்வொரு மதிப்பின் விலக்கத்தையும் அதற்குரிய அலைவெண்ணால் பெருக்கி, அவற்றின் மொத்தம் $\sum f\lvert D\rvert$ கண்டுபிடி.
4. $\sum f\lvert D\rvert$ ஐ Nஆல் வகுக்கவும்.

குறியீடுகளில், சராசரி விலக்கம் $= \dfrac{\sum f\lvert D\rvert}{N}$

எடுத்துக்காட்டு 7:

கீழ்கண்ட விவரங்களிலிருந்து சராசரி விலக்கத்தை, கூட்டுசராசி மற்றும் இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடுக.

உயரம் (செ.மீ)	158	159	160	161	162	163	164	165	166
நபர்களின் எண்ணிக்கை	15	20	32	35	33	22	20	10	8

மேலும் சராசரி விலக்கக் கெழுவையும் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

உயரம் X	நபர்களின் எண்ணிக்கை f	d= x- A A =162	Fd	$\lvert D\rvert$ = $\lvert$X-கூட்டுச்சராசரி$\rvert$	f$\lvert D\rvert$
158	15	- 4	- 60	3.51	52.65
159	20	- 3	- 60	2.51	50.20
160	32	- 2	- 64	1.51	48.32
161	35	- 1	- 35	0.51	17.85
162	33	0	0	0.49	16.17
163	22	1	22	1.49	32.78
164	20	2	40	2.49	49.80
165	10	3	30	3.49	34.90
166	8	4	32	4.49	35.92
	195		- 95		338.59

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{N}$$

$$= 162 + \frac{-95}{195} = 162 - 0.49 = 161.51$$

சராசரி விலக்கம் $= \frac{\sum f|D|}{N} = \frac{338.59}{195} = 1.74$

சராசரி விலக்கக் கெழு = $\frac{\text{சராசரி விலக் கம்}}{\bar{X}} = \frac{1.74}{161.51} = 0.0108$

உயரம் X	நபர்களின் எண்ணிக்கை f	c.f.	$\lvert D\rvert = \lvert X-$இடைநிலை$\rvert$	$f\lvert D\rvert$
158	15	15	3	45
159	20	35	2	40
160	32	67	1	32
161	35	102	0	0
162	33	135	1	33
163	22	157	2	44
164	20	177	3	60
165	10	187	4	40
166	8	195	5	40
	195			334

இடைநிலை = $\left(\frac{N+1}{2}\right)^{\text{ஆவது}}$ உறுப்பின் அளவு

$= \left(\frac{195+1}{2}\right)^{\text{ஆவது}}$ உறுப்பின் அளவு

= 98 ஆவது உறுப்பின் அளவு.

= 161

சராசரி விலக்கம் $= \frac{\sum f|D|}{N} = \frac{334}{195} = 1.71$

சராசரி விலக்கக் கெழு = $\frac{\text{சராசரி விலக் கம்}}{\text{இடைநிலை}} = \frac{1.71}{161} = .0106$

7.5.5 சராசரி விலக்கம் - தொடர் தொகுதி

தொடர் தொகுதியில் சராசரி விலக்கம் கணக்கிடும் முறை, தொடர்ச்சியற்ற தொகுதியில் கணக்கிடும் முறைக்கு ஒத்ததாகும். தொடர் தொகுதியில் வெவ்வேறு பிரிவுகளின் மையப் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடித்து, தேர்ந்தெடுத்த சராசரியிலிருந்து அவற்றிற்கு விலக்கங்களைக் காண வேண்டும்.

சராசரி விலக்கம் $= \frac{\sum f|D|}{N}$

இங்கு $D = m -$ சராசரி $m =$ மையப் புள்ளி

எடுத்துக்காட்டு 8:

கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து சராசரி விலக்கத்தை, கூட்டுச் சராசரி மற்றும் இடைநிலையிலிருந்து காண்க.

வயது (ஆண்டுகளில்)	நபர்களின் எண்ணிக்கை
0-10	20
10-20	25
20-30	32
30-40	40
40-50	42
50-60	35
60-70	10
70-80	8

மேலும் சராசரி விலக்கக் கெழுவை கணக்கிடுக.

தீர்வு:

X	M	f	$d = \frac{m-A}{c}$ (A=35,C=10)	fd	$\lvert D\rvert = \lvert m-\bar{x}\rvert$	$f\lvert D\rvert$
0-10	5	20	-3	-60	31.5	630.0
10-20	15	25	-2	-50	21.5	537.5
20-30	25	32	-1	-32	11.5	368.0
30-40	**35**	40	0	0	1.5	60.0
40-50	45	42	1	42	8.5	357.0
50-60	55	35	2	70	18.5	647.5
60-70	65	10	3	30	28.5	285.0
70-80	75	8	4	32	38.5	308.0
		212		32		3193.0

வரையளவு:

இது கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் மதிப்புகளுக்கு பெறப்படும் விலக்கங்களின் சராசரியின் நேரிடை வர்க்க மூலம் என்றும் வரையறுக்கப்படுகிறது.

திட்ட விலக்கம் σ (sigma) என்ற கிரீக் (Greek) எழுத்து மூலம் குறிப்பிடப்படுகிறது.

7.6.2 திட்ட விலக்கம் கணக்கிடல் - தனித்தொடர்.

தனித்தொடரில் திட்ட விலக்கத்தை கணக்கிட இரண்டு முறைகள் உள்ளன.

(அ) உண்மையான சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களைப் பெறுதல்.

(ஆ) ஊக சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களைப் பெறுதல்.

(அ) உண்மையான சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களைப் பெறுதல்.

கூட்டுச் சராசரி முழு எண்ணாக இருக்கும் போது இந்த முறையை பயன்படுத்தலாம்.

படிகள்:

1. தொடரின் கூட்டுச் சராசரியை காண்க ($\bar{x}$).
2. கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் விலக்கத்தை காண்க $(x = X - \bar{X})$.
3. விலக்கங்களின் வர்க்கத்தை கண்டுபிடித்து அதன் மொத்தத்தையும் காண் $\sum x^2$.
4. மொத்தம் ($\sum x^2$) ஐ மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுக்கவும் $\left(\dfrac{\sum x^2}{n}\right)$.
5. $\left(\dfrac{\sum x^2}{n}\right)$ இன் வர்க்க மூலம் திட்ட விலக்கமாகும். ஆகவே

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum x^2}{n}\right)} \text{ அல்லது } \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}.$$

(ஆ) ஊக சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களைப் பெறுதல்.

கூட்டுச்சராசரி பின்ன எண்ணாக இருக்கும்போது இந்த முறையை பயன்படுத்தலாம். பின்ன மதிப்பிலிருந்து விலக்கங்களைப் பெறுவது கடினமான வேலையாகும். நேரத்தையும், உழைப்பையும் மிச்சப்படுத்த சுருக்கு முறையான ஊகச் சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களை பெறும் முறையை பயன்படுத்தலாம்.

அதற்கான சூத்திரம் $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum d^2}{n} - \left(\dfrac{\sum d}{n}\right)^2}$ இங்கு d என்பது ஊக சராசரியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கங்கள் (X-A) ஆகும்.

படிகள்:

1. தொடரில் ஏதாவது ஒரு உறுப்பை சராசரியாக ஊகம் செய்க (A)
2. அந்த ஊக சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களை பெறுக, அதாவது, X-A அதை d என்று குறிப்பிடுக மற்றும் அதன் மொத்தத்தை காண்க $\sum d$.
3. விலக்கங்களின் வர்க்கத்தை காண்க, அதாவது d^2 மற்றும் அதன் மொத்தம் $\sum d^2$ ஐ காண்க.
4. பிறகு இந்த மதிப்புகளை கீழ்கண்ட சூத்திரத்தில் பிரதியிடுக.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

குறிப்பு: நாம் மேலும் திட்ட விலக்கத்திற்கு எளிதான சூத்திரத்தை பயன்படுத்தலாம்

$$\sigma = \frac{1}{n}\sqrt{n\sum d^2 - \left(\sum d\right)^2}$$

அலைவெண்பரவலுக்கு $\sigma = \dfrac{c}{N}\sqrt{N\sum fd^2 - \left(\sum fd\right)^2}$

எடுத்துக்காட்டு 9:

கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுக.

14, 22, 9, 15, 20, 17, 12, 11

தீர்வு: உண்மையான சராசரியிலிருந்து விலக்கங்கள்

மதிப்புகள் (X)	$X - \bar{X}$	$(X - \bar{X})^2$
14	-1	1
22	7	49
9	-6	36
15	0	0
20	5	25
17	2	4
12	-3	9
11	-4	16
120		140

$$\overline{X} = \frac{120}{8} = 15$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\overline{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{140}{8}}$$

$$= \sqrt{17.5} = 4.18$$

எடுத்துக்காட்டு 10:

10 மாணவர்களின் புள்ளியியல் மதிப்பெண்கள் கீழே உள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுக.

மாணவர்கள் :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மதிப்பெண்கள் :	43	48	65	57	31	60	37	48	78	59

தீர்வு: (ஊக சராசரியிலிருந்து விலக்கங்கள்)

மாணவர்கள்	மதிப்பெண்கள் (x)	d=X-A (A=57)	d^2
1	43	-14	196
2	48	-9	81
3	65	8	64
4	57	0	0
5	31	-26	676
6	60	3	9
7	37	-20	400
8	48	-9	81
9	78	21	441
10	59	2	4
n = 10		$\sum d=-44$	$\sum d^2=1952$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1952}{10} - \left(\frac{-44}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{195.2 - 19.36}$$

$$= \sqrt{175.84}$$

$$= 13.26$$

7.6.3 திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுதல் - தொடர்ச்சியற்ற தொகுதி

(அ) உண்மையான சராசரி முறை.

(ஆ) ஊக சராசரி முறை

(இ) படி - விலக்க முறை

(அ) உண்மையான சராசரி முறை

படிகள்:

1. தொடரின் சராசரியை காண்க.
2. சராசரியிலிருந்து எல்லா மதிப்புகளுக்கும் விலக்கங்களை காண்க, அதாவது $x - \overline{x} = d$.
3. விலக்கங்களின் வர்க்கங்களை ($= d^2$) கண்டுபிடித்து, உரிய அலைவெண்களால் (f) பெருக்கினால் fd^2 ஐ பெறலாம்.
4. அதன் மொத்தத்தை ($\sum fd^2$) அடைந்து, பின் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துக $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$.

உண்மையான சராசரி பின்னத்தில் இருந்தால், கணக்கிடுதல் அதிக நேரத்தையும், உழைப்பையும் செலவு செய்ய வேண்டி உள்ளது. ஆகவே இந்த முறை எல்லா நேரத்திலும் பயன்படாது.

(ஆ). ஊக சராசரி முறை:

இங்கு விலக்கங்கள் உண்மையான சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படாமல் ஊக சராசரியிலிருந்து எடுக்கப் படுகிறது. மேலும் இந்த முறை மாறியின் மதிப்புகள் சமமான இடைவெளியில் அமையாத நேரத்தில் பயன்படுத்தப்படும்.

படிகள்:

1. தொடரில் ஏதாவது ஒரு உறுப்பை ஊக சராசரியாக ஊகம் செய்து அதை A என்று குறிப்பிடுக.
2. அந்த ஊக சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களை காண்க, அதாவது X-A. அதை d என்று குறிப்பிடுக.
3. இந்த விலக்கங்களை அதற்கு உரிய அலைவெண்களால் பெருக்கி, $\sum fd$ பெறுக.
4. விலக்கங்களின் வர்க்கங்களை காண்க (d^2).

5. விலக்கங்களின் வர்க்கங்களை (d^2) உரிய அலைவெண்களால் (f) பெருக்கி, $\sum fd^2$ பெறுக.
6. அந்த மதிப்புகளை கீழ்கண்ட சூத்திரத்தில் பிரதியிடுக.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \quad \text{இங்கு } d = X - A, \quad N = \sum f.$$

எடுத்துக்காட்டு 11:

கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுக.

X :	20	22	25	31	35	40	42	45
f :	5	12	15	20	25	14	10	6

தீர்வு: ஊக சராசரியிலிருந்து விலக்கங்கள்.

X	f	$d = x - A$ (A = 31)	d^2	fd	fd^2
20	5	-11	121	-55	605
22	12	-9	81	-108	972
25	15	-6	36	-90	540
31	20	0	0	0	0
35	25	4	16	100	400
40	14	9	81	126	1134
42	10	11	121	110	1210
45	6	14	196	84	1176
	N=107			$\sum fd = 167$	$\sum fd^2 = 6037$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{6037}{107} - \left(\frac{167}{107}\right)^2}$$

$$= \sqrt{56.42 - 2.44}$$

$$= \sqrt{53.98} = 7.35$$

(இ) படி-விலக்க முறை:

மாறியின் மதிப்புகள் சம இடைவெளியில் அமையும் இருந்தால், இந்த முறையை பயன்படுத்தலாம்.

படிகள்:

1. தொடரின் மைய மதிப்பை ஊக சராசரியாக ஊகம் செய் A.
2. $d = \frac{x - A}{C}$, ஐ கண்டுபிடி, இங்கு C என்பது மதிப்புகளின் இடையே உள்ள இடைவெளி.
3. இந்த விலக்கங்கள் d' ஐ உரிய அலைவெண்களால் பெருக்கி $\sum fd$ அடைக.
4. விலக்கங்களின் வர்க்கங்கள் d^2 ஐ காண்க.
5. இந்த விலக்க வர்க்கங்கள் (d^2) ஐ உரிய அலைவெண்களால் பெருக்கி $\sum fd^2$ பெறுக.
6. இந்த மதிப்புகளை கீழ்கண்ட சூத்திரத்தில் பிரதியிட்டு, திட்ட விலக்கத்தை பெறுக.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2} \times C$$

எடுத்துக்காட்டு 12:

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள் :	10	20	30	40	50	60
மாணவர்கள் எண்ணிக்கை:	8	12	20	10	7	3

தீர்வு:

மதிப்பெண்கள் x	f	$d = \frac{x - 30}{10}$	fd	fd^2
10	8	-2	-16	32
20	12	-1	-12	12
30	20	0	0	0
40	10	1	10	10
50	7	2	14	28
60	3	3	9	27
	N=60		$\sum fd = 5$	$\sum fd^2 = 109$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2} \times C = \sqrt{\frac{109}{60} - \left(\frac{5}{60}\right)^2} \times 10$$

$= \sqrt{1.817 - 0.0069} \times 10$
$= \sqrt{1.8101} \times 10$
$= 1.345 \times 10$
$= 13.45$

7.6.4 திட்ட விலக்கம் கண்டுபிடித்தல் - தொடர் தொகுதி

தொடர் தொகுதியில் திட்ட விலக்கம் கண்டுபிடித்தல் என்பது, தொடர்ச்சியற்ற தொகுதியில் காணும் முறையை ஒத்ததாகும். ஆனால் தொடர் தொகுதியில், பிரிவுகளின் மையப் புள்ளிகளைக் காண வேண்டும். படி-விலக்க முறை பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

அதற்கான சூத்திரம்:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2} \times C$$

$$d = \frac{m-A}{C}$$, C - பிரிவு இடைவெளி

படிகள்:

1. ஒவ்வொரு பிரிவின் மைய புள்ளியையும் காண்க.
2. நடு மதிப்பை ஊக சராசரியாக ஊகம் செய்து அதை A என்று குறிப்பிடுக.
3. $d = \frac{m-A}{C}$ ஐ காண்க.
4. விலக்கங்கள் d ஐ, உரிய அலைவெண்களால் பெருக்கி, $\sum fd$ ஐ அடைக.
5. விலக்கங்களின் வர்க்கங்களைக் காண்க d^2.
6. விலக்கங்களின் வர்க்கங்களை (d^2), உரிய அலைவெண்களால் பெருக்கி, $\sum fd^2$ ஐ அடைக.
7. இந்த மதிப்புகளை, கீழ்கண்ட சூத்திரத்தில் பிரதயிட்டு, திட்டவிலக்கத்தை அடைக.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2} \times C$$

எடுத்துக்காட்டு 13:

ஒரு நகரில் ஒரு ஆண்டின் தினசரி தப்பவெட்பம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தப்பவெட்பம் ^{0}c	நாட்களின் எண்ணிக்கை
-40 to –30	10
-30 to –20	18
-20 to –10	30
-10 to 0	42
0 to 10	65
10 to 20	180
20 to 30	20
	365

திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

தப்பவெட்பம்	மைய புள்ளி (m)	நாட்களின் எண்ணிக்கை f	$d = \frac{m-(-5^0)}{10^0}$	fd	fd^2
-40 to -30	-35	10	-6	-30	90
-30 to -20	-25	18	-4	-36	72
-20 to -10	-15	30	-2	-30	30
-10 to - 0	-5	42	0	0	0
0 to 10	5	65	2	65	65
10 to 20	15	180	4	360	720
20 to 30	25	20	6	60	180
		N=365		$\sum fd$ = 389	$\sum fd^2$ =1157

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2} \times C$$
$$= \sqrt{\frac{1157}{365} - \left(\frac{389}{365}\right)^2} \times 10$$
$$= \sqrt{3.1699 - 1.1358} \times 10$$
$$= \sqrt{2.0341} \times 10$$
$$= 1.4262 \times 10 = 14.26°c$$

7.6.5 இணைந்த திட்ட விலக்கம்:

N_1 உறுப்புக்களைக்கொண்ட தொடரின் சராசரி $\overline{X_1}$ மற்றும் திட்ட விலக்கம் σ_1, N_2 உறுப்புக்களைக் கொண்ட தொடரின் சராசரி $\overline{X_2}$ மற்றும் திட்ட விலக்கம் σ_2 என்றால், நாம் இணைந்த கூட்டுச்சராசரி மற்றும் இணைந்த திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கீழ்க்கண்ட சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்திகாணலாம்.

$$\overline{X}_{12} = \frac{N1\,\overline{X}_1 + N_2\overline{X}_2}{N_1 + N_2}$$

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{N_1\,\sigma_1^2 + N_2\,\sigma_2^2 + N_1 d_1^2 + N_2 d_2^2}{N_1 + N_2}}$$

இங்கு $d_1 = \overline{X}_1 - \overline{X}_{12}$

$d_2 = \overline{X}_2 - \overline{X}_{12}$

எடுத்துக்காட்டு 14:

இரண்டு கிராமங்களின் வருமான விவரங்கள்கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

	கிராமம்	
	A	B
மக்களின் எண்ணிக்கை	600	500
சராசரிவருமானம்	175	186
வருமானத்தின் திட்ட விலக்கம்	10	9

இணைந்த கூட்டு சராசரிமற்றும் இணைந்த திட்ட விலக்கத்தை காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டவை $N_1 = 600, X_1 = 175, \sigma_1 = 10$

$N_2 = 500, X_2 = 186, \sigma_2 = 9$

இணைந்த கூட்டு சராசரி

$$= \frac{600\times175 + 500\times186}{600+500}$$

$$= \frac{105000+93000}{1100} = \frac{198000}{1100}$$

$$= 180$$

இணைந்த திட்ட விலக்கம்:

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{N_1\,\sigma_1^2 + N_2\,\sigma_2^2 + N_1 d_1^2 + N_2 d_2^2}{N_1 + N_2}}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \overline{X}_1 - \overline{X}_{12} \\ &= 175 - 180 \\ &= -5 \\ d_2 &= \overline{X}_2 - \overline{X}_{12} \\ &= 186 - 180 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{600\times100 + 500\times81 + 600\times25 + 500\times36}{600+500}}$$

$$= \sqrt{\frac{60000+40500+15000+18000}{1100}}$$

$$= \sqrt{\frac{133500}{1100}}$$

$$= \sqrt{121.364}$$

$$= 11.02.$$

7.6.6 திட்ட விலக்கத்தின் சிறப்பியல்புகள்மற்றும் குறைபாடுகள்:

சிறப்பியல்புகள்:

1. இது தீர்மானமாக வரையறுக்கப்பட்டது, மேலும் இதன் மதிப்பு உறுதியானது, மேலும் இது எல்லா மதிப்புகளையும் சார்ந்தது. இங்கு விலக்கங்களின் உண்மையான குறிகள் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன.
2. இது கூட்டுச் சராசரியை சார்ந்தது. அதனால் கூட்டுச் சராசரியின் எல்லா சிறப்பியல்புகளும் இதற்கும் உண்டு.
3. சிதறல் அளவைகளில் இது மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததும், பெரும்பாலும் பயன்படுத்துவதும் ஆகும்.
4. மேலும் கணக்கியல் விரிவாக்கத்திற்கு உகந்தது.
5. மாதிரிக்கூறு ஏற்றத் தாழ்வுகளால், குறைந்த அளவு பாதிக்கப்படுவதால், இது நிலைத்த தன்மை யுடையது.
6. ஒட்டுறவுக் கெழுவை அளவிடுவதற்கும் மற்றும் மாதிரி முறைக்கும் இது அடித்தளமாகும்.

குறைபாடுகள்:

1. இது புரிந்து கொள்வதற்கு எளிதானதல்ல.மேலும் இது கணக்கிடுவதற்கு கடினமானது.
2. இது மிகை மதிப்புகளுக்கு அதிக நிறையைத் தருகின்றது, ஏனென்றால் மதிப்புகள் வர்க்கமாக்கப்படுகின்றன.
3. இது தனித்த சிதறல் அளவையாதலால், ஒப்பிடுதலுக்கு இது பயன்படாது.

7.6.7 மாறுபாட்டுக் கெழு:

திட்டவிலக்கம் ஒரு தனித்த சிதறல் அளவை. இது, சேகரிக்கப்பட்ட விவர மதிப்புகளின் அலகுகளாலேயே அழைக்கப்படுகிறது. மாணவர்களின் எடைகளின் திட்ட விலக்கத்துடன் மாணவர்களின் உயரங்களின் திட்ட விலக்கத்தை ஒப்பிட முடியாது, ஏனென்றால் இரண்டுமே வெவ்வேறு அலகுகளால் குறிப்பிடப்படுகின்றன. அதாவது உயரங்கள் செ.மீட்டரிலும், எடைகள் கிலோ கிராமிலும் குறிக்கப்படுகின்றன. ஒப்பிடும் நோக்கத்திற்காக, திட்ட விலக்கத்தை ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவையாக மாற்ற வேண்டும். இந்த ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவை மாறுபாட்டுக் கெழு என அறியப்படுகிறது.

திட்ட விலக்கத்தை, கூட்டுச் சராசரியால் வகுத்து, 100 -ஆல் பெருக்கிமாறுபாட்டுக் கெழு பெறப்படுகிறது.

$$\text{குறியீட்டில், மாறுபாட்டுக் கெழு } (C.V) = \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100$$

இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட தொடர்களின் மாறுபாடுகளை ஒப்பிட, மாறுபாட்டுக்கெழுவைப் பயன்படுத்தலாம். விவரங்களின் தொடர்கள் அல்லது குழுக்கள் இவற்றில் எதன் மாறுபாட்டுக் கெழு அதிகமாக உள்ளதோ, அந்த குழு, அதிக மாறுபாடு, குறைந்த நிலைத்தன்மை, குறைந்த சீரான்மை, குறைந்த மாறாத்தன்மை, குறைந்த ஒருபடித் தன்மை உடையது என்றும், மாறுபாட்டுக் கெழு குறைந்து உள்ள குழு, குறைந்த மாறுபாடு, அதிக நிலைத்தன்மை, அதிக சீரான்மை, அதிக மாறாத்தன்மை, அதிக ஒருபடித்தன்மை உடையது என்றும் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 15:

ஒரே தொழிற் பேட்டையில் அமைந்துள்ள A மற்றும் B நிறுவனங்களின் சராசரி வார ஊதியங்கள் (ரூபாயில்) மற்றும் திட்ட விலக்கங்கள் கீழே உள்ளன.

நிறுவனம்	சராசரி	திட்ட விலக்கம்	ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை
A	34.5	5	476
B	28.5	4.5	524

1. A அல்லது B. எந்த நிறுவனம், அதிக தொகையை வார ஊதியமாக கொடுக்கிறது?
2. A அல்லது B, எந்த நிறுவனம் தனி நபர் ஊதியத்தில் அதிக மாறுபாட்டை உடையது?

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டவை $N_1 = 476, \overline{X}_1 = 34.5, \sigma_1 = 5$

$N_2 = 524, \overline{X}_2 = 28.5, \sigma_2 = 4.5$

1. நிறுவனம் A ஆல் வழங்கப்படும் மொத்த ஊதியத் தொகை

$= 34.5 \times 476$

$=$ ரூ.16.422

நிறுவனம் B ஆல் வழங்கப்படும் மொத்த ஊதியத் தொகை

$= 28.5 \times 524$

$=$ ரூ.14,934.

ஆகவே நிறுவனம் A அதிக தொகையை, வார ஊதியமாக வழங்குகிறது.

2. நிறுவனம் A மற்றும் B இன் வார ஊதியப் பரவலுக்கு மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க.

$$\text{மாறுபாட்டுக் கெழு } (A) = \frac{\sigma_1}{\overline{X}_1} \times 100$$

$$= \frac{5}{34.5} \times 100 = 14.49$$

$$\text{மாறுபாட்டுக் கெழு } (B) = \frac{\sigma_2}{\overline{X}_2} \times 100$$

$$= \frac{4.5}{28.5} \times 100 = 15.79$$

நிறுவனம் B தனிநபர் ஊதியத்தில் அதிக அளவு மாறுபாடு உடையது. ஏனென்றால் B நிறுவனத்தில் மாறுபாட்டுக் கெழு, A நிறுவனத்தின் மாறுபாட்டுக் கெழுவை விட அதிகமாக உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 16:

இரு நகரங்களில், ஐந்து ஆண்டுகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட பண்டத்தின் விலைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

விலை நகரம் A	விலை நகரம் B
20	10
22	20
19	18
23	12
16	15

எந்த நகரத்தின் விலைகளில் அதிக நிலைத் தன்மை காணப்படுகிறது?

தீர்வு:

உண்மையான சராசரி முறை

நகரம் A			நகரம் B		
விலைகள் (X)	$\overline{X}=20$ யிலிருந்து விலக்கங்கள் dx	dx^2	விலைகள் (Y)	$\overline{Y}=15$ யிலிருந்து விலக்கங்கள் dy	dy^2
20	0	0	10	-5	25
22	2	4	20	5	25
19	-1	1	18	3	9
23	3	9	12	-3	9
16	-4	16	15	0	0
$\sum x=100$	$\sum dx=0$	$\sum dx^2=30$	$\sum y=75$	$\sum dy=0$	$\sum dy^2=68$

நகரம் A:

$$\overline{X}=\frac{\Sigma x}{n}=\frac{100}{5}=20$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\Sigma(x-\overline{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum dx^2}{n}}=\sqrt{\frac{30}{5}}=\sqrt{6}=2.45$$

மாறுபாட்டுக்கெழு (x) $=\frac{\sigma_x}{\overline{x}}\times 100$

$$=\frac{2.45}{20}\times 100=12.25\ \%$$

நகரம் B:

$$\overline{Y}=\frac{\Sigma y}{n}=\frac{75}{5}=15$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma(y-\overline{y})^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum dy^2}{n}}=\sqrt{\frac{68}{5}}=\sqrt{13.6}=3.69$$

மாறுபாட்டுக்கெழு (y) $=\frac{\sigma_y}{\overline{y}}\text{ x }100=\frac{3.69}{15}\times 100=24.6\ \%$

நகரம் A இன் மாறுபாட்டுக் கெழு குறைவாக உள்ளதால், நகரம் A, நகரம் B யை விட விலைகளில் நிலைத்த தன்மை காணப்படுகிறது.

7.7 விலக்கப்பெருக்குத் தொகை (Moments):

7.7.1 வரையறை:

ஒரு பரவலின் கூட்டு சராசியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் வெவ்வேறு அடுக்குகளின் கூட்டுச் சராசரியை விலக்கப் பெருக்குத் தொகை என வரையறுக்கப்படுகிறது.இந்த விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகள் மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன. முதல் நான்கு மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் கீழே வரையறுக்கப்படுகின்றன.

	தனித் தொகுதி	தொடர்ச்சியற்ற தொகுதி
கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட முதல் விலக்கப்பெருக்குத் தொகை μ_1	$\frac{\Sigma(x-\overline{x})}{n}=0$	$\frac{\sum f(x-\overline{x})}{N}=0$
இரண்டாம் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை μ_2	$\frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n}=\sigma^2$	$\frac{\sum f(x-\overline{x})^2}{N}$
மூன்றாம் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை μ_3	$\frac{\sum(x-\overline{x})^3}{n}$	$\frac{\sum f(x-\overline{x})^3}{N}$
நான்காம் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை μ_4	$\frac{\sum(x-\overline{x})^4}{n}$	$\frac{\sum f(x-\overline{x})^4}{N}$

μ ஒரு கிரேக்க எழுத்து, அதை மியூ என்று உச்சரிக்க வேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரி பின்ன மதிப்பாக இருந்தால், விலக்கப் பெருக்குத் தொகை காணுதல் என்பது கடின வேலையாகும். இந்த நேரங்களில், ஒரு ஆதியிலிருந்து விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் கண்டு பிடித்து பின் அவற்றை மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளாக மாற்ற வேண்டும். இந்த விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள், ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் எனப்படும். ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட முதல் நான்கு விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகள்- தனித் தொகுதி

$$\mu_1 = \frac{\sum(X-A)}{N} = \frac{\sum d}{N} \qquad \mu_2 = \frac{\sum(X-A)^2}{N} = \frac{\sum d^2}{N}$$

$$\mu_3 = \frac{\sum(X-A)^3}{N} = \frac{\sum d^3}{N} \qquad \mu_4 = \frac{\sum(X-A)^4}{N} = \frac{\sum d^4}{N}$$

இங்கு A – ஏதாவது ஆதி, d=X-A.

ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட முதல் நான்கு விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகள் – தொடர்ச்சியற்ற தொகுதி (படி – விலக்க முறை)

$$\mu'_1 = \frac{\sum fd'}{N} \times C \qquad \mu'_2 = \frac{\sum fd'^2}{N} \times C^2$$

$$\mu'_3 = \frac{\sum fd'^3}{N} \times C^3 \qquad \mu'_4 = \frac{\sum fd'^4}{N} \times C^4$$

இங்கு $d = \frac{X-A}{C}$, A – ஆதி, C – பிரிவு இடைவெளி தூரம்

ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் – தொடர் தொகுதி

$$\mu'_1 = \frac{\sum fd'}{N} \times C \qquad \mu'_2 = \frac{\sum fd'^2}{N} \times C^2$$

$$\mu'_3 = \frac{\sum fd'^3}{N} \times C^3 \qquad \mu'_4 = \frac{\sum fd'^4}{N} \times C^4$$

இங்கு $d = \frac{m-A}{C}$, A – ஆதி, C – பிரிவு இடைவெளித் தூரம்,

m – பிரிவின் மையப் புள்ளி

7.8 ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை மற்றும் மைய விலக்கப்பெருக்குத் தொகை இவற்றினிடையே உள்ள உறவு.

$\mu_1 = \mu_1 - \mu_1 = 0$ $\qquad$ $\mu_2 = \mu_2 - \mu_1^2$

$\mu_3 = \mu_3 - 3\mu_1 \mu_2 + 2(\mu_1)^3$

$\mu_4 = \mu_4 - 4\mu_3 \mu_1 + 6 \mu_2 \mu_1^2 - 3 \mu_1^4$

எடுத்துக்காட்டு 17:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து, முதலில் ஏதாவது ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கண்டுபிடித்து பிறகு மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை கண்டுபிடி.

X :	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F :	5	10	15	20	25	20	15	10	5

தீர்வு:

X	f	fx	$d=x-\bar{x}$ (x-4)	fd	fd^2	fd^3	fd^4
0	5	0	-4	-20	80	-320	1280
1	10	10	-3	-30	90	-270	810
2	15	30	-2	-30	60	-120	240
3	20	60	-1	-20	20	-20	20
4	25	100	0	0	0	0	0
5	20	100	1	20	20	20	20
6	15	90	2	30	60	120	240
7	10	70	3	30	90	270	810
8	5	40	4	20	80	320	1280
	N =125	$\sum fx$ =500	$\sum d$ =0	$\sum fd$ =0	$\sum fd^2$ =500	$\sum fd^3$ =0	$\sum fd^4$ =4700

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{500}{125} = 4$$

$$\mu_1 = \frac{\sum fd}{N} = \frac{0}{125} = 0 \qquad \mu_2 = \frac{\sum fd^2}{N} = \frac{500}{125} = 4$$

$$\mu_3 = \frac{\sum fd^3}{N} = \frac{0}{125} = 0 \qquad \mu_4 = \frac{\sum fd^4}{N} = \frac{4700}{125} = 37.6$$

எடுத்துக்காட்டு 18:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து, முதலில் ஏதாவது ஆதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கண்டுபிடித்து பிறகு மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கண்டுபிடி.

X :	30-33	33-36	36-39	39-42	42-45	45-48
f :	2	4	26	47	15	6

தீர்வு:

X	மைய மதிப்புகள் (m)	f	$d = \dfrac{(m-37.5)}{3}$	fd	fd ²	fd ³	fd ⁴
30-33	31.5	2	-2	-4	8	-16	32
33-36	34.5	4	-1	-4	4	- 4	4
36-39	37.5	26	0	0	0	0	0
39-42	40.5	47	1	47	47	47	47
42-45	43.5	15	2	30	60	120	240
45-48	46.5	6	3	18	54	162	486
		N= 100		$\sum fd'$ =87	$\sum fd'^2$ =173	$\sum fd'^3$ =309	$\sum fd'^4$ =809

$$\mu_1 = \frac{\sum fd'}{N} \times c = \frac{87}{100} \times c = \frac{261}{100} = 2.61$$

$$\mu_2 = \frac{\sum fd'^2}{N} \times c^2 = \frac{173}{100} \times 9 = \frac{1557}{100} = 15.57$$

$$\mu_3 = \frac{\sum fd'^3}{N} \times c^3 = \frac{309}{100} \times 27 = \frac{8343}{100} = 83.43$$

$$\mu_4 = \frac{\sum fd'^4}{N} \times c^4 = \frac{809}{100} \times 81 = \frac{65529}{100} = 655.29$$

மைய விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகள்:

$\mu_1 = 0$

$\mu_2 = \mu_2 - \mu_1^2$

$= 15.57 - (2.61)^2$

$= 15.57 - 6.81 = 8.76$

$\mu_3 = \mu\ 3 - 3\mu_2\,\mu_1 + 2\,\mu_1^3$

$= 83.43 - 3(2.61)\,(15.57) + 2\,(2.61)^3$

$= 83.43 - 121.9 + 35.56 = -2.91$

$\mu_4 = \mu_4 - 4\mu_3\,\mu_1 + 6\mu_2\,\mu_1^2 - 3\,\mu_1^4$

$= 665.29 - 4\,(83.43)\,(2.61) + 6\,(15.57)\,(2.61)^2 - 3(2.61)^4$

$= 665.29 - 871.01 + 636.39 - 139.214$

$= 291.454$

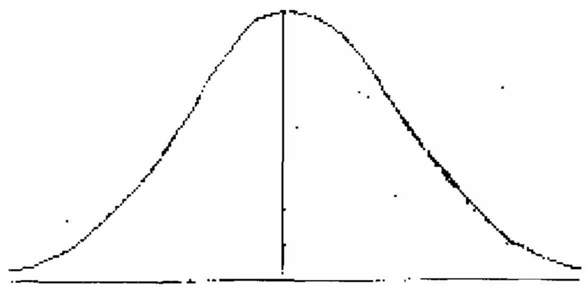
7.9 கோட்டம்:

7.9.1 பொருள்:

கோட்டம் என்றால் சமச்சீரின்மை என்று பொருள்படும். கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் உதவியுடன் வரையப்படும் வளைவரையின் வடிவத்தைப் பற்றி தெரிந்துக் கொள்ள கோட்டம் பற்றி நாம் அறிந்து கொள்ள வேண்டும். கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பரவலில், கூட்டுச் சராசரி = இடைநிலை = முகடு, என்ற நிலையில் இருக்குமானால் அந்த பரவல் சமச்சீர் பரவலாகும்.

ஒரு பரவலில் கூட்டுச் சராசரி ≠ இடைநிலை ≠ முகடு, என்றால் அது சமச்சீர் அற்ற பரவல் எனப்படும். மேலும் அது கோட்டமுடைய பரவல் என்று அழைக்கப்படும். அத்தகைய பரவல், நேரிடை கோட்டப் பரவல் அல்லது எதிரிடை கோட்டப் பரவலாக இருக்கும்.

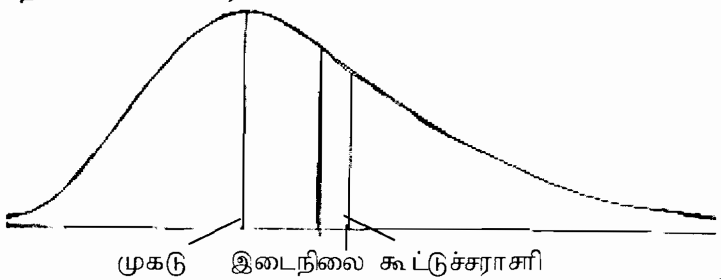
(அ). சமச்சீர் பரவல்:



கூட்டுச்சராசரி = இடைநிலை = முகடு

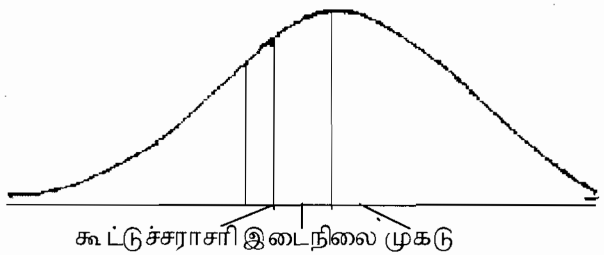
மேற்கண்ட படத்தின் மூலம், சமச்சீர் பரவலில் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் ஒரே புள்ளியில் பொருந்தியிருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது. வளைவரையின் நடுப் புள்ளியின் இரு புறமும் மதிப்புகள் சமமாகப் பரவியிருக்கும்.

(ஆ) நேரிடை கோட்டப் பரவல்:



மேற்கண்ட படத்தின் மூலம் கோட்டப் பரவலில், கூட்டுச்சராசரி உச்ச மதிப்பையும் மற்றும் முகடு குறைந்த மதிப்பை பெற்றும், இவை இரண்டிற்கிடையே இடைநிலை அமைந்தும் இருக்கும், என்பது தெளிவாகிறது. நேரிடைப் கோட்டப் பரவலில் மதிப்புகள் அதிக அளவில் இடது புறத்தை விட வலது புறத்தில் பரவி இருக்கும்.

(இ) எதிரிடை கோட்டப் பரவல்:



மேற்கண்ட படத்தின் மூலம், எதிரிடை கோட்டப் பரவலில், முகடு உச்ச மதிப்பையும், கூட்டு சராசரி குறைந்த மதிப்பை பெற்றும், இவை இரண்டிற்கிடையே இடைநிலை அமைந்தும் இருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது. எதிரிடை கோட்டப் பரவலில், மதிப்புகள் அதிக அளவில் வலது புறத்தை விட, இடது புறத்தில் பரவி இருக்கும்.

7.10 கோட்ட அளவைகள்:

முக்கியமான கோட்ட அளவைகளாவன:

i) கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக்கெழு.

ii) பௌலியின் கோட்டக் கெழு.

iii) விலக்கப்பெருக்குத் தொகையைச் சார்ந்த கோட்ட அளவை.

7.10.1 கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக் கெழு:

கார்ல்-பியர்சனின் கூற்றுப்படி, கோட்டஅளவை = கூட்டுச்சராசரி - முகடு. இந்த அளவை, இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பரவல்களைச்

சிறந்த முறையில் ஒப்பிட ஏற்றதல்ல, ஏனென்றால் வெவ்வேறு தொடர்களுக்கு வெவ்வேறு அலகுகள் இருக்கும். இந்த இடர்பாட்டை தவிர்ப்பதற்காக ஒப்பீட்டு கோட்ட அளவையான கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$\text{கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக்கெழு} = \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி - முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்.}}$$

முகடு தீர்மானமாக வரையறுக்கப் படாத இடத்தில், இந்த கெழு கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திகண்டுபிடிக்கப்படுகிறது.

$$\text{கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக்கெழு} = \frac{3(\text{கூட்டுச் சராசரி - இடைநிலை})}{\text{திட்டவிலக்கம்.}}$$

எடுத்துக்காட்டு 19:

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவை கணக்கிடுக.

25, 15, 23, 40, 27, 25, 23, 25, 20

தீர்வு:

சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் காணல்.

சுருக்க முறை

அளவு	A=25 யிலிருந்து விலக்கங்கள் D	d^2
25	0	0
15	-10	100
23	-2	4
40	15	225
27	2	4
25	0	0
23	-2	4
25	0	0
20	-5	25
N = 9	$\sum d = -2$	$\sum d^2 = 362$

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} = A + \frac{\sum d}{n}$$

$$= 25 + \frac{-2}{9} = 25 - 0.22 = 24.78$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{362}{9} - \left(\frac{-2}{9}\right)^2} = \sqrt{40.22 - 0.05}$$

$$= \sqrt{40.17} = 6.3$$

முகடு = 25, ஏனென்றால் இந்த அளவு 3 முறை திரும்ப திரும்ப வந்துள்ளது.

$$\text{கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக் கெழு} = \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி - முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்.}}$$

$$= \frac{24.78 - 25}{6.3} = \frac{-0.22}{6.3} = -0.03$$

எடுத்துக்காட்டு 20:

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு கோட்டக் கெழுவை காண்க.

அளவு :	3	4	5	6	7	8	9	10
அலைவெண்:	7	10	14	35	102	136	43	8

தீர்வு:

அளவு	அலைவெண் (f)	A=6 யிலிருந்து விலக்கங்கள் (d)	d^2	fd	fd^2
3	7	-3	9	-21	63
4	10	-2	4	-20	40
5	14	-1	1	-14	14
6	35	0	0	0	0
7	102	1	1	102	102
8	136	2	4	272	544
9	43	3	9	129	387
10	8	4	16	32	128
	N = 355			$\sum fd=480$	$\sum fd^2 = 1278$

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} = A + \frac{\sum fd}{N} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$$

$$= 6 + \frac{480}{355} \qquad = \sqrt{\frac{1278}{355} - \left(\frac{480}{355}\right)^2}$$

$$= 6 + 1.35 \qquad = \sqrt{3.6 - 1.82}$$

$$= 7.35 \qquad = \sqrt{1.78} = 1.33$$

முகடு = 8

$$\text{கோட்டக்கெழு} = \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி - முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்.}}$$

$$= \frac{7.35 - 8}{1.33} = \frac{0.65}{1.33} = -0.5$$

எடுத்துக்காட்டு 21:

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பரவலுக்கு கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவை காண்க.

X :	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
F :	2	5	7	13	21	16	8	3

தீர்வு:

20-25 என்ற பிரிவு உச்ச அலைவெண்ணை பெற்றிருப்பதால், முகடு இந்த பிரிவில் அமையும்.

$$\text{முகடு} = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times C$$

$l = 20$, $f_1 = 21$, $f_0 = 13$, $f_2 = 16$, $C = 5$

$$\text{முகடு} = 20 + \frac{21 - 13}{2 \times 21 - 13 - 16} \times 5$$

$$= 20 + \frac{8 \times 5}{42 - 29}$$

$$= 20 + \frac{40}{13}$$

$$= 20 + 3.08 = 23.08$$

சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் காணல்:

X	மைய புள்ளிகள் m	அலை வெண் f	விலக்கங்கள் $d = \frac{m - 22.5}{5}$	fd	d^2	fd^2
0-5	2.5	2	-4	-8	16	32
5-10	7.5	5	-3	-15	9	45
10-15	12.5	7	-2	-14	4	28
15-20	17.5	13	-1	-13	1	13
20-25	22.5	21	0	0	0	0
25-30	27.5	16	1	16	1	16
30-35	32.5	8	2	16	4	32
35-40	37.5	3	3	9	9	27
		N =75		$\sum fd$ =-9		$\sum fd^2$ =193

கூட்டுச்சராசரி $= A + \frac{\sum fd}{N} \times c$

$$= 22.5 + \left[\frac{-9}{75}\right] \times 5$$

$$= 22.5 - \frac{45}{75}$$

$$= 22.5 - 0.6$$

$$= 21.9$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{193}{75} - \left(\frac{-9}{75}\right)^2} \times 5$$

$$= \sqrt{2.57 - 0.0144} \times 5$$

$$= \sqrt{2.5556} \times 5$$

$$= 1.5986 \times 5$$

$$= 7.99$$

கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக் கெழு $= \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி - முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்.}}$

$$= \frac{21.9 - 23.08}{7.99}$$

$$= \frac{-1.18}{7.99} = -0.1477$$

7.10.2 பௌலியின் கோட்டக் கெழு:

கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவை அளக்க, தொடரின் மொத்த மதிப்புகளும் தேவை. பேராசிரியர். பௌலி, கால்மானங்களைச் சார்ந்த ஒரு சூத்திரத்தைக் கூறுகிறார். சமச்சீர் பரவலில் கால்மானங்கள் இடைநிலையிலிருந்து சம தூரத்தில் அமைந்துள்ளன;

அதாவது, இடைநிலை $- Q_1 = Q_3 -$ இடைநிலை, ஆனால் கோட்டப்பரவலில், கால்மானங்கள் இடைநிலையிலிருந்து சமதூரத்தில் இருப்பதில்லை. எனவே பௌலி கூறும் சூத்திரம்;

பௌலியின் கோட்டக் கெழு $(sk) = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\ \text{இடைநிலை}}{Q_3 - Q_1}$

எடுத்துக்காட்டு 22:

கீழ்க்கண்ட தொடருக்கு பௌலியின் கோட்டக்கெழுவைக் காண்க.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரங்கள் ஏறு வரிசையில் உள்ளன

2, 4, 6, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22

$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= \left(\frac{11+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= 3$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= 6$

$Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= 3\left(\frac{11+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= 9$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= 18$

இடைநிலை $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= \left(\frac{11+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= 6$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= 12$

பௌலியின் கோட்டக்கெழு $= \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2\text{ இடைநிலை}}{Q_3 - Q_1}$

$= \dfrac{18+6-2\times 12}{18-6} = 0$

கோட்டக்கெழு $= 0$ என்பதால், கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் தொடர் சமச்சீர் தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 23:

கீழக்கண்ட தொடருக்கு பௌலியின் கோட்டக்கெழுவைக் காண்க.

அளவு :	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8
f :	10	18	22	25	40	15	10	8	7

தீர்வு:

அளவு	F	குவிவு அலைவெண்
4	10	10
4.5	18	28
5	22	50
5.5	25	75
6	40	115
6.5	15	130
7	10	140
7.5	8	148
8	7	155

$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= \left(\frac{155+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= 39$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= 5$

$Q_2 =$ இடைநிலை $= \left(\frac{N+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= \left(\frac{155+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= 78$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= 6$

$Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= 3\left(\frac{155+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= 117$ ஆவது உறுப்பின் அளவு $= 6.5$

பௌலியின் கோட்டக் கெழு $= \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2\text{ இடைநிலை}}{Q_3 - Q_1}$

$= \dfrac{6.5+5-2\times 6}{6.5-5}$

$= \dfrac{11.5-12}{1.5}$

$= \dfrac{0.5}{1.5} = -0.33$

எடுத்துக்காட்டு 24:

கீழ்க்கண்ட பரவலில், பௌலியின் கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

ஊதியம் (ரூ)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
நபர்களின் எண்ணிக்கை	1	3	11	21	43	32	9

தீர்வு:

ஊதியம் (ரூ)	f	குவிவு அலைவெண்
10-20	1	1
20-30	3	4
30-40	11	15
40-50	21	36
50-60	43	79
60-70	32	111
70-80	9	120
	N=120	

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f_1} \times c_1$$

$$\frac{N}{4} = \frac{120}{4} = 30$$

Q_1 பிரிவு = 40-50

$l_1 = 40,\ m_1 = 15,\ f_1 = 21,\ c_1 = 10$

$$\therefore Q_1 = 40 + \frac{30-15}{21} \times 10$$

$$= 40 + \frac{150}{21}$$

$$= 40 + 7.14 = 47.14$$

$$Q_2 = \text{இடைநிலை} = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$$

$$\frac{N}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

இடைநிலை பிரிவு = 50 – 60

$l = 50,\ m = 36,\ f = 43,\ c = 10$

$$\text{இடைநிலை} = 50 + \frac{60-36}{43} \times 10$$

$$= 50 + \frac{240}{43}$$

$$= 50 + 5.58$$

$$= 55.58$$

$$Q_3 = l_3 + \frac{3\frac{N}{4} - m_3}{f_3} \times c_3$$

$$3\frac{N}{4} = 3 \times \frac{120}{4} = 90$$

Q_3 பிரிவு = 60 – 70

$l_3 = 60,\ m_3 = 79,\ f_3 = 32,\ c_3 = 10$

$$\therefore Q_3 = 60 + \frac{90-79}{32} \times 10$$

$$= 60 + \frac{110}{32}$$

$$= 60 + 3.44$$

$$= 63.44$$

$$\text{பௌலியின் கோட்டக் கெழு} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\ \text{இடைநிலை}}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{63.44 + 47.14 - 2 \times 55.58}{63.44 - 47.14}$$

$$= \frac{110.58 - 111.16}{16.30}$$

$$= \frac{-0.58}{16.30} = -0.0356$$

7.10.3 விலக்கப்பெருக்குத் தொகையைச் சார்ந்த கோட்ட அளவை:

விலக்கப்பெருக்குத் தொகையைச் சார்ந்த கோட்ட அளவையை β_1 என்கிற குறியீட்டால் குறிக்கப்படும். அதன் சூத்திரம்,

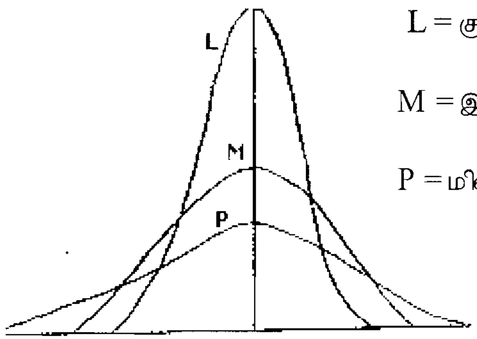
$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$; μ_3 எதிரிடை எனில், β_1 எதிரிடை ஆகும்

7.11 தட்டையளவு:

ஒரு வளை கோட்டின் உச்சியைப் பற்றி அறிந்துகொள்ள தட்டை அளவு பயன்படுகிறது. மையப் போக்கு அளவை, சிதறல் அளவை மற்றும் கோட்டம் ஆகியவை அலைவெண் பரவலின் பண்புகளை விவரிக்கின்றன. ஆனால் இந்த அளவைகள் பரவலின் பண்புகளைப் பற்றி ஒரு தெளிவான கண்ணோட்டத்தை அளிப்பதில்லை.

வளைவரையின் வடிவத்தை அளப்பதற்கு இரண்டு அளவைகள் உள்ளன. கோட்டம், தொடரின் சமச்சீரின்மையை குறிப்பிடுகிறது மற்றும் தட்டையளவு வளைவரையின் உச்சியைப்பற்றி அறிந்து கொள்ள உதவுகிறது. எல்லா அலைவெண் வளைவரைகளும் வெவ்வேறு உச்சி அளவை அல்லது தட்டை அளவை வெளிப்படுத்துகின்றன. இந்த அலைவெண் வளைவரையின் பண்பே தட்டை அளவு எனப்படுகிறது.

தட்டை அளவையானது அலைவெண் வளைவரையின் உச்சியின் வடிவத்தை குறிப்பிடுகிறது. ஒரு அலைவெண் வளைவரை, இயல்நிலை வளைவரையை விட எந்த அளவு அதிக தட்டையையோ அல்லது குறைந்த தட்டையையோ பெற்றுள்ளது என்பதை தட்டை அளவை மூலம் அறியலாம். சமச்சீரான, மணிவடிவ இயல் நிலை வளைவரையானது 'இயல்நிலை' என பெயரிடப்படுகிறது. ஒரு வளைவரை, இயல்நிலை வளைவரையோடு ஒப்பிடும்போது அதிகம் குறுகியும், கூரிய உச்சியை உடையதாகவும் இருந்தால் அது குறைத் தட்டை எனப்படுகிறது. ஒரு வளைவரை, இயல்நிலை வளைவரையோடு ஒப்பிடும்போது அதிக தட்டையாக இருந்தால் அது மிகைத்தட்டை எனப்படுகிறது.



L = குறைத் தட்டை

M = இயல் தட்டை

P = மிகைத் தட்டை

7.11.1 தட்டை அளவை:

ஒரு அலைவெண் பரவலின், விலக்கப் பெருக்குத் தொகையைச் சார்ந்த தட்டை அளவை β_2 எனக் குறிக்கப்பட்டு கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

$\beta_2 = 3$ எனில், அந்தப் பரவல் இயல் நிலைப் பரவல் என்றும் அதன் வளைவரை இயல்நிலை என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

$\beta_2 > 3$ எனில், அந்தப் பரவல் அதிக உச்சியை உடையது என்றும், அதன் வளைவரை குறைத் தட்டை என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

$\beta_2 < 3$ எனில், அந்தப் பரவல் அதிக தட்டையை உடையது என்றும், அதன் வளைவரை மிகைத் தட்டை என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 25:

கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு β_1 மற்றும் β_2 ஐக் கண்டுபிடி.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F	5	10	15	20	25	20	15	10	5

தீர்வு:

[**குறிப்பு:** முதல் நான்கு மைய விலக்கப் பெருக்கத் தொகைகளின் வாய்பாடுகள் எடுத்துக்காட்டு 17 இல் உள்ளன. அவற்றை பயன்படுத்தி β_1 மற்றும் β_2 வைக் காண்க]

$\mu_1 = 0$ $\qquad$ $\mu_2 = \frac{\sum fd^2}{N} = \frac{500}{125} = 4$

$\mu_3 = \frac{\sum fd^3}{N} = 0$ $\qquad$ $\mu_4 = \frac{\sum fd^4}{N} = \frac{4700}{125} = 37.6$

$$\therefore \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{0}{64} = 0$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{37.6}{4^2} = \frac{37.6}{16} = 2.35$$

β_2 இன் மதிப்பு 3ஐ விட குறைவு, எனவே இந்த வளைவரை மிகைத் தட்டையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 26:

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரங்களுக்கு β_1 மற்றும் β_2 ஆகியவற்றைக் கணக்கிடு.

X :	30-33	33-36	36-39	39-42	42-45	45-48
f :	2	4	26	47	15	6

தீர்வு:

[**குறிப்பு:** ஆதியை மற்றும் சராசரியைப் பொறுத்து முதல் நான்கு மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளின் வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்தி β_1 மற்றும் β_2 வைக் காண்க]

$\mu_1 = 0,\quad \mu_2 = 8.76\quad \mu_3 = -2.91,\quad \mu_4 = 291.454$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \qquad \beta_1 = \frac{(-2.91)^2}{(8.76)^3} = \frac{8.47}{672.24} = 0.0126$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \qquad \beta_2 = \frac{291.454}{(8.76)^2} = 3.70$$

$\beta_2 > 3$ என்பதால், இந்த வளைவரை குறைத்தட்டை ஆகும்.

பயிற்சி - 7

I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக:

1. கீழ்கண்ட சிதறல் அளவைகளில் எது அலகு பெறாத அளவையாகும்.
   (அ) திட்ட விலக்கம் (ஆ) சராசரி விலக்கம்
   (இ) மாறுபாட்டுக் கெழு (ஈ) வீச்சு
2. எதிலிருந்து பெறும் தனித்த விலக்கங்களின் கூடுதல் மீச்சிறுமமாகும்.
   (அ) முகடு (ஆ) இடைநிலை
   (இ) கூட்டுச் சராசரி (ஈ) மேற்கூறிய எதுவுமில்லை
3. ஒரு பரவலின் திட்ட விலக்கம் = 6, எல்லா மதிப்புகளையும் 2-ஆல் பெருக்கிபின் அடையும் திட்ட விலக்கமானது
   (அ) 12 (ஆ) 6 (இ) 18 (ஈ) $\sqrt{6}$

4. கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து பெறப்படும் வர்க்க விலக்கங்களின் சராசரியானது
   (அ) திட்ட விலக்கம் (ஆ) மாறுபாடு
   (இ) சராசரி விலக்கம் (ஈ) எதுவுமில்லை
5. ஒரு தொடரின் குறைந்த மதிப்பு 9, அதன் வீச்சு 57, தொடரின் மீப்பெரு மதிப்பானது
   (அ) 33 (ஆ) 66
   (இ) 48 (ஈ) 24
6. கால்மான விலக்கமானது
   (அ) இடைக்கால்மான வீச்சு
   (ஆ) இடைக்கால்மான வீச்சின் இருமடங்கு
   (இ) இடைக்கால்மான வீச்சில் பாதி
   (ஈ) மேற்கூறிய எதுவும் இல்லை
7. விளிம்பு மதிப்புகளால் மிகவும் பாதிக்கப்படும் அளவை எது?
   (அ) திட்ட விலக்கம் (ஆ) கால்மான விலக்கம்
   (இ) சராசரி விலக்கம் (ஈ) வீச்சு
8. அதிக நம்பகத் தன்மையுடன் அளக்கும் சிதறல் அளவை யாது?
   (அ) வீச்சு (ஆ) சராசரி விலக்கம்
   (இ) கால்மான விலக்கம் (ஈ) திட்ட விலக்கம்
9. எதிரிடை கோட்ட பரவலுக்கு சரியான சமனிலியாது?
   (அ) முகடு < இடைநிலை
   (ஆ) கூட்டுச்சராசரி < இடைநிலை
   (இ) கூட்டுச்சராசரி < முகடு
   (ஈ) மேற்கூறிய எதுவும் இல்லை
10. நேரிடை கோட்ட பரவலில், விளிம்பு மதிப்புகள் அமைந்திருப்பது.
   (அ) இடதுபுறம் (ஆ) வலதுபுறம்
   (இ) நடுவில் (ஈ) எந்த இடத்திலும்

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக:

11. ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவையானது __________ விடுபட்டது
12. திறந்த வெளி பரவல்களுக்கு உகந்த அளவை __________
13. ஒரு சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட தனித்த விலக்கங்களின் சராசரியானது __________ என்று அழைக்கப்படுகிறது
14. மாறுபாடு 36, எனில் திட்ட விலக்கம் __________
15. 5,5,5,5,5 ஆகிய ஐந்து மதிப்புகளின் திட்ட விலக்கம் __________

16. 10 மதிப்புகளின் திட்ட விலக்கம் 10, ஒவ்வொரு மதிப்புடனும் 5ஐக் கூட்ட கிடைக்கும் மதிப்புகளின் திட்ட விலக்கமானது __________

17. இரண்டாவது மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை எப்பொழுதும் __________

18. $\bar{x} = 50$, முகடு $= 48$, $\sigma = 20$, என்றால் கோட்டக் கெழுவானது __________

19. சமச்சீர் பரவலில் கோட்டக் கெழு __________

20. $\beta_2 = 3$ என்றால், அந்தப் பரவல் ________என்று அழைக்கப்படும்.

III. கீழ்கண்டவற்றிற்கு விடையளிக்க:

21. 'சிதறல்' என்பதின் மூலம் நீ என்ன புரிந்து கொண்டாய்? சிதறல் அளவை எந்த நோக்கத்திற்காக பயன்படுத்தப்படுகிறது?

22. பல்வேறு சிதறல் அளவைகளை அய்வு செய்க.

23. நல்ல சிதறல் அளவையின் பண்புகள் யாவை?

24. சராசரி விலக்கம் மற்றும் சராசரி விலக்கக் கெழு இவற்றை வரையறு.

25. தனித்த மட்டும் ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவைகளை வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

26. சராசரி விலக்கத்தின் சிறப்பியல்புகள் மற்றும் குறைபாடுகள் யாவை?

27. கால்மான விலக்கம் மற்றும் கால்மான விலக்கக்கெழு இவற்றை வரையறு.

28. கால்மான விலக்கத்தின் எல்லா சிறப்பியல்புகள் மற்றும் குறைபாடுகளை குறிப்பிடுக.

29. திட்ட விலக்கத்தை வரையறுத்து அதன் சிறப்பியல்புகள் மற்றும் குறைபாடுகளை குறிப்பிடுக.

30. மாறுபாட்டுக் கெழு என்றால் என்ன? அதன் நோக்கம் என்ன?

31. கோட்டம் என்பதன் மூலம் நீ என்ன புரிந்து கொண்டாய்? கோட்ட அளவையை அளக்கும் பல்வேறு முறைகள் யாவை?

32. தட்டை அளவு என்பதன் மூலம் நீ என்ன புரிந்து கொண்டாய்? தட்டையளவை அளக்கும் முறை யாது?

33. கோட்டம் மற்றும் தட்டையளவை வேறுபடுத்தி காட்டுக. மேலும் அலைவெண் பரவலை விளக்க அவற்றின் முக்கியத்துவம் யாது?

34. விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகளை வரையறு. மேலும் ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை மற்றும் மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை இவற்றை வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

35. முதல் நான்கு விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகளுக்கு, ஆதியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை மற்றும் மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை இவற்றின் இடையே உள்ள தொடர்பைக் குறிப்பிடுக.

36. கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு கால்மான விலக்கம் கணக்கிடுக.

உயரங்கள் (அங்குலத்தில்):	58	59	60	61	62	63	64	65	66
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை:	15	20	32	35	33	22	20	10	8

37. கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு கால்மான விலக்கம் கணக்கிடுக.

அளவு :	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32	32-36	36-40
அலைவெண்:	6	10	18	30	15	12	10	6	2

38. கீழ்க்கண்ட விவரங்களில், கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து சராசரி விலக்கம் கணக்கிடுக.

X:	2	4	6	8	10
F:	1	4	6	4	1

39. இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம் கணக்கிடுக.

வயது	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
மக்களின் எண்ணிக்கை	9	16	12	26	14	12	6	5

40. கீழ்க்கண்டவற்றிற்கு திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுக.

அளவு	6	7	8	9	10	11	12
அலைவெண்	3	6	9	13	8	5	4

41. கீழ்க்கண்ட தொடரில் திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுக.

பிரிவுகள்	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55
அலைவெண்	8	12	15	9	6

42. கீழ்க்கண்ட இரு கிரிக்கெட் வீரர்களில், ஓட்டங்களை குவிப்பதில் மிகவும் நிலைப்புத் தன்மை உடையவர் யார் என்பதைக் காண்க.

கிரிக்கெட் வீரர் A	5	7	16	27	39	53	56	61	80	101	105
கிரிக்கெட் வீரர் B	0	4	16	21	41	43	57	78	83	93	95

43. இரண்டு கிராமங்களின் வருமானத்தைப் பற்றிய விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

	கிராமம் A	கிராமம் B
நபர்களின் எண்ணிக்கை	600	500
சராசரி வருமானம் (ரூ)	175	186
வருமானத்தின் மாறுபாடு (ரூ)	100	81

எந்த கிராமத்தின் வருமானத்தில் மாறுபாடு அதிகமாக உள்ளது?

44. கீழ்க்கண்ட அட்டவணைக்கு கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவை கணக்கிடுக.

தினக்கூலி (ரூபாயில்)	150	200	250	300	350	400	450
மக்களின் எண்ணிக்கை	3	25	19	16	4	5	6

45. கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு பௌலியின் கோட்டக் கெழுவை கணக்கிடுக.

அளவு	5-7	8-10	11-13	14-16	17-19
அலைவெண்	14	24	38	20	4

46. கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு, விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை பயன்படுத்தி β_1 மற்றும் β_2 ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

தினக்கூலி	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	8	11	18	9	4

IV. செய்துபார்க்க :

47. வெவ்வேறு அளவுகள் கொண்ட இரு குழுக்களை உன் வகுப்பில் தேர்ந்தெடுத்து அவற்றின் புள்ளியியல் மதிப்பெண்களுக்கான சராசரி, திட்ட விலக்கம் மற்றும் மாறுபாட்டுக் கெழுவை கண்டுபிடித்து, எந்த குழு அதிக திறன் பெற்றது எனக் காண்க.

விடைகள்:

I.

1. (இ) 2. (இ) 3. (இ) 4. (ஆ)
5. (ஆ) 6. (இ) 7. (ஈ) 8. (ஈ)
9. (இ) 10.(ஆ)

II.

11. அலகுகள் 12. கால்மானவிலக்கம் 13.சராசரி 14.6
15. பூஜ்யம் 16. 15 17. மாறுபாடு 18. 0.1
19. பூஜ்யம் 20. மிகைத்தட்டை.

III.

36. கால்மான விலக்கம் = 1.5 37. கால்மான விலக்கம = 5.2085
38. சராசரி விலக்கம் = 1.5 39. சராசரி விலக்கம் = 7.35
40. திட்டவிலக்கம் = 1.67 41. திட்டவிலக்கம் = 12.3
42. திட்டவிலக்கம் A = 67.06
திட்டவிலக்கம் B = 68.8
43. மாறுபாட்டுக்கெழு A= 5.71% ; மாறுபாட்டுக்கெழு B = 4.84 %
கிராமம் A இன் வருமானத்தில் மாறுபாடு அதிகமாக உள்ளது.
44. கோட்டக்கெழு Sk = 0.88
45. கோட்டக்கெழு Sk = -0.13 46. β_1 = 0.006 β_2 = 2.305

8. ஒட்டுறவு

அறிமுகம் :

பாமர மனிதனால், ஒட்டுறவு என்ற சொல் அவன் அறியாமலேயே பயன்படுத்தப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக பெற்றோர்கள் தங்கள் குழந்தைகளிடம், கடினமாக உழைத்தால் தான் நல்ல மதிப்பெண் பெற முடியும் என்று கூறுமிடத்து, கடின உழைப்பையும் நல்ல மதிப்பெண்களையும் தொடர்புபடுத்துகின்றனர்.

உயரம், எடை, வயது, மதிப்பெண்கள், தினக்கூலி போன்ற ஒரு மாறிப் பண்புகளைப் பற்றி மட்டுமே ஆய்வு செய்வது, ஒரு மாறிப் பகுப்பாய்வு எனப்படும். இரு மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பினைப் பற்றிய புள்ளியியல் ஆய்வு இருமாறி பகுப்பாய்வு எனப்படும். சில சமயங்களில் மாறிகள் ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்புடையன.

உடல் நல அறிவியலில், இரத்த அழுத்தம் மற்றும் வயது, சத்துணவு மற்றும் எடைக் கூடுதல், மொத்த வருமானம் மற்றும் மருத்துவ செலவு ஆகியன ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்புடையன என அறியலாம். இவற்றிற்கிடையேயான தொடர்புகள் அவற்றின் பண்புகள், தாக்கம் ஆகியவை பற்றி ஒட்டுறவு மற்றும் உடன் தொடர்பு பகுப்பாய்வு மூலம் ஆராயலாம்.

ஒட்டுறவு என்பது இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பினைக் குறிக்கிறது. எடுத்துகாட்டாக தந்தை, மகளின் உயரம், மழையளவு மற்றும் விளைச்சல், ஊதியம் மற்றும் விலைக்குறியீடு, பங்கு மற்றும் கடன் பத்திரங்கள் ஆகியன ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்புடையன.

ஒட்டுறவு ஒரு புள்ளியியல் பகுப்பாய்வு இது இரு மாறிகள் எந்த அளவிற்கு ஒன்றை ஒன்று பாதிக்கின்றன என்பதை அளக்க கூடியது. இரு மாறிகளுக்கிடையேயான 'தொடர்பு' என்ற வார்த்தை இங்கு முக்கியமானது. இது இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள உறவினைக் குறிக்கின்றது. ஒட்டுறவு என்பது காரண விளைவுத் தொடர்பைக் குறிக்காது. விலை-அளிப்பு, வரவு - செலவு என்பன தொடர்புடையன.

வரையறைகள்:

ஒட்டுறவு பகுப்பாய்வு என்பது இருமாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பின் அளவை அளவிடும் முயற்சி ஆகும். - யா - குன்- சௌ (Ya – Kun – Chou)

'ஒட்டுறவு என்பது இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையேயான உடன் மாறுபாட்டளவையின் பகுப்பாய்வு ஆகும்.'

ஏ.எம்.டட்டில் (A.M.Tuttle)

இருமாறி கணங்கள், எவ்வாறு ஒன்றை ஒன்று சார்ந்துள்ளன என்பதை விளக்குகிறது. ஒரு மாறியானது சாராத மாறி எனவும்,

மற்றொன்று அதைச்சார்ந்த மாறி எளவும் அழைக்கப்படுகின்றன. சார்ந்த மாறியின் மதிப்பு, சாராத மாறியின் மூலம் அளவிடப் படுகிறது.

ஒட்டுறவின் பயன்கள்:

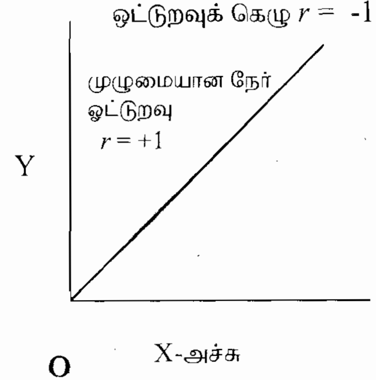
1. இது உடலறிவியல் மற்றும் சமூக அறிவியலில் பயன்படுத்தப் படுகின்றது.
2. பொறியியல் வல்லுநர்களுக்கு, விலை, அளவு போன்ற மாறிகளுக்கிடையிலான தொடர்பு அறிய உதவுகிறது. வியாபாரிகள், ஒட்டுறவைப் பயன்படுத்தி, செலவு, விற்பனை, விலை போன்றவற்றை மதிப்பிடுகின்றனர்.
3. தொடர்பின் அளவை அளவிடப் பயன்படுகிறது.
4. கூறு பிழையைக் கணக்கிட இயலும்.
5. 'உடன் தொடர்பு' என்ற சொல்லுக்கு அடிப்படையாக விளங்குகிறது.

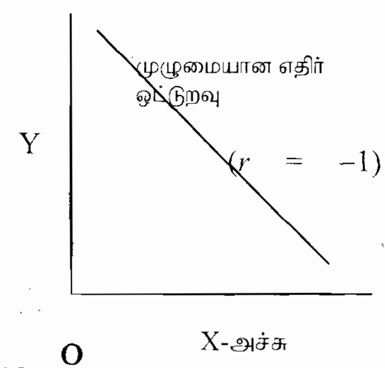
சிதறல் விளக்கப் படம்:

இது, இரு மாறிகளுக்கிடையிலான தொடர்பைப் படங்கள் மூலம் அறிய உதவும் எளிய முறையாகும். ஒரு மாறி கிடைக்கோட்டிலும், இரண்டாவது மாறி அதற்கு குத்துக் கோட்டிலும் குறிக்கப் படுகிறது. ஒவ்வொரு மாறிச் சோடிகளையும் புள்ளிகளாகத் தளத்தில் குறிக்க வேண்டும். கண்டறியப்பட்ட இரு மாறிச் சோடிகளுக்கான, பல புள்ளிகள் தளத்தில் குறிக்கப் படுகின்றன. இப்புள்ளிகளின் சிதறல் அல்லது ஒருங்கமைவு புள்ளிகளின் திசையைக் காட்டுவதாக அமையும்.

I. குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும்

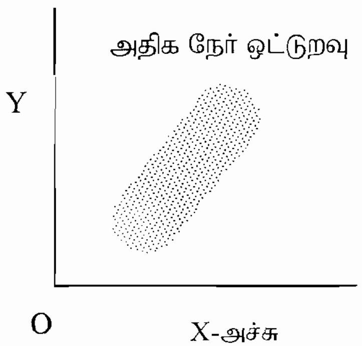
1. கீழ் இடது முனையிலிருந்து, மேல் வலது முனை வரையிலும் ஒரு நேர்க்கோட்டை அமைக்குமானால், அங்கு முழுமையான 'நேர் ஒட்டுறவு' உள்ளது எனலாம். இங்கு $r = +1$
2. குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் இடது மேல் முனையில் இருந்து, வலது கீழ் முனை வரை ஒரு நேர்க்கோட்டை அமைக்குமானால் அங்கு இரு மாறிகளுக்கிடையில் முழுமையான எதிர் ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம். இங்கு, ஒட்டுறவுக் கெழு $r = -1$.

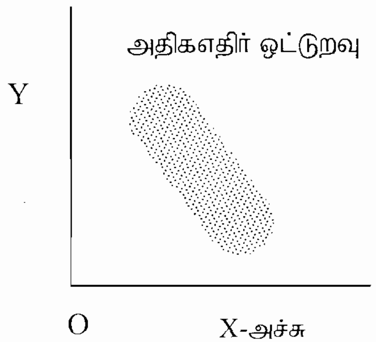


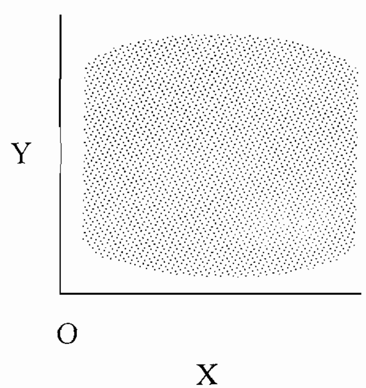


II.

1. தளத்தில் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் இடது கீழ் முனையில் இருந்து, வலது மேல் முனைக்கு உயருகின்ற பட்டை வடிவத்தைப் பெற்றிருக்குமானால், தொடர்புடைய இரு மாறிகளும் மிக அதிக நேர் ஒட்டுறவு உடையது எனலாம்.
2. தளத்தில் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் குறுகிய பட்டை வடிவத்தில் இடது மேல் முனையிலிருந்து வலது கீழ் முனைக்கு இறங்குமானால் இரு மாறிகளும், மிக அதிக அளவில் எதிர் ஒட்டுறவு உடையது எனலாம்.
3. குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் படம் முழுவதிலும் சிதறி இருக்குமானால் அம்மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு இல்லை எனலாம். இங்கு $r = 0$.







ஒட்டுறவின்மை
$(r = 0)$

நிறைகள்:

1. இரு மாறிகளுக்கிடையிலான ஒட்டுறவைக் காண்பதில் இம்முறை மிக எளிமையாகவும், கவன ஈர்ப்பு உடையதாகவும் அமைகிறது.

2. ஒட்டுறவு பற்றி அறிய உதவும் கணக்கியலல்லாத முறையாகும். இது எளிதில் புரிந்து கொள்ளக் கூடியது.
3. முனை மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.
4. இரு மாறிகளுக்கிடையேயான தொடர்பைக் காண்பதில், இது முதல் படியாகும்.
5. பார்த்த மாத்திரத்திலேயே இது நேர் ஒட்டுறவா, அல்லது எதிர் ஒட்டுறவா என அறிய இயலும்.

குறைகள்:

இம்முறையில் இரு மாறிகளுக்கிடையிலான சரியான அளவு ஒட்டுறவைக் காண இயலாது.

ஒட்டுறவின் வகைகள்:

ஒட்டுறவு பல வகைகளாகப் பிரிக்கப் படுகிறது. அவற்றில் முக்கியமானவை.

1. நேர் மற்றும் எதிர் ஒட்டுறவு.
2. நேர்க்கோடு, மற்றும் வளைகோட்டு உறவுகள்.
3. பகுதி, மற்றும் முழுமை ஒட்டுறவு.
4. சாதாரண மற்றும் பல்சார் ஒட்டுறவு.

நேர் மற்றும் எதிர் ஒட்டுறவு:

இது இரு மாறிகளின் மாற்றங்கள் செல்லும் திசையைப் பொறுத்தது. இரு மாறிகளும் ஒன்றாக ஒரே திசையில் நகருமானால் அதாவது ஒரு மாறியின் அதிகரிப்பு, மற்றொரு மாறியின் மதிப்பை அதிகரிக்கச் செய்வதால், அல்லது ஒரு மாறி மதிப்பின் குறையும் தன்மை மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைக் குறையச் செய்யுமானால், அவ்வொட்டுறவு மிகை அல்லது நேர் ஒட்டுறவு என்று அழைக்கப்படும். விலை-அளிப்பு, உயரம்-எடை மழை அளவு-விளைச்சல் என்பன நேர் ஒட்டுறவுக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

இரு மாறிகளும் ஒன்றாக எதிர்திசையில் செல்லுமானால், அதாவது ஒரு மாறி மதிப்பு அதிகரிப்பதால், மற்றொரு மாறியின் மதிப்பு குறையும்பொழுதோ, ஒரு மாறியின் மதிப்புக் குறைவு மற்றொரு மாறி மதிப்பினை அதிகரிக்கச் செய்யும் பொழுதோ, அவ்வொட்டுறவு எதிர் ஒட்டுறவு அல்லது தலைகீழ் ஒட்டுறவு என்று அழைக்கப்படும்.

விலை-தேவை, பயிர் விளைச்சல்-விலை என்பன எதிர் ஒட்டுறவுக்கு எடுத்துக் காட்டுகள்.

நேர்க்கோடு மற்றும் வளைகோட்டு ஒட்டுறவுகள்:

இரு மாறிகளுக்கிடையிலான மாற்றங்களின் விகிதம் மாறாமல் இருக்குமானால் அவற்றிற்கிடையே நேர்க்கோட்டு ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம். பின்வரும் அட்டவணையைக் கருதுக.

X	2	4	6	8	10	12
Y	3	6	9	12	15	18

இங்கு இரு மாறிகளுக்கிடையிலான விகிதம் மாறாமல் உள்ளது. இப்புள்ளிகளை ஒரு வரைபடத்தில் குறித்தால் நமக்கு ஒரு நேர்க்கோடு கிடைக்கும்.

ஒரு மாறி மதிப்பில் உள்ள மாற்றங்கள் மற்ற மாறி மதிப்பின் மாற்றங்களிடையே மாறிலி விகிதத்தை ஏற்படுத்தாத பொழுது, அவ்வுறவு வளைகோட்டு உறவு எனப்படும். இதன் வரைபடம் ஒரு வளைவரையாகும்.

பகுதி மற்றும் முழுமை ஒட்டுறவு:

மற்ற மாறிகளின் விளைவுகளை நீக்கிவிட்டு, இரு மாறிகளைப் பற்றி மட்டும் ஆய்வு செய்வது பகுதி ஒட்டுறவு எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக விலை-தேவை பற்றி ஆய்வு செய்யும்பொழுது அதற்கு தொடர்பான அளிப்புப் பகுதியின் விளைவை நீக்கிவிடுதல்.

சாதாரண மற்றும் பல்சார் ஒட்டுறவு:

இரு மாறிகளுக்கிடையிலான தொடர்பை மற்றும் ஆய்வு செய்வது தனி ஒட்டுறவு ஆகும். எடுத்துக் காட்டாக, பணத்தின் அளவு மற்றும் விலைவாசி, நிலவரம், தேவை மற்றும் விலை இவற்றைப் பற்றி ஆய்வு செய்வதாகும்.

ஆனால் பல்சார் ஒட்டுறவானது, பொருட்களின் விலை மீது தேவை மற்றும் அளிப்பு ஆகியவற்றின் இணைந்த விளைவைப் பற்றியதாகும்.

ஒட்டுறவு கணக்கீடு:

இரு மாறிகளுக்கிடையே ஒரு தொடர்பு இருக்குமெனில், அத்தொடர்பின் அளவை அளவிட வேண்டும். அவ்வளவையானது, ஒட்டுறவு அளவை அல்லது ஒட்டுறவுக்கெழு என்று அழைக்கப்படும். இது 'r' என்று குறிக்கப்படுகிறது.

உடன் மாறுபாட்டளவை:

x,y மாறிகளுக்கிடையேயான உடன் மாறுபாட்டளவை Cov(x,y) = $\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}$ இங்கு $\bar{x}, \bar{y}$ என்பன x,y மாறிகளின் சராசரிகள் 'n' என்பது மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை.

'கார்ல் பியர்ஸனின் ஒட்டுறவுக்கெழு:

கார்ல் பியர்ஸன் (Karl Pearson) என்ற உயிர் புள்ளியியல் மற்றும் புள்ளியியல் நிபுணர், இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள நேர்க்கோட்டுத் தொடர்பை அளப்பதற்கு ஒரு கணிதவியல் முறையைக் கொடுத்துள்ளார். நடைமுறையில் இம்முறை பரவலாகப் பயன்படுத்தப் படுகிறது. மேலும் இம்முறையில் கணக்கிடப்படும் ஒட்டுறவுக் கெழு பியர்ஸனின் ஒட்டுறவுக் கெழு என அழைக்கப்படுகிறது. இது பின்வரும் வாய்ப்பாட்டால் கணக்கிடப்படுகிறது.

(i) $r = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x . \sigma_y}$ இங்கு σ_x, σ_y என்பன x,y இன் திட்ட விலக்கங்கள் (ii) $r = \frac{\sum xy}{n\ \sigma_x\ \sigma_y}$

(iii) $r = \frac{\Sigma XY}{\sqrt{\Sigma X^2 . \Sigma Y^2}}$, $X = x-\bar{x}$, $Y = y-\bar{y}$

சரியான சராசரி காண இயலும்பொழுது மேற்கண்ட முதல் இரு முறைகளில் ஏதேனும் ஒன்றைப் பயன்படுத்தலாம்.

மூன்றாவது வாய்ப்பாடு, கணக்கிடுவதற்கு எளிதானது. மேலும் இம்முறையில் x,y வரிசைகளின் திட்ட விலக்கங்கள் காண வேண்டிய அவசியமில்லை.

படிகள்:

1. x,y என்ற வரிசைகளின் சராசரி காண வேண்டும்.
2. இரு வரிசைகளின் $\bar{x}, \bar{y}$ ல் இருந்து விலகல் எடுக்க வேண்டும்.
   $X = x-\bar{x}$, $Y = y-\bar{y}$
3. x,y இவற்றின் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களைக் கண்டு, அவ்வர்க் கங்களின் கூடுதலைக் காண்க. அது ΣX^2, ΣY^2 என்று குறிக்கப்படட்டும்.
4. x,y யில் இருந்து பெறப்படும் விலக்கங்களைப் பெருக்கி அவற்றின் மொத்தம் காண வேண்டும். மொத்த மதிப்பை n ஆல் வகுக்க, இது உடன் மாறுபட்டளவையாகும்.
5. இம் மதிப்புகளை வாய்பாட்டில் பிரதியிடுக

$$r = \frac{cov(x,y)}{\sigma x . \sigma y} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})\ (y\ -\ \bar{y})/n}{\sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}} . \sqrt{\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}}}$$

மேற்கண்ட வாய்ப்பாடு பின்வருமாறு எளிமையாக்கப்படுகிறது.

$$r = \frac{\Sigma XY}{\sqrt{\Sigma X^2 . \Sigma Y^2}}, \quad X = x-\bar{x} , Y = y-\bar{y}$$

எடுத்துக்காட்டு 1:

தந்தை (x) மற்றும் மகன் (y) இவர்களின் உயரங்களுக்கிடையிலான 'கார்ல் பியர்ஸனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவை' பின்வரும் விவரங்களில் இருந்து கணக்கிடுதல். மேலும் முடிவினைப் பற்றி கருத்து தெரிவிக்க.

x	64	65	66	67	68	69	70
y	66	67	65	68	70	68	72

தீர்வு:

x	y	$X = x-\bar{x}$ $X = x - 67$	X^2	$Y = y-\bar{y}$ $Y = y - 68$	Y^2	XY
64	66	-3	9	-2	4	6
65	67	-2	4	-1	1	2
66	65	-1	1	-3	9	3
67	68	0	0	0	0	0
68	70	1	1	2	4	2
69	68	2	4	0	0	0
70	72	3	9	4	16	12
469	476	0	28	0	34	25

$$\bar{x} = \frac{469}{7} = 67 \ ; \ \bar{y} = \frac{476}{7} = 68$$

$$r = \frac{\Sigma XY}{\sqrt{\Sigma X^2 . \Sigma Y^2}} = \frac{25}{\sqrt{28}.\sqrt{34}} = \frac{25}{\sqrt{952}} = \frac{25}{30.85} = 0.81$$

r = + 0.81 என்பதிலிருந்து இருமாறிகளும் அதிக நேர் ஒட்டுறவு உடையன. அதாவது உயரமான தந்தை, உயரமான மகனைப் பெற்றிருப்பார்.

கணக்கிடும் முறை

பின்வரும் வாய்பாட்டின் மூலம் ‘r’ காண இயலும்.

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x . \sigma_y}$$

$$Cov(x,y) = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} = \frac{\Sigma(xy + \bar{x}y - \bar{y}x - \bar{x}\bar{y})}{n}$$

$$= \frac{\Sigma xy}{n} - \frac{\bar{y}\Sigma x}{n} - \frac{\bar{x}\Sigma y}{n} + \frac{\Sigma \bar{x}\bar{y}}{n}$$

$$Cov(x,y) = \frac{\Sigma xy}{n} - \cancel{\bar{y}\bar{x}} - \bar{x}\bar{y} + \cancel{\bar{x}\bar{y}} = \frac{\Sigma xy}{n} - \bar{x}\bar{y}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2 , \quad \sigma_y^2 = \frac{\Sigma y^2}{n} - \bar{y}^2$$

இங்கு $r = \dfrac{Cov(x,y)}{\sigma_x . \sigma_y}$ $\quad r = \dfrac{\dfrac{\Sigma xy}{n} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2\right)} . \sqrt{\left(\dfrac{\Sigma y^2}{n} - \bar{y}^2\right)}}$

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{[n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2][n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2]}}$$

குறிப்பு: மேற்கண்ட முறையில் மாறிகளின் சராசரி அல்லது திட்ட விலக்கம் தனித் தனியாக கணக்கிட வேண்டிய அவசியமில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 2:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழு காண்.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	9	8	10	12	11	13	14	16	15

தீர்வு:

x	y	x^2	y^2	xy
1	9	1	81	9
2	8	4	64	16
3	10	9	100	30
4	12	16	144	48
5	11	25	121	55
6	13	36	169	78
7	14	49	196	98
8	16	64	256	128
9	15	81	225	135
45	108	285	1356	597

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{[n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2][n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2]}}$$

$$r = \frac{9 \times 597 - 45 \times 108}{\sqrt{(9 \times 285 - (45)^2).(9 \times 1356 - (108)^2)}}$$

$$r = \frac{5373 - 4860}{\sqrt{(2565 - 2025).(12204 - 11664)}}$$

$$= \frac{513}{\sqrt{540 \times 540}} = \frac{513}{540} = 0.95$$

கணக்கீடு முறை (II) சுருக்கு முறை

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x . \sigma_y}$$

இங்கு $Cov(x,y) = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}$

x இல் இருந்து கிடைக்கும் விலகலை x – A என்றும், y லிருந்து கிடைக்கும் விலகலை y – B என்றும் கொள்க.

$$Cov(x,y) = \frac{\Sigma\ [(x-A) - (\overline{x-A})]\ [(y-B) - (\overline{y-B})]}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\ \Sigma\ [(x-A)\ (y-B)\ -\ (x-A)\ (\overline{y}-B)$$

$$-\ (\overline{x}-A)(y-B) + (\overline{x}-A)(\overline{y}-B)]$$

$$= \frac{1}{n}\ \Sigma\ [(x-A)\ (y-B)\ -\ (\overline{y}-B)\ \frac{\Sigma(x-A)}{n}$$

$$-\ (\overline{x}-A)\frac{\Sigma(y-B)}{n} + \frac{\Sigma(\overline{x}-A)(\overline{y}-B)}{n}$$

$$= \frac{\Sigma(x-A)(y-B)}{n} - (\overline{y}-B)\ (\overline{x} - \frac{nA}{n})$$

$$-\ (\overline{x}-A)\ (\overline{y} - \frac{nB}{n}) + (\overline{x}-A)\ (\overline{y}-B)$$

$$= \frac{\Sigma(x-A)(y-B)}{n} - (\overline{y}-B)\ (\overline{x}-\ A)$$

$$-\ \cancel{(\overline{x}-A)\ (\overline{y}-B)} + \cancel{(\overline{x}-A)\ (\overline{y}-B)}$$

$$= \frac{\Sigma(x-A)(y-B)}{n} - (\overline{x}-\ A)\ (\overline{y}-B)$$

Let $x-A = u\ ;\ y-B = v;\qquad \overline{x}-A = \overline{u}\ ;\quad \overline{y}-B = \overline{v}$

$$\therefore Cov\ (x,y) = \frac{\Sigma uv}{n} - \overline{uv}$$

$$\sigma_x^{\ 2} = \frac{\Sigma u^2}{n} - \overline{u}^2 = \sigma_u^{\ 2} \qquad \sigma_y^{\ 2} = \frac{\Sigma v^2}{n} - \overline{v}^2 = \sigma_v^{\ 2}$$

$$\therefore r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{\left[n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2\right].\left[(n\Sigma v^2) - (\Sigma v)^2\right]}}$$

எடுத்துக்காட்டு 3:

பியர்ஸனின் ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க

X	45	55	56	58	60	65	68	70	75	80	85
Y	56	50	48	60	62	64	65	70	74	82	90

தீர்வு:

X	Y	u = X-A	v = Y-B	u^2	v^2	uv
45	56	-20	-14	400	196	280
55	50	-10	-20	100	400	200
56	48	-9	-22	81	484	198
58	60	-7	-10	49	100	70
60	62	-5	-8	25	64	40
65	64	0	-6	0	36	0
68	65	3	-5	9	25	-15
70	70	5	0	25	0	0
75	74	10	4	100	16	40
80	82	15	12	225	144	180
85	90	20	20	400	400	400
மொத்தம்		2	-49	1414	1865	1393

$$r = \frac{N\Sigma fuv\ -\ (\Sigma fu)\ (\Sigma fv)}{\sqrt{[N\Sigma fu^2 - (\Sigma fu)^2].[N\Sigma fv^2 - (\Sigma fv)^2]}}$$

$$r = \frac{11 \times 1393 - 2 \times (-49)}{\sqrt{(1414 \times 11 - (2)^2) \times (1865 \times 11 - (-49)^2)}}$$

$$= \frac{15421}{\sqrt{15550 \times 18114}} = \frac{15421}{16783.11} = +0.92$$

தொகுக்கப்பட்ட இரு மாறிப் பரவலின் ஒட்டுறவு கணக்கிடல்:

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாக இருப்பின் அவ்விவரமானது இரு மாறி நிகழ்வெண் பரவலாக பாகுபாடு செய்யப்படும். இவ்விதம் பாகுபாடு செய்யப்பட்ட அட்டவணை ஒட்டுறவு அட்டவணை எனப்படும். X இன் பிரிவுகள் நிரைகளாகவும் Y இன் பிரிவுகள் நிரல்களாகவும் வரிசை படுத்தப்படும். இதை மாற்றியும் எழுதலாம். அட்டவணையில் உள்ள ஒவ்வொரு பகுதிக்கும் நிகழ்வெண் கண்டுபிடிக்கப்படும்.

ஒட்டுறவுக் கெழுவிற்கான வாய்ப்பாடு

$$r = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x, \sigma_y} \quad \text{இங்கு } \operatorname{cov}(x,y) = \frac{\Sigma f(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{N}$$

$$= \frac{\Sigma fxy}{N} - \bar{x}\ \bar{y}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma fx^2}{N} - \bar{x}^2 \ ; \ \sigma_y^2 = \frac{\Sigma fy^2}{N} - \bar{y}^2$$

N – மொத்த நிகழ்வெண்

$$r = \frac{N\Sigma fxy - (\Sigma fx)\ (\Sigma fy)}{\sqrt{[N\Sigma fx^2 - (\Sigma fx)^2].[N\Sigma fy^2 - (\Sigma fy)^2]}}$$

தேற்றம்: ஒட்டுறவுக் கெழுவானது ஆதி மாற்றத்தினால் அல்லது அளவு மாற்றத்தால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.

$$u = \frac{x-A}{c} \ ; \quad v = \frac{y-B}{d} \qquad \text{எனில் } r_{xy} = r_{uv}$$

நிருபணம்:

$$u = \frac{x-A}{c}$$

$$cu = x - A \qquad x = cu + A$$

$$\bar{x} = c\bar{u} + A \quad v = \frac{y-B}{d} \qquad vd = y - B$$

$$y = B + vd \quad \bar{y} = [B + \bar{v}d]$$

$$\sigma_x = c\sigma_u \ ; \quad \sigma_y = d\sigma_v$$

$$r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma x, \sigma y}$$

$$\operatorname{cov}(x,y) = \frac{\Sigma f(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}$$

$$\frac{1}{n}\Sigma f[(cu+A) - (c\bar{u}+A)][(dv+B) - (d\bar{v}+B)]$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma f\left[cu - c\bar{u}\right]\left[(dv - d\bar{v})\right]$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f\left[c(u-\bar{u})\right]\left[d(v-\bar{v})\right]$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f \ cd \ \left[u-\bar{u}\right]\left[v-\bar{v}\right]$$

$$= \frac{1}{N} cd \ \Sigma \ f(u-\bar{u}) \ (v-\bar{v})$$

$$= cd \ \frac{\Sigma f(u-\bar{u}) \ (v-\bar{v})}{N} = cd \quad \operatorname{cov}(u,v)$$

$$\therefore \operatorname{cov}(x,y) = c.d \ \operatorname{cov}(u,v)$$

$$\therefore r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x \ \sigma_y} = \frac{cd \ \operatorname{cov}(u,v)}{c.\sigma_u.\ d.\sigma_v} = \frac{\operatorname{cov}(u,v)}{\sigma_u \ \sigma_v} = r_{uv}$$

$$\therefore r_{xy} = r_{uv}$$

படிகள்:

1. மாறி X இன் படி விலகல் எடுத்து அதை படிவிலகல் ‘u’ எனக் குறிக்கலாம்.
2. மாறி Y இன் படி விலகல் எடுத்து அவ்விலகலை ‘v’ எனக் குறிக்கவும்.
3. ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் uvஐ நிகழ்வெண்ணால் பெருக்கிக் கிடைக்கும் பெருக்கல் பலனை கீழ் வலது முனையில் எழுதவும்.
4. படி (3) இல் கூறியபடி முனைகளில் எழுதப்பட்ட எண்களைக் கூட்டி Σfuv பெறவும்.
5. ‘u’ வை ‘f’ ஆல் பெருக்கி Σfu காணவும்.
6. u^2 ஐ ‘f’ ஆல் பெருக்கி Σfu^2 பெறவும். இதே போல Σfv மற்றும் Σfv^2 காணவும். இம்மதிப்புகளை வாய்ப்பாட்டில் பிரதியிட்டு ‘r’ இன் மதிப்பைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4:

132 மாணவர்கள் இரு தேர்வுகளில் பெற்ற மதிப்புகள் பின்வருமாறு

தேர்வு-1 / தேர்வு-2	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	மொத்தம்
20-30	2	5	3			10
30-40	1	8	12	6		27
40-50		5	22	14	1	42
50-60		2	16	9	2	29
60-70		1	8	6	1	16
70-80			2	4	2	8
மொத்தம்	3	21	63	39	6	132

இதற்கான ஒட்டுறவுக் கெழு கணக்கிடவும். X என்பது முதல் தேர்வு மதிப்பெண், Y என்பது 2ஆவது தேர்வு மதிப்பெண்ணையும் குறிக்கட்டும்

$$u = \frac{x-55}{10} \qquad v = \frac{y-45}{10}$$

X இன் நடுமதிப்பு / Y இன் நடுமதிப்பு	35	45	55	65	75	F	v	fv	fv^2	fuv
25	4 2 8	2 5 10	0 3 0	-	-	10	-2	-20	40	18
35	2 1 2	1 8 8	0 12 0	-1 6 -6	-	27	-1	-27	27	4
45		0 5 0	0 22 0	0 14 0	0 1 0	42	0	0	0	0
55		-1 2 -2	0 16 0	1 9 9	2 2 4	29	1	29	29	11
65		-2 1 -2	0 8 0	2 6 12	4 1 4	16	2	32	64	14
75			0 2 0	3 4 12	6 2 12	8	3	24	72	24
f	3	21	63	39	6	132	3	38	232	71
u	-2	-1	0	1	2	0	சரிபார்க்கவும்			
fu	-6	-21	0	39	12	24				
fu^2	12	21	0	39	24	96				
fuv	10	14	0	27	20	71				

$$r = \frac{N\Sigma fuv - (\Sigma fu)\ (\Sigma fv)}{\sqrt{[N\Sigma fu^2 - (\Sigma fu)^2].[N\Sigma fv^2 - (\Sigma fv)^2]}}$$

$$= \frac{132\times 71 - 24\times 38}{\sqrt{[132\times 96-(24)^2]\ [132\times 232-(38)^2]}}$$

$$= \frac{9372-912}{\sqrt{(12672-576)(30624-1444)}}$$

$$= \frac{8460}{109.96\times 170.82}$$

$$= \frac{8460}{18786.78}$$

$$= 0.4503$$

எடுத்துக்காட்டு 5:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரத்திற்கு கார்ல் பியர்ஸனின் ஒட்டுறவுக் கெழு கணக்கிடுக.

வயது (வருடங்களில்)

மதிப்பெண்	18	19	20	21	22
0- 5	-	-	-	3	1
5- 10	-	-	-	3	2
10-15	-	-	7	10	-
15-20	-	5	4	-	-
20-25	3	2	-	-	-

$$u = \frac{x-12.5}{5}$$

$$v = \frac{y-20}{1}$$

Yஇன் நடுமதிப்பு Xஇன் நடுமதிப்பு	18	19	20	21	22	f	v	fv	fv^2	Fuv
2.5	-	-	-	-2 3 -6	-4 1 -4	4	-2	-8	16	-10
7.5	-	-	-	-1 3 -3	-2 2 -4	5	-1	-5	5	-7
12.5	-	-	0 7 0	0 10 0	-	17	0	0	0	0
17.5	-	-1 5 -5	0 4 0	-	-	9	1	9	9	-5
22.5	-4 3 -12	-2 2 -4	-	-	-	5	2	10	20	-16
f	3	7	11	16	3	40	0	6	50	-38
u	-2	-1	0	1	2	0	சரிபார்க்கவும்			
Fu	-6	-7	0	16	6	9				
fu^2	12	7	0	16	12	47				
Fuv	-12	-9	0	-9	-8	-38				

$$r = \frac{N\Sigma fuv - (\Sigma fu)\ (\Sigma fv)}{\sqrt{[N\Sigma fu^2 - (\Sigma fu)^2].[N\Sigma fv^2 - (\Sigma fv)^2]}}$$

$$= \frac{40(-38) - 6\times 9}{\sqrt{[40\times 50 - 6^2].[40\times 47 - 9^2]}}$$

$$= \frac{-1520 - 54}{\sqrt{(2000-36)\times(1880-81)}} = \frac{-1574}{\sqrt{1964\times 1799}} = -0.8373$$

ஒட்டுறவுக் கெழுவின் பண்புகள்

1. ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பு -1 ற்கும் $+1$ ற்கும் இடையில் அமைகிறது.

அதாவது, $-1 \le r \le +1$

$x' = \dfrac{x-\bar{x}}{\sigma x}$; $y' = \dfrac{y-\bar{y}}{\sigma y}$ என்க

வர்க்கங்களின் கூடுதல் எப்பொழுதும் மிகை என்பதால் $\Sigma(x'+y')^2$

$\Sigma(x'+y')^2 \ge 0$

$\Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 + 2\Sigma x'y' \ge 0$

$$\Sigma\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)^2 + \Sigma\left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}\right)^2 + 2\Sigma\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)\ \left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}\right) \ge 0$$

$$\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{\sigma_{x^2}} + \frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{\sigma_{y^2}} + \frac{2\Sigma(x-\bar{x})\ (Y-\bar{Y})}{\sigma_x\sigma_y} \ge 0$$

'n' ஆல் வகுக்க

$$\frac{1}{\sigma_{x^2}}.\frac{1}{n}\ \Sigma(x-\bar{x})^2 + \frac{1}{\sigma_{y^2}}.\frac{1}{n}\Sigma(y-\bar{y})^2$$

$$+\frac{2}{\sigma_x\sigma_y}.\frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})\ (y-\bar{y}) \ge 0$$

$$\frac{1}{\sigma_{x^2}}.\sigma_{x^2} + \frac{1}{\sigma_{y^2}}\sigma_{y^2} + \frac{2}{\sigma_x\sigma_y}.\text{cov}(x,y) \ge 0$$

$1 + 1 + 2r \ge 0$

$2 + 2r \ge 0$

$2(1+r) \ge 0$

$(1+r) \ge 0$

$r \ge -1$ or $-1 \le r$ -------------(1)

இதே போல் $\Sigma(x' - y')^2 \ge 0$

$2(1-r) \ge 0$

$1 - r \ge 0$

$r \le +1$ --------------(2)

(1) +(2) விலிருந்து $-1 \le r \le 1$

குறிப்பு:

$r = +1$ எனில் முழுமையான நேர் ஒட்டுறவு.

$r = -1$ எனில் முழுமையான எதிர் ஒட்டுறவு ஆகும்.

பண்பு 2: ஒட்டுறவுக் கெழுவானது ஆதி மாற்றத்தாலோ, அளவு மாற்றத்தாலோ பாதிக்கப்படுவதில்லை.

பண்பு 3: ஒட்டுறவுக் கெழுவானது எந்த ஒரு அலகையும் குறிக்காத ஒரு எண்ணாகும்.

பண்பு 4: ஒன்றை ஒன்று சாராத மாறிகள் தொடர்புடையன அல்ல.

பண்பு 5: ஒட்டுறவுக் கெழுவானது, இரு உடன் தொடர்புக் கெழுக்கலின் பெருக்கல் சராசரியாகும்.

பண்பு 6: x,y இன் ஒட்டுறவுக் கெழுவானது சமச்சீர் தன்மை உடையது. அதாவது $r_{xy} = r_{yx}$.

குறைகள்:

1. எடுத்துக் கொண்ட கொள்கை சரியா அல்லது தவறா என்பதைக் கருதாமல் ஒரு நேர்க்கோட்டுத் தொடர்பை மட்டுமே ஒட்டுறவுக் கெழு கூறுகிறது.
2. ஒட்டுறவுக் கெழுவில் மாறிகளின் முனை உறுப்புகள் பொருந்தாத முறையில் செயல்படுத்தப்படுகின்றன.
3. ஒட்டுறவுக்கெழு இருக்கிறது என்பதனால் அது காரண விளைவுகளைக் குறிக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

தெரிவாக்கம்:

'r' இன் மதிப்பைப் பற்றி தெளிவாக எடுத்துரைக்க கீழ்க்கண்ட விதிகளைப் பின் பற்றுகிறோம்.

1. r = 1, எனில் இரு மாறிகளுக்கிடையில் நேரிடை நிறைவு ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம்.
2. r = -1, எனில் இரு மாறிகளுக்கிடையில் எதிரிடை ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம்.
3. r = 0, எனில் இரு மாறிகளுக்கிடையில் தொடர்பு இல்லை எனலாம்.
4. ஒட்டுறவு +1 அல்லது -1ற்கு அருகில் இருக்குமெனில் இரு மாறிகளுக்கிடையே குறிப்பிடத் தகுந்த அளவு மிக அதிகமான நேர் ஒட்டுறவு அல்லது எதிர் ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம்.
   ஒட்டுறவுக் கெழு 0 விற்கு அருகில் உள்ள பொழுது (மிகை அல்லது குறை திசையில்) இரு மாறிகளுக்கிடையே மிகக் குறைவான நேர் ஒட்டுறவு அல்லது எதிர் ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம்.

தர வரிசை ஒட்டுறவு:

தொகுதிப் பண்பளவைகளின் எந்த வித கருத்துக்களும் எடுத்துக் கொள்ளாத பொழுது தர வரிசை ஒட்டுறவு காணப்படுகிறது. இது தரத்தினை அடிப்படையாகக் கொண்டது. இது பண்பளவுகளான, நேர்மை, நிறங்கள், அழகு, புத்திக் கூர்மை, குணநலன்கள், ஒழுக்கம் ஆகியவற்றைப் பற்றி அறிய பயன்படுகிறது. ஒரு தொகுதியில் உள்ள

நபர்கள் வரிசைப் படுத்தப்பட்டு பின்னர் ஒவ்வொரு தனி நபருக்கும், அவருக்குரிய தரம் கொடுக்கப்படுகிறது.

இம்முறை எட்வர்ட் ஸ்பியர்மேன் (Edward Spearman) என்பவரால் 1904-ம் ஆண்டு உருவாக்கப்பட்டது. இது

$$R = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{n^3 - n}$$

R = தர வரிசை ஒட்டுறவுக் கெழு என வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு: சில ஆசிரியர்கள் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவிற்கு ρ என்ற குறியீட்டெண்ணைப் பயன்படுத்துகின்றனர்.

ΣD^2 = இரு தரவரிசைகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடுகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்.

n = மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை

R மதிப்பு -1 ற்கும் $+1$ ற்கும் இடையில் அமைகிறது. R = +1 என இருக்குமானால் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட தரங்களிடையே முழுமையான ஒப்புமைத் தன்மை உள்ளது. தரங்கள் ஒரே திசை உடையதாக இருக்கும் R = -1 எனில் தரங்கள் முழுமையாக வேறுபடுகின்றன எனவும், அவை எதிர்திசை உடையதாகவும் இருக்கும்.

சில சமமதிப்பு உள்ளவிடத்து தரஉறவு:

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகள் சமமதிப்புகளாக இருந்தால்: இவ்உறுப்புகளுக்கு பொதுவான தரங்கள் கொடுக்கப்படுகின்றன. இச்சூழ்நிலைகளில் ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் சமமான தரம் கொடுக்கப்படுகிறது. எடுத்துக் காட்டாக, 5ஆவது தரத்தில் உள்ள மதிப்பு இரு முறை வருமேயானால். 5,6 இவற்றின் சராசரியான

$\frac{5+6}{2} = 5.5$ என்ற பொதுவான தரம் இரு உறுப்புகளுக்கும் கொடுக்கப்படுகிறது.

சமதரங்கள் இருக்குமானால், திருத்த காரணி சேர்ப்பது அவசியமாகிறது. அது $\frac{1}{12}(m^3 - m)$ ஆகும். ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகள் சம மதிப்பைப் பெற்றால்,

$$\text{தரஉறவு } R = 1 - \frac{6[\Sigma D^2 + \frac{1}{12}(m^3 - m) + \frac{1}{12}(m^3 - m) + \ldots]}{n^3 - n}$$

இங்கு 'm' என்பது சமதரங்கள் பெற்ற உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும். இது எத்தனை சம தரங்கள் உடையனவோ, அவை அனைத்திற்கும் திருத்த காரணி சேர்க்கப்பட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 6:
ஒரு சந்தை ஆய்வில், ஒரு நகரத்தில் தரத்தின் அடிப்படையில் தேநீர் மற்றும், காப்பியின் விலை நிலவரம் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவற்றின் விலைகளுக்கு இடையிலான தொடர்பினை உன்னால் காண இயலுமா?

தேநீர் விலை	88	90	95	70	60	75	50
காபியின் விலை	120	134	150	115	110	140	100

தீர்வு:

தேநீர் விலை	தரம்	காபியின் விலை	தரம்	D	D^2
88	3	120	4	1	1
90	2	134	3	1	1
95	1	150	1	0	0
70	5	115	5	0	0
60	6	110	6	0	0
75	4	140	2	2	4
50	7	100	7	0	0
					$\Sigma D^2 = 6$

$$R = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{n^3 - n}$$
$$= 1 - \frac{6 \times 6}{7^3 - 7}$$
$$= 1 - \frac{36}{336}$$
$$= 1 - 0.1071$$
$$= 0.8929$$

தேநீர், மற்றும் காபி இவற்றின் விலைகளுக்கு இடையில் உள்ள நேர்உறவு 0.89. தரங்கள் அடிப்படையில் இவற்றின் விலைகளுக்கிடையிலான தொடர்பானது மிக அதிக நேர் உறவு உடையது.

எடுத்துக்காட்டு 7:
இரு தேர்வாளர்களால் மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட விடைத்தாள்களின் மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு

1st	88	95	70	960	50	80	75	85
2nd	84	90	88	55	48	85	82	72

இருவரால் செய்யப்பட்ட மதிப்பீடு சரியானவை என்ற கருத்துடன் நீ உடன்படுகிறாயா?

x	R1	y	R2	D	D^2
88	2	84	4	2	4
95	1	90	1	0	0
70	6	88	2	4	16
60	7	55	7	0	0
50	8	48	8	0	0
80	4	85	3	1	1
85	3	75	6	3	9
					30

$$R = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6 \times 30}{8^3 - 8}$$
$$= 1 - \frac{180}{504} = 1 - 0.357 = 0.643$$

R=0.643 என்பதில் இருந்து விடைத்தாள்களை மதிப்பிட்டு மதிப்பெண்கள் வழங்குவதில் இருவரிடையே ஒரே சீரிய தன்மை உள்ளது எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8:
ஒரு வகுப்பில் உள்ள 10 மாணவர்கள் இரு தேர்வில் எடுத்த மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு

மாணவர்கள்	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
தேர்வு 1	70	68	67	55	60	60	75	63	60	72
தேர்வு 2	65	65	80	60	68	58	75	63	60	70

இரு தேர்வு மதிப்பெண்களுக்கிடையிலான தர ஒட்டுறவு காண்க

மாணவர்கள்	தேர்வு 1	R1	தேர்வு 2	R2	D	D^2
A	70	3	65	5.5	-2.5	6.25
B	68	4	65	5.5	-1.5	2.25
C	67	5	80	1.0	4.0	16.00
D	55	10	60	8.5	1.5	2.25
E	60	8	68	4.0	4.0	16.00
F	60	8	58	10.0	-2.0	4.00
G	75	1	75	2.0	-1.0	1.00
H	63	6	62	7.0	-1.0	1.00
I	60	8	60	8.5	0.5	0.25
J	72	2	70	3.0	-1.0	1.00
						50.00

தேர்வு 1 ல் 60 மூன்று முறை இடம் பெற்றுள்ளது.
2ஆவது தேர்வில் 60,65 இரு முறை மீண்டும் மீண்டும் வந்துள்ளது.
m = 3; m = 2; m = 2

$$R = 1 - \frac{6[\Sigma D^2 + \frac{1}{12}(m^3 - m) + \frac{1}{12}(m^3 - m) + \frac{1}{12}(m^3 - m)]}{n^3 - n}$$

$$R = 1 - \frac{6[50 + \frac{1}{12}(3^3 - 3) + \frac{1}{12}(2^3 - 2) + \frac{1}{12}(2^3 - 2)]}{10^3 - 10}$$

$$= 1 - \frac{6[50 + 2 + 0.5 + 0.5]}{990}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 53}{990}$$

$$= \frac{672}{990} = 0.68$$

கருத்து:

இரு தேர்வுகளிலும் மாணவர்களின் திறமை ஒரே சீரானது.

பயிற்சி - 8

I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக:

1. ஒட்டுறவுக் கெழுவின் எல்லை.
   (அ) $-1 \le r \le 1$ (ஆ) $0 \le r \le 1$
   (இ) $-1 \le r \le 0$ (ஈ) $1 \le r \le 2$
2. ஒட்டுறவுக் கெழுவானது
   (அ) குறை எண் அல்ல (ஆ) மிகை எண் அல்ல
   (இ) எப்பொழுதும் மிகையானது (ஈ) மிகை அல்லது குறை
3. ஒட்டுறவுகெழுவிற்கான வாய்ப்பாடு
   (அ) $r = \frac{\Sigma XY}{xy}$ (ஆ) $r = \frac{\Sigma XY}{n\ \sigma_x\ \sigma_y}$
   (இ) $r = \frac{\Sigma XY}{n\ \sigma_x}$ (ஈ) இவற்றில் ஏதுமில்லை
4. cov(x,y) = 0 எனில்
   (அ) x மற்றும் yக்கு இடையே ஒட்டுறவு உள்ளது
   (ஆ) x மற்றும் yக்கு இடையே ஒட்டுறவு இல்லை

   (இ) இவற்றில் ஏதுமில்லை
   (ஈ) x, y நேர் கோட்டுத் தொடர்புடையது.
5. r = 0 எனில் cov (x,y)
   (அ) 0 (ஆ) -1 (இ) 1 (ஈ) 0.2
6. தரவரிசை ஒட்டுறவுக்கெழு கீழ்க்கண்ட வாய்ப்பாட்டால் பெறப்படும்.
   (அ) $1 + \frac{6\Sigma D^2}{n^3 - n}$ (ஆ) $1 - \frac{6\Sigma D^2}{n^2 - n}$ (இ) $1 - \frac{6\Sigma D^2}{n^3 - n}$
   (ஈ) $1 - \frac{6\Sigma D^2}{n^3 + n}$
7. cov (x,y) = $\sigma_x\ \sigma_y$ எனில்
   (அ) r = +1 (ஆ) r = 0 (இ) r = 2 (ஈ) r = -1
8. $\Sigma D^2 = 0$ எனில், தரவிலக்கக் கெழு
   (அ) 0 (ஆ) 1 (இ) 0.5 (ஈ) -1
9. ஒட்டுறவுக் கெழு கீழ்க்கண்டவற்றால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.
   (அ) ஆதி (ஆ) அளவு
   (இ) ஆதி மற்றும் அளவு (ஈ) இவற்றில் எதுவும் இல்லை
10. தர விலக்கம் இவரால் உருவாக்கப்பட்டது.
   (அ) பியர்ஸன் (ஆ) ஸ்பியர்மேன்
   (இ) கால்டன் (ஈ) பிஷர்

II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக:

11 ஒட்டுறவு கெழு __________ சார்ந்ததல்ல.
12 இரு மாறிகளை விளக்கப்படம் மூலம் குறிப்பிடுதல்__________ என்று அழைக்கப்படுகிறது.
13 மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை பற்றி __________ ஒட்டுறவு உதவியுடன் அறியலாம்.
14 ஒட்டுறவுகெழுவைக் காணும் முறையைக் கண்டறிந்தவர் __________.
15 r = +1 எனில், __________ ஒட்டுறவு உள்ளது.
16 $r_{xy} = r_{yx}$, எனில் x , y ற்கு இடையிலான தொடர்பு __________
17 தர விலக்கம் கெழு _______ குணங்கள்
18 புத்திக் கூர்மை மற்றும் பாதணிகளின் அளவு இவற்றிற்கிடையிலான தொடர்பின் தன்மை __________

III. கீழ்க்கண்டவற்றிற்கு விடையளிக்கவும் :

19 ஒட்டுறவு என்றால் என்ன?

20 மிகை மற்றும் குறை ஒட்டுறவை வேறுபடுத்தி காட்டுக.

21 கார்ல் பியர்ஸனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவை வரையறு

r = 1, -1 ,0 என்று இருக்கும் பொழுது அதன் விளக்கக் கருத்தை தெளிவு படுத்துக.

22 சிதறல் விளக்கப்படம் என்றால் என்ன? ஒட்டுறவு பற்றி அறிய அது எவ்வகையில் உதவுகிறது?

23 கோடு மற்றும் வளை கோட்டு ஒட்டுறவுகளை வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

24 ஒட்டுறவுக் கெழுவின் முக்கிய பண்புகளை குறிப்பிடுக.

25 ஒட்டுறவுக் கெழு–1ற்கும் +1ற்கும் இடையில் அமையும் என நிறுவுக.

26 ஒட்டுறவுக் கெழுவானது ஆதி மற்றும் அளவைச் சார்ந்ததல்ல என்பதை நிறுவு

27 தர வரிசை ஒட்டுறவு என்றால் என்ன? மற்றும் அதன் நிறை குறைகள் யாவை?

28 பல்வேறு வகையான ஒட்டுறவுகளை உதாரணத்துடன் விளக்குக.

29 கார்ல் பியர்ஸின் ஒட்டுறவுக் கெழுவையும் ஸ்பியர்மனின் தர வரிசை ஒட்டுறவுக் கெழுவையும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

30 10 மதிப்புகளுக்கு $\Sigma x = 130$; $\Sigma y = 220$; $\Sigma x^2 = 2290$; $\Sigma y^2 = 5510$; $\Sigma xy = 3467$. எனில் 'r'ஐ காண்க.

31 Cov (x,y) = 18.6; var(x) = 20.2; var(y) = 23.7. எனில் 'r'காண்க.

32 r = 0.42 cov(x,y) = 10.5 v(x) = 16; எனில் y-ன் திட்ட விலக்கம் காண்க.

33 தரவிலக்கக் கெழு r = 0.8, $\Sigma D^2 = 33$. எனில் 'n'ஐ காண்க.

34. A மற்றும் B மதிப்புகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு காண்

A	5	10	5	11	12	4	3	2	7	1
B	1	6	2	8	5	1	4	6	5	2

35. விலை மற்றும் அளிப்பிற்கிடையிலான ஒட்டுறவுக் கெழுவினை கணக்கிடுக. இம்மதிப்பிற்கான விளக்கத்தை தெளிவாக்குக.

விலை	8	10	15	17	20	22	24	25
அளிப்பு	25	30	32	35	37	40	42	45

36. பின்வரும் வரிசையில் உள்ள பொருட்களின் விலை மற்றும் அளிப்பிற்கிடையிலான தொடர்பின் ஒட்டுறவை கெழுவை காண்க

விலை (ரூ)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
அளிப்பு(ரூ)	30	29	29	25	24	24	24	21	18	15

37. 10 மாணவர்கள் பொருளியல் மற்றும் புள்ளியியல் பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கிடையிலான ஒட்டுறவு கெழு காண்க.

பொருளியல்	70	68	67	55	60	60	75	63	60	72
புள்ளியியல்	65	65	80	60	68	58	75	62	60	70

38. பின்வரும் விவரத்தின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க

தொழிலாளியி ன் வயது	40	3 4	2 2	2 8	36	3 2	24	46	2 6	30
வேலைக்கு வராத நாட்கள்	2. 5	3	5	4	2. 5	3	4. 5	2. 5	4	3. 5

39. பின்வரும் தந்தை மற்றும் மகனின் உயரங்களுக்கிடையே ஒட்டுறவுக்கெழுவை கணக்கிடுக.

தந்தையின் உயரம்	65	66	67	67	68	69	70	72
மகனின் உயரம்	67	68	65	68	72	72	69	71

இரு மாறி ஒட்டுறவு:

40. பின்வரும் விவரத்திற்கு ஒட்டுறவுகெழு காண்க.

வருடம்	0	1	2	3	4	5	6	7	8	மொத்தம்
20-29	2	1	2	2	-	1	-	1	1	10
30-39	-	2	-	1	-	2	-	1	2	8
40-49	-	2	-	2	-	-	1	-	1	6
50-59	1	-	2	-	-	-	-	1	-	4
60-69	-	-	-	-	-	1	-	1	-	2

41. கணவன் மனைவி வயதுகளுக்கிடையில் ஒட்டுறவுக்கெழு கணக்கிடுக முடிவிற்கான விளக்கம் தருக.

மனைவியின் வயது

கணவனின் வயது	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	மொத்தம்
15-25	1	1	-	-	-	-	2
25-35	2	12	1	-	-	-	15
35-45	-	4	10	1	-	-	15
45-55	-	-	3	6	1	-	10
55-65	-	-	-	2	4	2	8
65-75	-	-	-	-	1	2	3
மொத்தம்	3	17	14	9	6	4	53

42. ஒரு வியாபார அலுவலகத்தில் உள்ள 45 எழுத்தர்களின் வயது மற்றும் சம்பளத்திற்கான நிகழ்வைண் பரவல் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவற்றிற்கிடையே ஒட்டுறவு இருக்குமானால் அதனைக் காண்க

ஊதியம்

வயது	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	மொத்தம்
20-30	4	3	1	-	-	8
30-40	2	5	2	1	-	10
40-50	1	2	3	2	1	9
50-60	-	1	3	5	2	11
60-70	-	-	1	1	5	7
மொத்தம்	7	11	10	9	8	45

43. 60 மாணவர்கள் இரு பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கு இடையிலான ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

புள்ளியலில் மதிப்பெண்கள்

பொருளியலில் மதிப்பெண்கள்	5-15	15-25	25-35	35-45	மொத்தம்
0-10	1	1	-	-	2
10-20	3	6	5	1	15
20-30	1	8	9	2	20
30-40	-	3	9	3	15
40-50	-	-	4	4	8
மொத்தம்	5	18	27	10	60

44. பின்வரும் விவரத்திற்கு ஒட்டுறவு கெழு காண்க.

விளம்பரச் செலவு ('000)

விற்பனை வருவாய் (ரூ.'000)	5-15	15-25	25-35	35-45	மொத்தம்
75-125	4	1	-	-	5
125-175	7	6	2	1	16
175-225	1	3	4	2	10
225-275	1	1	3	4	9
மொத்தம்	13	11	9	7	40

45. பின்வரும் அட்டவணை மாணவர்களின் வேறுபட்ட உயரம் மற்றும் எடை விவரங்களைத் தருகிறது. உயரம் மற்றும் எடைக்கிடையில் ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதாக நீ காண்கிறாயா?

எடை (கிலோ கிராம்)

உயரம் செ.மீ	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80	மொத்தம்
150-155	1	3	7	5	2	18
155-160	2	4	10	7	4	27
160-165	1	5	12	10	7	35
165-170	-	3	8	6	3	20
மொத்தம்	4	15	37	28	16	100

தரவிலக்கம்

46. ஒரு அழகுப் போட்டியில் 8 போட்டியாளர்களுக்கு இரு நீதிபதிகள் கொடுத்ததரங்கள் பின்வருமாறு இவர்களின் தீர்ப்புகளுக்கிடையிலான தொடர்பினை ஆராய்க.

நீதிபதி A	4	5	1	2	3	6	7	8
நீதிபதி B	8	6	2	3	1	4	5	7

47. பின்வரும் விவரத்தில் இருந்து தரவிலக்க கெழு காண்க.

X	36	56	20	65	42	33	44	50	15	60
Y	50	35	70	25	58	75	60	45	80	38

48. பின்வரும் விவரத்திற்கு ஸ்பியர்மெனின் தரவிலக்க கெழு காண்க.

X	53	98	95	81	75	71	59	55
Y	47	25	32	37	30	40	39	45

49. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள x, y மதிப்புகளுக்கு ஸ்பியர்மேனின் தர வேறுபாடு முறையைப் பயன்படுத்தி ஒட்டுறவு கெழு காண்க.

X	22	28	31	23	29	31	27	22	31	18
Y	18	25	25	37	31	35	31	29	18	20

50. தர வரிசை ஒட்டுறவுக்கெழு காண்க.

முதல் தேர்வு மதிப்பெண்கள்	70	68	67	55	60	60	75	63	60	72
II ஆவது தேர்வு மதிப்பெண்கள்	65	65	80	60	68	58	75	62	60	70

51.மாணவர்கள் இரு பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கிடையிலான ஸ்பியர்மெனின் தர வரிசை ஒட்டுறவுக்கெழு காண்க.

முதல் பாடம்	80	64	54	49	48	35	32	29	20	18	15	10
இரண்டாம பாடம்	36	38	39	41	27	43	45	52	51	42	40	52

IV. செய்து பார்க்க

52. உன் வகுப்பில் உள்ள ஏதேனும் 10 மாணவர்கள் எடை மற்றும் உயரம் ஆகியவற்றை காண்க. இவற்றிற்கிடையில் ஒட்டுறவு உள்ளதா எனக் காண்க

விடைகள்:

I.

1. (அ) 2. (ஈ) 3. (ஆ) 4.(ஆ) 5. (அ)

6. (இ) 7. (அ) 8. (ஆ) 9. (இ) 10. (ஆ)

II.

11. அலகுகள் 12. சிதறல் விளக்கப்படம் 13. பலசார்

14. பியர்ஸன் 15. முழுமையான நேர் 16. சமச்சீர்

17. தர அடிப்படையில் 18. ஒட்டுறவு இல்லை

III.

30. $r = 0.9574$ 31. $r = 0.85$ 32. $\sigma_y = 6.25$

33. n = 10 34. $r = +0.58$ 35. $r = +0.98$

36. $r = -0.96$ 37. $r = +0.68$ 38. $r = -0.92$

39. $r = +0.64$ 40. $r = +0.1$ 41. $r = +0.98$

42. $r = +0.746$ 43. $r = +0.533$ 44. $r = +0.596$

45. $r = +0.0945$ 46. $r = +0.62$ 47. $r = -0.93$

48. $r = -0.905$ 49. $r = 0.34$ 50. $r = 0.679$

51. $r = 0.685$

9. உடன் தொடர்புப் போக்கு

9.1 அறிமுகம்:

இரு மாறிகளுக்கிடையே தொடர்பு உள்ளது என அறிந்த பின்னர், ஒரு மாறியின் மதிப்பு தெரியும் பொழுது மற்றொரு தெரியாத மாறியின் மதிப்பை முன்மதிப்பீடு செய்ய நாம் விரும்பலாம். இவ்வாறு மதிப்பீடு செய்யக்கூடிய மாறி சார்புடைய மாறி அல்லது விளக்கப்படுகிற மாறி எனவும் மற்றும் தெரிந்த மாறியை சார்பற்ற மாறி என்கிறோம். மதிப்பீடு செய்வதற்கு அடிப்படை, புள்ளியியல் இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சராசரி தொடர்பைக் குறிப்பதே உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வாகும். சமன்பாட்டை உடன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு அல்லது விளக்குகின்ற சமன்பாடு என அழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, விளம்பரத்திற்கும் விற்பனைக்கும் ஒட்டுறவு உள்ளது என அறிவோமானால், செலவிடப்பட்ட விளம்பரத்திற்கு எதிர்பார்க்கப்படும் விற்பனையை அறியலாம் அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட விற்பனை இலக்கினை அடைய செலவிடப்பட வேண்டிய விளம்பரச் செலவு எவ்வளவு என அறியலாம். அதே போல விளைச்சலின் அளவு மழையின் தன்மையோடு தொடர்புடையது. எவ்வளவு மழை பெய்தால் ஒரு குறிப்பிட்ட விளைச்சல் கிடைக்கும் என்பதையும், ஒரு குறிப்பிட்ட விளைச்சல் காண்பதற்கு எவ்வளவு மழை அவசியம் என்பதையும் முன்கூட்டியே கணக்கிட உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு மிக்க உதவி புரிகின்றது. தொடர்புடைய இரு மாறிகளானது, மழையின் அளவு மற்றும் விவசாய உற்பத்தி, உற்பத்திக்கான விலை மற்றும் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருளின் பொதுவான விலை, நுகர்வோரின் வருமானம் மற்றும் செலவீனம் எனக் கொள்ளலாம். ஆகவே, உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வு தெரியப்படுத்துவது, இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சராசரி தொடர்பு மற்றும் இதன் மூலம் மதிப்பீடு அல்லது எதிர்பார்க்கும் மதிப்பைப் பெறலாம்.

9.1.1 வரையறை:

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கு இடையே ஆன சராசரி தொடர்பினை, விவரங்களின் மூல அலகுகளை கொண்டு அளவிடப்படுவது உடன் தொடர்புப் போக்காகும்.

9.2 உடன் தொடர்புப் போக்கின் வகைகள்:

உடன் தொடர்புப் போக்கின் ஆய்வு பாகுபடுத்தப்படுவது

(அ) எளிய மற்றும் மடங்கு

(ஆ) நேர்க்கோடு மற்றும் நேர்கோடற்ற

(இ) மொத்தம் மற்றும் பகுதி.

(அ) எளிய மற்றும் மடங்கு:

இரு மாறிகள் எளிய தொடர்பினைக் கொண்டுள்ளது எனக் கொண்டால், எடுத்துக்காட்டாக விளம்பரச் செலவீனத்தின் தாக்கம் விற்பனையை அதிகரிக்கின்றது.இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையான தொடர்பு மடங்கு தொடர்புப் போக்கில் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். இங்கு ஒரு மாறி சார்புடைய மாறி மற்ற மாறிகள் சார்பற்ற மாறிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, விற்பனையானது (y) விளம்பரச் செலவீனம் (x) மற்றும் மக்களது வருமானம் (z) ஆகியவற்றை சார்ந்துள்ளது. எனவே, தொடர்பின் சார்பானது $y=f(x,z)$ ஆகும்.

(ஆ) நேர்க்கோடு மற்றும் நேர்கோடற்ற:

நேர்கோட்டு போக்கினை அடிப்படையாகக் கொண்ட, நேர் கோட்டின் தொடர்பு சமன்பாட்டின் படி ஒன்று ஆகும். ஆனாலும் நேர்க்கோட்டுத் தொடர்பானது எளிய மற்றும் மடங்கு ஆகும். இயல்பாக நேர் கோட்டுத் தொடர்பை எடுத்துக் கொள்ளுவதால், அதனின் எளிமை மற்றும் சிறந்த மதிப்பீடு, மற்றும் எதிர்காலத்தில் இதன் போக்கினை முன்னறிவதற்கும் எளியதாக உள்ளது. நேர் கோடற்ற தொடர்பிற்கு வளைவரை போக்குக் கோடுகள் நிறுவப்படுகின்றன. இவற்றின் சமன்பாடுகள் பரவளைவு ஆகும்.

(இ) மொத்தம் மற்றும் பகுதி:

எல்லா முக்கியத்துவ மாறிகளை எடுத்தக் கொண்டு அதனின் மொத்த தொடர்புகளை எடுத்துக் கொள்வதாக கொள்வோம். இயல்பாக இவை பல்வேறான தொடர்புகளை பெற்றிருக்கும் ஏனெனில் பெரும்பாலான பொருளாதார மற்றும் வியாபார தனிச் சிறப்பு பெற்றவைகள் பலவித இன்னல்களால் பாதிக்கப்பட்டிருக்கும். பகுதி தொடர்பால், ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளை எடுத்துக் கொண்டால், அனைத்தும் அல்லாமல், நோக்கத்தினைக் கருத்தில் கொண்டு பாதிக்கக் கூடியவைகளைத் தவிர்த்து தொடர்பினைப் பெறலாம்.

9.3 நேர்கோட்டுத் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு:

இரு மாறிகளுக்கிடையே நேர் கோட்டுத் தொடர்பு இருக்குமானால், சார்பற்ற மாறி (X) வேறுபடும் பொழுது, சார்புடைய மாறி (Y) யும் வேறுபடுகிறது. X மற்றும் Y இன் பல்வேறு மதிப்புக்களை வரைபடத்தில் குறிக்கும்பொழுது, மிகப் பொருத்தமான இரு நேர் கோடுகள் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் வழியாகச் செல்கின்றது. இவ்விருகோடுகளும் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளாகும். மேலும் இவ்விரு கோடுகளும் தொடர்புப் போக்குச் சமன் பாட்டினை அடிப்படையாகக் கொண்டவை. இச்சமன்பாடுகள் மூலம் ஒரு மாறியின் மதிப்பு தெரியும் பொழுது தெரியாத

மற்றொரு மாறியின் மதிப்பை சிறந்த மதிப்பீடாகக் காண முடியும். இவை நேர் கோட்டுச் சமன்பாடுகளாகும்.

X இன் மீதான Y இன் நேர் கோட்டுச் சமன்பாடானது

$Y = a + bX$ ……. (1)

மற்றும் Y இன் மீதான X இன் நேர் கோட்டுச் சமன்பாடானது

$X = a + bY$……..(2)

இங்கு a, b என்பன மாறிலிகளாகும்.

சமன்பாடு (1) இன் மூலம், X இன் மதிப்பு தெரியும் பொழுது Y இன் மதிப்பை மதிப்பீடு செய்யலாம்.

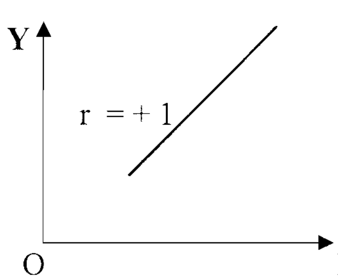
சமன்பாடு (2) இன் மூலம், Y இன் மதிப்பு தெரியும் பொழுது X இன் மதிப்பை மதிப்பீடு செய்யலாம்.

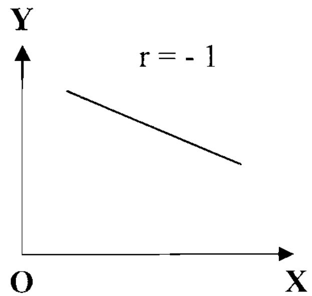
9.3.1 உடன் தொடர்பு கோடுகள்:

உடன் தொடர்பு கோடுகளின் ஆய்வில், இரு மாறிகளுக்கு இரு உடன் தெடர்புக் கோடுகள், Y இன் மீதான X ம், மற்றும் X இன் மீதான Y ம் ஆகும்.

இவ்விரு உடன் தொடர்புக் கோடுகளும் இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பினைக் குறிப்பதாகும்.

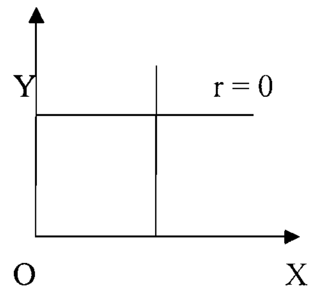
முழுமையான ஒட்டுறவில் நேரிடை அல்லது எதிரிடையாக உள்ள போது, அதாவது $r = \pm 1$ எனில் இரு கோடுகளும் ஒன்றாக இணையும். அதாவது ஒரே ஒரு நேர் கோடு மட்டுமே காணப்படும். $r = 0$ எனில் இரு மாறிகளும் சார்பற்றவையாகும், இரு கோடுகளும் ஒன்றையொன்று செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்ளும். இவ்விரு கோடுகளும் X மற்றும் Y அச்சுக்கு இணையாக அமையும்.

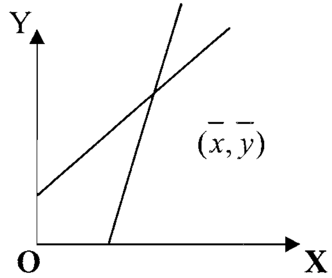




கடைசியாக X மற்றும் Y களின் கூட்டுச்சராசரிகளைக் குறிக்கும் புள்ளியில் இரு கோடுகளும் வெட்டிக் கொள்கின்றன. இவ்வெட்டுப் புள்ளியிலிருந்து X - அச்சுக்கு ஒரு நேர்கோடு வரையும் பொழுது X இன்

கூட்டுச் சராசரி கிடைக்கின்றது. இது போலவே, வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியிலிருந்து Y -அச்சுக்கு செங்குத்துக் கோடு வரையும்பொழுது Y இன் கூட்டுச் சராசரி கிடைக்கிறது.





9.3.2 மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கை:

இரு மாறிகளுக்கிடையேயான சராசரி தொடர்பினை, உடன் தொடர்பு வெளிப்படுத்துகின்றது. சிதறல் விளக்கப்படத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாறிகளின் மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளின் வழியே செல்லக் கூடிய மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடாகும். இத்தகைய உடன் தொடர்பு கோடு வரைபடம் அல்லது கணக்கியலால் தருவிக்கப்படுகின்றது. பல்வேறான முறைகளைக் காண்பதற்கு முன் "மீச்சிறு வர்க்கங்கள்" என்பதன் விளக்கத்தை அறிவோம்.

மீச்சிறு வர்க்கங்கள் வாயிலாக பொருத்தப்பட்ட ஒரு கோட்டினை, சிறந்த பொருத்தமுடைய கோடு என்கிறோம். கீழ்க்கண்ட விதிகளைக் கோடு பின் பற்றுகிறது.

i) தனித்த மதிப்புக்களுக்கும் தொடர்பு போக்கு மதிப்புக்களுக்கும் உள்ள வித்தியாச வர்க்கத்தின் கூடுதல் பூஜ்யமாகும்.

அதாவது $\sum(X - Xc)^2 = 0$ அல்லது $\sum (Y- Yc)^2 = 0$

Xc மற்றும் Yc மதிப்புகள் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வின் மூலம் கிடைக்கப் பெற்றவை.

ii) தனித்த மதிப்புக்களுக்கும் தொடர்புப் போக்கு மதிப்புக்களுக்கும் உள்ள வித்தியாசம், ஏதேனும் ஒரு மதிப்பிலிருந்து காணப்பட்ட வித்தியாசத்தை விட குறைவாகவே இருக்கும்.

அதாவது, $\sum(Y - Yc)^2 < \sum (Y - Ai)^2$

iii) சிறந்த பொருத்தமுடைய உடன் தொடர்புப் போக்கு கோடுகள், X மற்றும் Y இன் கூட்டுச் சராசரியில் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்

கொள்கின்றன. அதாவது அவை வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள் $\bar{x}, \bar{y}$ ஆகும்.

9.4 உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வின் முறைகள்:

உடன் தொடர்புப் போக்கின் பல்வேறு முறைகளை கீழ்க்கண்ட வரைபடத்தில் தரப்பட்டுள்ளது.

உடன் தொடர்பு முறைகள்

- வரைபட முறை (உடன் தொடர்பு கோடுகள் மூலம்)
- கணக்கியல் (உடன் தொடர்பு சமன்பாடுகள் மூலம்)
  - உடன் தொடர்பு சமன்பாடுகள் (இயல்நிலை சமன்பாடுகள் மூலம்)
  - உடன் தொடர்பு சமன்பாடுகள் (உடன் தொடர்பு போக்குக் கெழு மூலம்)

9.4.1 வரைபட முறை:

வரைபடத்தில் மாறிகளின் மதிப்புகளின் புள்ளிகள் குறிக்கப்படுகின்றன. இத்தகைய புள்ளிகள் சிதறல் வரைபடம் போல பரவிக் கிடக்கின்றன. இப்புள்ளிகள் ஓர் உடன் தொடர்புக் கோட்டின் மூலம் கையினாலோ அல்லது அளவீடு கொண்டோ வரையப்படுகின்றன. அவ்வாறு வரையும் போது புள்ளிகளுக்கும் கோட்டிற்கும் உள்ள செங்குத்து வித்தியாசத்தின் வர்க்கம் மிகக் குறைவாக இருத்தல் வேண்டும். வரையப்படுகின்ற உடன் தொடர்பு கோட்டிற்கு இரு புறங்களிலும் சமமான புள்ளிகள் இருக்குமாறு சிறந்த உடன் தொடர்புக் கோட்டினை வரைதல் வேண்டும்.

9.4.2 கணக்கியல் முறை:

i) உடன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு இரு உடன் தொடர்பு சமன்பாடுகள் Y இன் மீதான Xஇன் சமன்பாடு $X = a + bY$ மற்றும் X இன் மீதான Y இன் சமன்பாடு; $Y = a + bX$ ஆகும். இங்கு X ,Y என்பன் மாறிகள் மற்றும் a,b என்பன மாறிலிகள், இவற்றின் மதிப்பை காணுதல் வேண்டும்.

சமன்பாடு $X = a + bY$ எனில் இதன் இயல் நிலை சமன்பாடுகள்

$$\sum X = na + b\sum Y$$

மற்றும் $\sum XY = a\sum Y + b\sum Y^2$

சமன்பாடு $Y = a + bX$, எனில் இதன் இயல் நிலை சமன்பாடுகள்

$\sum Y = na + b\sum X$

மற்றும் $\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$

இயல் நிலை சமன்பாடுகளின் வாயிலாக a மற்றும் b மதிப்புக்கள் காணப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 1:

X:	6	2	10	4	8
Y:	9	11	5	8	7

தீர்வு:

X	Y	X^2	Y^2	XY
6	9	36	81	54
2	11	4	121	22
10	5	100	25	50
4	8	16	64	32
8	7	64	49	56
30	40	220	340	214

X இன் மீதான Y இன் சமன்பாடு $Y = a + bX$ மற்றும் இதன் இயல் நிலை சமன்பாடுகளாவன

$$\sum Y = na + b\sum X$$
$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$$

மதிப்புக்களை பிரதியிட நமக்குக் கிடைப்பது

$40 = 5a + 30b$ ……… (1)

$214 = 30a + 220b$ ……... (2)

சமன்பாடு (1) ஐ 6 ஆல் பெருக்கும் பொழுது

$240 = 30a + 180b$……. (3)

(2) – (3) $-26 = 40b$

அல்லது $b = -\dfrac{26}{40} = -0.65$

தற்பொழுது b இன் மதிப்பை சமன்பாடு (1) ல் பிரிதியிட

$$40 = 5a - 19.5$$
$$5a = 59.5$$
$$a = \frac{59.5}{5} = 11.9$$

ஆகவே தேவையான X இன் மீதான Y இன் சமன்பாடானது

$$Y = 11.9 - 0.65\,X.$$

Y இன் மீதான X இன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு

$$X = a + bY$$

மற்றும் இயல் நிலைச் சமன்பாடுகளானது

$$\sum X = na + b\sum Y \text{ மற்றும்}$$
$$\sum XY = a\sum Y + b\sum Y^2$$

மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து பொருத்தமான மதிப்புக்களை பிரதியிட, நமக்குக் கிடைப்பது

$$30 = 5a + 40b \;\ldots.\; (3)$$
$$214 = 40a + 340b \;\ldots.\; (4)$$

$(3)^{வது}$ சமன்பாட்டை 8 ஆல் பெருக்கிட

$$240 = 40a + 320\,b \;\ldots.\; (5)$$

(4) - (5) கொடுப்பது

$$-26 = 20b$$
$$b = -\frac{26}{20} = -1.3$$

$b = -1.3$ என சமன்பாடு (3) இல் பிரதியிட, கிடைப்பது

$$30 = 5a - 52$$
$$5a = 82$$
$$a = \frac{82}{5} = 16.4$$

ஆகவே, Y இன் மீதான X இன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு

$X = 16.4 - 1.3Y$

(ii) உடன் தொடர்புப் போக்கு கெழுக்கள்:

X இன் மீதான Y இன் சமன்பாடு $y_e = \bar{y} + r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$

இங்கு X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்பு போக்கு கெழு

$$b_1 = b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$
$$y_e = \bar{y} + b_1(x - \bar{x})$$

Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு

$$X_e = \bar{x} + r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$$

இங்கு X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_2 = b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$
$$X_e = \bar{X} + b_2(y - \bar{y})$$

விலக்கங்கள் X மற்றும் Y மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரியைக் கொண்டு எடுக்கும் பொழுது

$$b_1 = b_{yx} = \frac{\sum(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sum(X-\bar{X})^2} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} \text{ மற்றும்}$$

$$b_2 = b_{xy} = \frac{\sum(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sum(Y-\bar{Y})^2} = \frac{\sum xy}{\sum y^2}$$

இங்கு $x = X - \bar{X}, y = Y - \bar{Y}$

விலக்கங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஏதேனும் ஒரு மதிப்பிலிருந்து எடுக்கப்படும்பொழுது (சுருக்கு முறை)

$$b_1 = b_{yx} = \frac{n\sum uv - \sum u \sum v}{n\sum u^2 - \left(\sum u\right)^2}$$

$$b_2 = b_{xy} = \frac{n\sum uv - \sum u \sum v}{n\sum v^2 - \left(\sum v\right)^2}$$

இங்கு $u = x - A : v = Y - B$; $A = X$ இல் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு

$B = Y$ இல் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு

$$40 = 5a - 19.5$$
$$5a = 59.5$$
$$a = \frac{59.5}{5} = 11.9$$

ஆகவே தேவையான X இன் மீதான Y இன் சமன்பாடானது

$$Y = 11.9 - 0.65 X.$$

Y இன் மீதான X இன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு

$$X = a + bY$$

மற்றும் இயல் நிலைச் சமன்பாடுகளானது

$$\sum X = na + b\sum Y \text{ மற்றும்}$$
$$\sum XY = a\sum Y + b\sum Y^2$$

மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து பொருத்தமான மதிப்புக்களை பிரதியிட, நமக்குக் கிடைப்பது

$$30 = 5a + 40b \;\ldots.\; (3)$$
$$214 = 40a + 340b \;\ldots.\; (4)$$

(3)$^{வது}$ சமன்பாட்டை 8 ஆல் பெருக்கிட

$$240 = 40a + 320\, b \;\ldots.\; (5)$$

(4) - (5) கொடுப்பது

$$-26 = 20b$$
$$b = -\frac{26}{20} = -1.3$$

$b = -1.3$ என சமன்பாடு (3) இல் பிரதியிட, கிடைப்பது

$$30 = 5a - 52$$
$$5a = 82$$
$$a = \frac{82}{5} = 16.4$$

ஆகவே, Y இன் மீதான X இன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு

$X = 16.4 - 1.3Y$

(ii) உடன் தொடர்புப் போக்கு கெழுக்கள்:

X இன் மீதான Y இன் சமன்பாடு $y_e = \bar{y} + r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$

இங்கு X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்பு போக்கு கெழு

$$b_1 = b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$
$$y_e = \bar{y} + b_1(x - \bar{x})$$

Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு

$$X_e = \bar{x} + r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$$

இங்கு X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_2 = b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$
$$X_e = \overline{X} + b_2(y - \overline{y})$$

விலக்கங்கள் X மற்றும் Y மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரியைக் கொண்டு எடுக்கும் பொழுது

$$b_1 = b_{yx} = \frac{\sum (X - \overline{X})(Y - \overline{Y})}{\sum (X - \overline{X})^2} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} \quad \text{மற்றும்}$$

$$b_2 = b_{xy} = \frac{\sum (X - \overline{X})(Y - \overline{Y})}{\sum (Y - \overline{Y})^2} = \frac{\sum xy}{\sum y^2}$$

இங்கு $x = X - \overline{X}, y = Y - \overline{Y}$

விலக்கங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஏதேனும் ஒரு மதிப்பிலிருந்து எடுக்கப்படும்பொழுது (சுருக்கு முறை)

$$b_1 = b_{yx} = \frac{n\sum uv - \sum u \sum v}{n\sum u^2 - \left(\sum u\right)^2}$$

$$b_2 = b_{xy} = \frac{n\sum uv - \sum u \sum v}{n\sum v^2 - \left(\sum v\right)^2}$$

இங்கு $u = x - A : v = Y - B; A = X$ இல் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு

$B = Y$ இல் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு

9.5 உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களின் பண்புகள்:

1. இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களும் ஒரே மாதிரியான குறியைக் கொண்டிருக்க வேண்டும். அதாவது அவை நேரிடை அல்லது எதிரிடையாக இருக்கலாம்.
2. ஒட்டுறவுக் கெழுவானது உடன் தொடர்புக் கெழுக்களின் பெருக்கல் சராசரியாகும், அதாவது $r = \pm\sqrt{b_1 b_2}$
3. ஒட்டுறவுக் கெழுவின் குறியானது உடன் தொடர்பு கெழுக்களின் குறியையே கொண்டிருக்கும்.
4. ஓர் உடன் தொடர்புக் கெழு ஒன்றுக்கு மேற்பட்டால் மற்றொன்று ஒன்றை விடச் சிறியதாக இருக்கும்.
5. உடன்தொடர்பு கெழுக்கள் ஆதிமாற்றத்தால் பாதிக்கப்படுவதில்லை ஆனால் அலகு மாற்றத்தால் பாதிக்கப்படும்.
6. உடன் தொடர்புக் கெழுக்களின் கூட்டுச் சராசரி ஒட்டுறவுக் கெழுவைவிடப் பெரியதாகும். அதாவது $\dfrac{b_1 + b_2}{2} \geq r$.
7. r=0 எனில், மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு இல்லை, உடன் தொடர்புப் போக்கு கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும்.
8. $r = \pm 1$ எனில், இரு உடன் தொடர்புக் கோடுகளும் ஒன்றோடு ஒன்று இணையும் அல்லது இணை கோடுகளாக இருக்கும்.
9. இரு உடன் தொடர்புக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணமானது $\theta = \tan^{-1}\left[\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right]$

   இங்கு m_1 மற்றும் m_2 என்பன முறையேY இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புக் கோடு மற்றும் X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புக் கோடு ஆகியவற்றின் சாய்வுகள் ஆகும்.
10. இரு உடன் தொடர்புக் கோட்டிற்கும் இடையே உள்ள கோணமானது, இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சார்புடைமையின் அளவைக் காட்டுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2:

இரு உடன் தொடர்புப் போக்கு கெழுக்கள் $b_1 = \dfrac{4}{5}$ மற்றும் $b_2 = \dfrac{9}{20}$ எனில் r இன் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு:

ஒட்டுறவுக் கெழு, $r = \pm\sqrt{b_1 b_2}$

$$= \sqrt{\frac{4}{5} \text{x} \frac{9}{20}}$$

$$= \sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{6}{10} = 0.6$$

எடுத்துக்காட்டு 3:

$\mathbf{b_1} = \dfrac{15}{8}$ மற்றும் $\mathbf{b_2} = \dfrac{3}{5}$, எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது r இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$r = \pm\sqrt{b_1 b_2}$$

$$= \sqrt{\frac{15}{8} \text{x} \frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{9}{8}} = 1.06$$

இவ்வாறு இருக்க முடியாது, ஏனெனில் r இன் மதிப்பு ஒன்றுக்கு மேல் உள்ளது. ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகள் தவறானவை.

9.6 இரு உடன் தொடர்பு சமன் பாடுகள் இருப்பதற்கான காரணம்:

X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$\left.\begin{aligned} Y_e &= \overline{Y} + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \overline{X}) \\ &\text{அல்லது} \\ Y_e &= \overline{Y} + b_1(X - \overline{X}) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$\left.\begin{aligned} X_e &= \overline{X} + r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \overline{Y}) \\ &\text{அல்லது} \\ X_e &= \overline{X} + b_2(Y - \overline{Y}) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

இவ்விரு உடன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடுகளும் வெவ்வேறான இரு கோடுகளை தெரிவு செய்கின்றன. அதாவது, சமன்பாடு (1) என்பது X இன்

சார்பு, இதனை $Y_e = f(X)$ என எழுதலாம் மற்றும் சமன்பாடு (2) Y இன் சார்பு, இதனை $X_e = f(Y)$ என எழுதலாம்.

X மற்றும் Y மாறிகள் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றிக் கொள்ளத் தக்கதல்ல, ஏனெனில் இதன் முதன்மையான வெளிப்படையான உண்மை சமன்பாடு (1) இல் Y சார்புடைய மாறியாகவும் X சார்பற்ற மாறியாகவும் உள்ளது. அதனால் தான் கொடுக்கப்பட்ட X இன் மதிப்புகளுக்கு Y க்கான மதிப்பீடு Ye சமன்பாடு (1) இன் மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது. இது போலவே X க்கான மதிப்பீடு Xe, கொடுக்கப்பட்ட Y மதிப்புகளுக்கு சமன்பாடு (2) இன் மூலம் காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 4:

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு இரு உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளைக் கணக்கிடவும்

X	1	2	3	4	5
Y	2	3	5	4	6

$x = 2.5$ எனில், Y இன் மதிப்பு என்னவாக இருக்கும்?

தீர்வு:

X	Y	$x = X - \overline{X}$	$y = Y - \overline{Y}$	x^2	y^2	xy
1	2	-2	-2	4	4	4
2	3	-1	-1	1	1	-1
3	5	0	1	0	1	0
4	4	1	0	1	0	0
5	6	2	2	4	4	4
15	20	20		10	10	9

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{20}{5} = 4$$

X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{yx} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{9}{10} = 0.9$$

ஆகவே X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புச் சமன்பாடு

$$Y = \overline{Y} + b_{yx}(X - \overline{X})$$
$$= 4 + 0.9\ (X - 3)$$
$$= 4 + 0.9X - 2.7$$
$$= 1.3 + 0.9X$$

$X = 2.5$ எனில்

$$Y = 1.3 + 0.9 \times 2.5$$
$$= 3.55$$

Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{xy} = \frac{\sum xy}{\sum y^2} = \frac{9}{10} = 0.9$$

ஆகவே Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புச் சமன்பாடு

$$X = \overline{X} + b_{xy}(Y - \overline{Y}) = 3 + 0.9\,(Y - 4)$$
$$= 3 + 0.9Y - 3.6 = 0.9Y - 0.6$$

சுருக்கு முறை:

எடுத்துக்காட்டு 5:

கொடுக்கப்பட்ட கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளைக் காண்க.

X	45	42	44	43	41	45	43	40
Y.	40	38	36	35	38	39	37	41

தீர்வு:

X	Y	u = X-A	u^2	v = Y-B	V^2	uv
46	40	3	9	2	4	6
42	38 **B**	-1	1	0	0	0
44	36	1	1	-2	4	-2
A 43	35	0	0	-3	9	0
41	38	-2	4	0	0	0
45	39	2	4	1	1	2
43	37	0	0	-1	1	0
40	41	-3	9	3	9	-9
		0	28	0	28	-3

$$\overline{X} = A + \frac{\sum u}{n}$$

$$= 43 + \frac{0}{8} \quad = 43$$

$$\overline{Y} = B + \frac{\sum u}{n}$$

$$= 38 + \frac{0}{8} \quad = 38$$

X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_1 = b_{yx} = \frac{n\sum uv - \sum u \sum v}{n\sum u^2 - \left(\sum u\right)^2}$$

$$= \frac{8(-3)-(0)(0)}{8(28)-(0)^2} \quad = \frac{-24}{224} \quad = -0.11$$

Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_2 = b_{xy} = \frac{n\sum uv - \sum u \sum v}{n\sum v^2 - \left(\sum v\right)^2}$$

$$= \frac{8(-3)-(0)(0)}{8(28)-(0)^2}$$

$$= \frac{-24}{224} \quad = -0.11$$

ஆகவே X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$Y_e = \overline{Y} + b_1(X - \overline{X})$$

$= 38 - 0.11$ (X-43)

$= 38 - 0.11X + 4.73$

$= 42.73 - 0.11X$

Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$X_e = \overline{X} + b_2(Y - \overline{Y})$$

$= 43 - 0.11$ (X-38)

$= 43 - 0.11X + 4.18 \quad = 47.18 - 0.11X$

எடுத்துக்காட்டு 6:

ஓர் ஒட்டுறவு பற்றிய ஆய்வில் கீழ்க்கண்ட மதிப்புக்கள் கிடைக்கப் பெற்றன.

	X	Y
கூட்டுச் சராசரி	65	67
திட்ட விலக்கம்	2.5	3.5

ஒட்டுறவு கெழு, r = 0.8

மேற்க் கண்ட மதிப்புகளுக்குத் தொடர்புடைய இரு உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டவை

$$\overline{X} = 65,\ \overline{Y} = 67,\ \sigma_x = 2.5,\ \sigma_y = 3.5,\ r = 0.8$$

X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{yx} = b_1 = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$= 0.8 \times \frac{3.5}{2.5} = 1.12$$

Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு

$$b_{xy} = b_2 = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

$$= 0.8 \times \frac{2.5}{3.5} = 0.57$$

ஆகவே X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$Y_e = \overline{Y} + b_1(X - \overline{X})$$

$= 67 + 1.12$ (X-65)

$= 67 + 1.12X - 72.8$

$= 1.12X - 5.8$

Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$X_e = \overline{X} + b_2(Y - \overline{Y})$$

$= 65 + 0.57$ (Y-67)

$= 65 + 0.57Y - 38.19 = 26.81 + 0.57Y$

குறிப்பு:

இரு உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அவற்றில் எந்த சமன்பாடு X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு மற்றும் எது Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு எனக் குறிப்பிடப்படவில்லை. இதனை அறிந்து கொள்ள, எப்பொழுதும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டில் முதல் சமன்பாட்டை X இன் மீதான Y இன் சமன்பாடு எனக் கொண்டு உடன் தொடர்புப் போக்கு கெழுக்கள் $b_{yx} = b_1$ மற்றும் $b_{xy} = b_2$ கண்டு பிடிக்கவும். இவைகள் இரண்டும் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களின் பண்புகளை நிறைவு செய்வதாக இருந்தால், நாம் ஊகித்தது சரியாகும். இல்லையெனில் சமன்பாடுகளை மாற்றி ஊகித்து கொள்ளவும்.

எடுத்துக்காட்டு 7:

$8X - 10Y + 66 = 0$ மற்றும் $40X - 18Y = 214$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு:

X இன் மீதான Y இன் சமன்பாட்டை $8X- 10Y + 66 = 0$ என ஊகித்துக் கொள்ளவும்.

$$-10Y = -66-8X$$
$$10Y = 66 + 8X$$
$$Y = \frac{66}{10}+\frac{8X}{10}$$

X உடன் வந்துள்ள எண் b_{yx} ஆகும்.

அதாவது $b_{yx} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Y இன் மீதான X இன் சமன்பாடு

$$40X-18Y=214$$

X ஐ இடப்புறம் வைத்துக் கொண்டு மற்றவைகளை வலது புறம் எழுதுக.

$$40X = 214 + 18Y$$
$$X = \frac{214}{40}+\frac{18}{40}Y$$

தற்பொழுது Y இன் கெழுவே b_{xy} ஆகும். $\therefore$ $b_{xy} = \frac{18}{40}=\frac{9}{20}$

இங்கு b_{yx} மற்றும் b_{xy} ஆகியவவை உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுவின் பண்புகளை நிறைவு செய்வதால் நாம் ஊகித்தது சரியானது.

ஒட்டுறவு கெழு, $r = \sqrt{b_{yx}\ b_{xy}}$

$$= \sqrt{\frac{4}{5}\times\frac{9}{20}}$$
$$= \sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{6}{10}$$
$$= 0.6$$

எடுத்துக்காட்டு 8:

ஒட்டுறவு கொண்டுள்ள X மற்றும் Y மாறிகளுக்கான உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள் $5X-6Y+90=0$ மற்றும் $15X-8Y-130=0$ ஒட்டுறவு கெழுவைக் கணக்கிடுக.

$5X-6Y+90 =0$ என்கிற சமன்பாட்டை Y இன் மீதான X இன் போக்குக் கோடு எனவும் மற்றதை X இன் மீதான Y இன் போக்கு கோடு எனவும் எடுத்துக் கொள்ளவும்.

இப்பொழுது $X= \frac{6}{5}Y - \frac{90}{5}$

$$b_{xy} = b_2 = \frac{6}{5}$$

$15X-8Y-130=0$ என்பதில்

$$Y= \frac{15}{8}X - \frac{130}{8}$$
$$b_{yx} = b_1 = \frac{15}{8}$$
$$r = \pm\sqrt{b_1 b_2}$$
$$=\sqrt{\frac{15}{8}\times\frac{6}{5}}$$
$$=\sqrt{2.25} = 1.5 >1$$

இங்கு இது சாத்தியமில்லை, ஆகவே நாம் ஊகித்தது தவறானதாகும். ஆகவே, முதல் சமன்பாட்டை X இன் மீதான Y இன் உடன் போக்குத்

தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு எனவும், இரண்டாவது சமன்பாட்டை Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு எனவும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

சமன்பாடு $5x - 6y + 90 = 0$, என்பதிலிருந்து

$$Y = \frac{5}{6}X - \frac{90}{6}$$

$$b_{yx} = \frac{5}{6}$$

சமன்பாடு $15x - 8y - 130 = 0$ என்பதிலிருந்து

$$X = \frac{8}{15}Y + \frac{130}{15}$$

$$b_{xy} = \frac{8}{15}$$

ஒட்டுறவு கெழு, $r = \pm\sqrt{b_1 b_2}$

$$= \sqrt{\frac{5}{6} \times \frac{8}{15}}$$

$$= \sqrt{\frac{40}{90}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$= 0.67$$

எடுத்துக்காட்டு 9:

$y = x + 5$ மற்றும் $16X = 9Y - 94$ என்பன முறையே X இன் மீதான Y இன் போக்குக் கோடு எனவும், Y இன் மீதான X இன் போக்குக் கோடு எனவும் உள்ளது. $Y = 19$ எனில் X இன் மாறுபாட்டைக் காண்க. X மற்றும் Y க்கு இடையேயான இணை மாறுபாட்டையும் காண்க.

தீர்வு:

X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புக் கோடு $Y = X+5$ இன் மூலம் நமக்குக் கிடைப்பது $b_1 = b_{yx} = 1$

Y இன் மீதான X இன் போக்குக் கோடு

$16X = 9Y-94$

அல்லது $$X = \frac{9}{16}Y - \frac{94}{16},$$

நமக்குக் கிடைப்பது

$$b_2 = b_{xy} = \frac{9}{16}$$

$$r = \pm\sqrt{b_1 b_2}$$

$$= \sqrt{1 \times \frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$1 = \frac{3}{4} \times \frac{4}{\sigma x}$ (என்பதிலிருந்து $\sigma_Y{}^2 = 16$, $\sigma_Y = 4$)

$\sigma_X = 3.$

X இன் மாறுபாடு $X = \sigma_X{}^2 = 9$

மேலும் $b_{yx} = \dfrac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x{}^2}$

$1 = \dfrac{\text{cov}(x, y)}{9}$ அல்லது cov (x,y) = 9.

எடுத்துக்காட்டு 10:

$Y = -1.5X + 7$, $X = 0.6Y + 9$ என இரு உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகள் இருக்க முடியுமா? காரணங்களைத் தருக.

தீர்வு:

X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு, $b_1 = b_{yx} = -1.5$
Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு $b_2 = b_{xy} = 0.6$
இங்கு இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களும் வெவ்வேறான குறிகளைக் கொண்டுள்ளது. இது இயல்பு நிலைக்கு மாறானது. ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகள் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளாக இருக்க இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 11 :

X மற்றும் Y க்கான உடன் தொடர்புச் சமன்பாடுகளைக் கொண்டு மதிப்பீடு செய்யும் பொழுது, கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் பெறப்பட்டன.

$\overline{X} = 90$, $\overline{Y} = 70$, $n = 10$, $\Sigma x^2 = 6360$; $\Sigma y^2 = 2860$, $\Sigma xy = 3900$. இரு உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளை தருவிக்கவும்.

தீர்வு :

இங்கு x,y என்பன கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து காணப்பட்ட விலக்கங்கள்.

$$b_1 = b_{yx} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$

$$= \frac{3900}{6360} = 0.61$$

$$b_2 = b_{xy} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}$$

$$= \frac{3900}{2860} = 1.36$$

X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$Y_e = \overline{Y} + b_1 (X - \overline{X})$$
$$= 70 + 0.61 \; (X - 90)$$
$$= 70 + 0.61X - 54.90$$
$$= 15.1 + 0.61X$$

Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

$$X_e = \overline{X} + b_2 (Y - \overline{Y}) \qquad = 90 + 1.36 \; (Y - 70)$$
$$= 90 + 1.36Y - 95.2 = 1.36Y - 5.2$$

9.7 உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வின் பயன்கள்:

1. உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வின் மூலம் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சார்பு தொடர்பினை வெளிப்படுத்தப் பயன்படுகிறது.
2. பொருளாதாரப் பகுப்பாய்வில் காரணம் மற்றும் காரிய தொடர்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு பெருமளவில் பிரச்சனைகள் அமைகின்றன. பொருளாதாரம் மற்றும் வர்த்தக ஆய்வுகளுக்கு, உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வு மிக உயர்ந்த மதிப்பு மிக்க புள்ளியியல் கருவியாகும்.
3. உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வு மூலம் கொடுக்கப்பட்ட சார்பற்ற மாறிகளின் மதிப்புகளுக்கு, சார்புடைய மதிப்புக்களை மதிப்பீடு செய்யலாம்.

4. உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுவின் மூலம், ஒட்டுறவு கெழுவையும் (r) நிர்ணயக் கெழுவையும் (r^2) கணக்கிடலாம்.
5. புள்ளியியல் ஆய்வில் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கொண்டு உற்பத்திச் சார்பு, தேவை வளைகோடு, விலைச் சார்பு, நுகர்வுச் சார்பு ஆகியவற்றை கணிக்க உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வு வெகுவாக பயன்படுகிறது.

9.8 ஒட்டுறவுக்கும் உடன் தொடர்புப் போக்குக்கும் உள்ள வேறுபாடு:

	ஒட்டுறவு	உடன் தொடர்புப் போக்கு
1.	ஒட்டுறவானது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையே உள்ள நேர் அல்லது எதிர் தொடர்பை விளக்கும்.	உடன் தொடர்புப் போக்கானது 'திரும்புதல்' எனப் பொருள்படும். இது ஒரு கணித அளவீடாகும். இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சராசரி தொடர்பைக் கணக்கிடுவதாகும்.
2.	x,y ஆகிய இரண்டும் சம வாய்ப்பு மாறிகளாகும்.	இங்கு x என்பது சம வாய்ப்பு மாறியாகவும், y என்பது நிலையான மாறியாகவும் கொள்ளப்படுகிறது. சில சமயங்களில் இரண்டுமே சமவாய்ப்பு மாறிகளாக கொள்ளப்படுகின்றன.
3.	இரு மாறிகளின் தொடர்பை விளக்குவதோடு அத்தொடர்பின் நெருக்கத்தை எண்ணிக்கை அளவில் கொடுக்குமேயன்றி தொடர்பிற்கான காரண காரியங்களை விளக்குவதில்லை.	இது இரு மாறிகளுக்கிடையே காரண காரியத் தொடர்பை விளக்கும். இது இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சார்புத் தொடர்பை விளக்குகிறது.
4.	இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை சோதனை செய்வதற்கும் சரி பார்த்தலுக்கும் உபயோகப் படுத்தப்படும். இது குறைந்த பட்ச தகவல்களைத் தான் தரும்.	இது சரிபார்ப்பதற்கு மட்டுமல்லாது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு மாறியின் மதிப்பிற்கேற்ப மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைக் கணக்கிட உதவி புரிகின்றது.
5.	ஒட்டுறவுக் கெழு ஒரு ஒப்பீட்டு அளவாகும். இதன் தொடர்பானது -1 மற்றும் +1 க்கும்	உடன் தொடர்பு கெழுவானது ஒரு தனி எண்ணாகும். இது சார்பற்ற மாறியின் மதிப்பின் மூலம்

	இடையே உள்ள வீச்செல்லையில் அமையும்.	சார்புள்ள மாறியின் மதிப்பைக் கணக்கிடப் பயன்படுகிறது.
6.	இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவு போலி ஒட்டுறவாகவும் இருக்கும்.	இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள உடன் தொடர்பில் போலி உடன் தொடர்பென்பது கிடையாது.
7.	இதனை பயன்படுத்து முறை வரையறைக்குட்பட்டது. ஏனெனில் இது மாறிகளுக்கு இடையே நேர் கோட்டுத் தொடர்பை மட்டுமே விளக்குகின்றது.	இது பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. ஏனெனில் இது நேர்கோட்டுத் தொடர்பு மட்டுமல்லாது வளை கோட்டுத் தொடர்பையும் விளக்க வல்லது.
8.	இதை மேற்கொண்டு கணக்கியல் செயல் முறைகளுக்கு பயன்படுத்த இயலாது.	இது பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. ஏனெனில் இது நேர்கோட்டுத் தொடர்பு மட்டுமல்லாது வளை கோட்டுத் தொடர்பையும் விளக்க வல்லது
9.	ஒட்டுறவுக் கெழுவானது நேரிடையாக இருந்தால் இரு மாறிகளும் நேர் தொடர்பாகவும்,எதிரிடையாக இருந்தால் இரு மாறிகளும் எதிர்தொடர்பாகவும் இருக்கும்.	உடன் தொடர்புக் கெழுவானது ஒரு மாறியின் மதிப்பு குறையும் பொழுது மற்றொரு தொடர்பு மாறியின் மதிப்பு அதிகரிப்பதை விளக்குகின்றது.

பயிற்சி - 9

I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக:

1. ஒட்டுறவுக் கெழு, $r = \underline{+}1$ எனில் இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுவின் சமன்பாடானது
   (அ) ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும்.
   (ஆ) ஒன்றுக்கொன்று இணையும்
   (இ) ஒன்றுக்கொன்று இணைகோடாக இருக்கும்
   (ஈ) இவற்றில் ஏதுமில்லை

2. ஒரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுவின் மதிப்பு ஒன்றுக்கு மேற்பட்டிருந்தால், மற்றொன்றானது
   (அ) ஒன்றுக்கு மேற்பட்டிருக்கும்
   (ஆ) ஒன்றுக்குச் சமமாக இருக்கும்
   (இ) ஒன்றுக்கும் குறைவாக இருக்கும்
   (ஈ) இவற்றில் ஏதும் இல்லை

3. உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டின் மற்றொரு பெயரானது
   (அ) முன்னறிதல் சமன்பாடு
   (ஆ) மதிப்பீட்டின் சமன்பாடு
   (இ) சராசரி தொடர்புக் கோடு
   (ஈ) மேற்கூறியவை அனைத்தும்

4. உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளானது
   (அ) (X,Y) (ஆ) $(\overline{X},\overline{Y})$
   (இ) $(0,0)$ (ஈ) $(1,1)$

5. $r = 0$ எனில், உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளானது
   (அ) ஒன்றாக இணையும்
   (ஆ) ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும்
   (இ) ஒன்றுக் கொன்று இணையாக இருக்கும்
   (ஈ) இவற்றில் ஏதுமில்லை

6. உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுவானது சார்பற்றது
   (அ) ஆதியில்
   (ஆ) அளவீட்டில்
   (இ) ஆதி மற்றும் அளவீடு இரண்டிலும்
   (ஈ) ஆதியும் இல்லை அளவும் இல்லை

7. இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்கள் b_{yx} மற்றும் b_{xy} ஆகியவற்றின் பெருக்கல் சராசரியானது
   (அ) r (ஆ) r^2 (இ) 1 (ஈ) $\sqrt{r}$

8. இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள் $3X - 4Y + 8 = 0$ மற்றும் $4X - 3Y = 1$, எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது, X மற்றும் Y இன் கூட்டுச் சராசரியானது
   (அ) $X = 4, Y = 5$ (ஆ) $X = 3, Y = 4$
   (இ) $X = 2, Y = 2$ (ஈ) $X = 4/3, Y = 5/3$

9. இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள் $X + 2Y - 5 = 0$ மற்றும் $2X + 3Y - 8 = 0$ எனில், X மற்றும் Y இன் கூட்டுச் சராசரி
   (அ) $X = -3, Y = 4$ (ஆ) $X = 2, Y = 4$
   (இ) $X = 1, Y = 2$ (ஈ) $X = -1, Y = 2$

10. $b_{yx} = -3/2$, $b_{xy} = -3/2$ எனில் ஒட்டுறவுக் கெழு, r ஆனது
   (அ) $3/2$ (ஆ) $-3/2$
   (இ) $9/4$ (ஈ) $-9/4$

II. கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக:

11. உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வு X மற்றும் Yக்கு இடையே அளவிடுவது ________
12. உடன் தொடர்புப் போக்கு பற்றி படிப்பது மாறிகளுக்கிடையே காணப்படும் ________ பற்றியது
13. உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு, ஒன்றை விட ________ இருந்தால் மற்றொன்று ________ இருக்கும்.
14. இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள் ஒன்றையொன்று மிக அதிக தொலைவில் வெட்டிக் கொள்ளுமானால், இதன் ஒட்டுறவின் அளவீடு ________ இருக்கும்
15. ஒரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு நேரிடை எனில், மற்றொன்றும் ________ இருக்கும்
16. உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுவின் குறியீடும் ஒட்டுறவுக் கெழுவின் குறியீடும் ________

III. கீழ்க்கண்டவற்றிக்கு விடை யளிக்கவும்:

17. உடன் தொடர்புப் போக்கு வரையறு மற்றம் இரு உடன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடுகளையும் எழுதுக.
18. பல்வேறான உடன் தொடர்புப் போக்குகளை விவரி.
19. மீச்சிறுவர்க்க கொள்கையை விளக்குக.
20. விளக்குக: (i) வரைபட முறை

    (ii) கணக்கியல் முறை
21. உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு என்றால் என்ன?
22. உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களின் பண்புகளை எழுதுக.
23. ஏன் இரு உடன் தொடர்புக் கோட்டு சமன்பாடுகள் உள்ளன?
24. உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வின் பயன்கள் யாவை?
25. ஒட்டுறவு மற்றும் உடன் தொடர்புப் போக்கு வேறுபடுத்திக் காட்டுக.
26. X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடு Y இன் மீதான X இன் உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடு என்பது பற்றி நீவிர் அறிவதென்ன?
27. இரு உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளை கீழ்க் கண்ட விவரங்களுக்கு காண்க

    $\Sigma X = 21, \Sigma Y = 20$

    $\Sigma X^2 = 91, \Sigma XY = 74$

    $n = 7$

28. X இன் மீதான Y இன் உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டை கீழ்க் கண்ட விவரங்களுக்கு காண்க. X = 15 எனில், Y இன் மதிப்பைக் காண்க.

X	8	11	7	10	12	5	4	6
Y	11	30	25	44	38	25	20	27

29. கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு இரு உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

X	25	22	28	26	35	20	22	40	20	18
Y	18	15	20	17	22	14	16	21	15	14

30. X இன் மாறுபாடு = 36, bxy = 0.8, r = 0.5 எனில் Y இன் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.
31. ஒட்டுறவு பற்றி படித்ததில், கீழ்க்கண்ட மதிப்புகள் கிடைக்கப்பெற்றன

	X	Y
சராசரி	68	60
திட்ட விலக்கம்	2.5	3.5

ஒட்டுறவுக் கெழு, r = 0.6 இரு உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

32. ஒட்டுறவு பற்றி படித்ததில், கீழ்க்கண்ட மதிப்புக்கள் கிடைக்கப்பெற்றன

	X	Y
சராசரி	12	15
திட்ட விலக்கம்	2	3

$r = 0.5$ இரு உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

33. X மற்றும்Y என்கிற இரு மாறிகளுக்கான ஒட்டுறவுக் கெழு, r = 0.6, X மற்றும்Y மாறிகளின் மாறுபாடு முறையே 2.25 மற்றும் 4.00, $\overline{X} = 10$, $\overline{Y} = 20$ எனில் மேற்கண்ட விவரங்களுக்கு இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளைக் காண்க.
34. கீழ்க்கண்ட உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளுக்கு X மற்றும்Y மதிப்புகளுக்கு கூட்டுச் சராசரி மற்றும் இரு உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுக்களையும் காண்க

    $8X - 10Y + 66 = 0$

    $40X - 18Y = 214$

35. $X=90, Y=70, b_{xy}=1.36$, $b_{yx}=0.61$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

(i) $Y = 50$ எனில் X இன் ஊக மதிப்பு மற்றும்

(ii) X மற்றும் Yக்கு இடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

36. கீழ்க்கண்ட விவரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன

$4X-5Y+33 = 0$ மற்றும் $20X-9Y-107 = 0$ Y இன் மாறுபாடு=4

(i) X மற்றும் Y இன் கூட்டுச் சராசரி

(ii)X இன் திட்ட விலக்கம்

(iii)X மற்றும் Y க்கு இடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழு

விடைகள்:

I. 1. (ஆ) 2. (இ) 3. (ஈ) 4. (ஆ)

5. (ஆ) 6. (அ) 7. (அ) 8. (அ)

9. (இ) 10. (ஆ)

II.

11. சார்புடைமை 12. சார்புடைமை 13. அதிகமாக, குறைவாக

14. குறைவாக 15. நேரிடை 16. ஒன்றே

III.

27. $Y = 0.498X + 1.366$ 28. $Y = 1.98X + 12.9; Y=42.6$

30. 3.75 31. $Y=2.88 + 0.84X$, $X = 42.2 + 0.43Y$

32. $Y = 6 + 0.75X$; $X = 7 + 0.33Y$

33. $Y= 0.8X + 12$, $X = 0.45Y + 1$

34. $\overline{X} = 13$, $\overline{Y} = 17$ $b_{yx} = 9/20$, $b_{xy} = 4/5$

35. (i) 62.8, (ii) 0.91

36. $\overline{X} = 13$, $\overline{Y} = 17$, S.D(X)=9, $r = 0.6$

10. குறியீட்டு எண்கள்

10.1 அறிமுகம்:

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட நிலைகளில் தொடர்புடைய மாறிகளின் பொது அளவுகளை ஒப்பிடும் புள்ளியியல் கருவியாக குறியீட்டு எண்கள் அமைகிறது. 2000 ஆம் ஆண்டில் உள்ள விலைவாசியை, 1990 வருடத்திலுள்ள விலைவாசியுடன் நாம் ஒப்பிட விரும்பினால், கோதுமை, அரிசி, காய்கறிகள், துணிகள், வீட்டு வாடகை மற்றும் பிற மாறிகளின் தொகுதியை கருத்தில் கொள்ள வேண்டும். மாற்றங்கள், சமவிகிதத்திலும், ஒரே திசையிலும் இருக்குமானால், பொதுவான விலைவாசி மாற்றத்தை கணக்கிடுவதில் எந்த ஒரு கடினமும் இல்லை. ஆனால் நடைமுறை என்னவெனில், வெவ்வேறு மாறிகள், வெவ்வேறாக, அதிலும் கூட விலைவாசி வெவ்வேறு அலகுகளில் ஏறியோ அல்லது இறங்கியோ இருக்கும். அதாவது, பால் லிட்டரிலும், அரிசி அல்லது கோதுமை கிலோகிராமிலும், வாடகை சதுர அடியிலும் குறிக்கப்படும்.

வெவ்வேறு பொருட்களின் விலை மாறுபாடு முழுவதையும் குறிப்பதற்கு நமக்கு ஒரு எண் தேவை. இவ்வெண் குறியிட்டு எண் என்று அழைக்கப்படுகிறது. குறியீட்டெண் என்பது அளவின் மாறுபாட்டை குறிக்கும் எண் ஆகும். ‘குறியீட்டெண் என்பது, காலம், புவியியலமைப்பு மற்றும் பிற காரணிகளால் இரு தொடர்புடைய மாறிகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அளக்கும் புள்ளியியல் அளவை என M.ஸ்பேஜெல் (M.Spiegel) கூறுகிறார். பொதுவாக குறியீட்டெண்கள் என்பது நேரிடையான அளவு மாற்றங்கள் காண இயலாத நிலையில், காலத்தினால் ஏற்படும மாற்றங்களை அளவிட குறியீட்டெண்கள் பயன்படுகிறது.

மேற்கண்ட வரையறையை படித்து ஆராயும்பொழுது குறியீட்டெண்கள் கீழ்க்கண்ட தெளிவான பண்புகளைப் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

1. குறியீட்டெண்கள் என்பன குறிப்பிடத் தக்க சராசரிகள்.
2. குறியீட்டெண்கள் சதவீதத்தில் குறிப்பிடப் பட வேண்டும்.
3. குறியீட்டெண்கள் அளவுகளின் மாற்றங்கள் நேரடியான அளவுகளுக்கு பொருத்தம் ஆகாது.
4. குறியீட்டெண்கள் ஒப்பிடக் கூடியது.

10.2 குறியீட்டெண்களின் பயன்கள்:

குறியீட்டு எண்கள் பொருளாதாரம் மற்றும் வணிக பகுப்பாய்விற்கு தவிர்க்க இயலாத கருவிகளாகப் பயன்படுகிறது.

1. அவை தொடர்புடைய மாறுதல்களை அளக்கக் கூடியது.
2. அவை நன்றாக ஒப்பிடக் கூடியது.
3. அவை நல்ல வழிகாட்டியாக அமைவது.
4. அவை பொருளாதார பாரமானிகளாக உள்ளன.
5. குறியீட்டு எண்கள் பொருளியலில் நாடித்துடிப்பாக விளங்குகிறது.
6. ஊதியமாற்றத்தை ஒப்பிடக் கூடியது.
7. அவை வாழ்க்கைத் தரத்தை ஒப்பிடக் கூடியன.
8. அவை குறிப்பிடத் தகுந்த சராசரிகள்.
9. கொள்கை மாற்றங்களுக்கு நல்ல வழிகாட்டியாக அமைவன.
10. பணத்தின் வாங்கும் திறனை அளக்கக் கூடியது.

10.3 குறியீட்டெண்களின் வகைகள்:

பல்வேறு வகைப்பட்ட குறியீட்டெண்கள் உள்ளன; ஆனால் சுருக்கமாக, மூன்று வகை குறியீட்டெண்களை மட்டும் நாம் எடுத்துக் கொள்வோம். அவையாவன,

(அ) விலைக் குறியீடு (ஆ) அளவுக் குறியீடு (இ) மதிப்புக் குறியீடு

(அ) விலைக் குறியீடு:

பொதுவாக, பணத்தின் மதிப்பை அளவிடுவதற்கு, விலைக் குறியீடு பயன்படுத்தப் படுகிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில், இடத்தில் பண்டங்களின் விலையை ஒரு அடிப்படைக் காலத்துடன் இவ்விலைக் குறியீடு ஒப்பிடுகிறது.

இரு வகையான விலைக் குறியீட்டெண்கள் உள்ளன. அவை மொத்த விலைக் குறியீட்டெண், சில்லரை விலைக் குறியீட்டெண் ஆகும். மொத்த விலைக் குறியீட்டெண்கள் என்பது நாட்டில் உள்ள பொதுவான விலைவாசி மாறுபாட்டை உணர்த்துகிறது; ஆனால் சில்லரை விலைக் குறியீட்டெண்கள் என்பது, பொருள்கள் வாங்கு தன்மை, வங்கி வைப்புத் தொகைகள் போன்ற பொருள்களின் சில்லரை விலைவாசி மாறுபாடுகளை சில்லரை விலைவாசிக் குறியீடு உணர்த்துகிறது.

(ஆ) அளவுக் குறியீட்டெண்:

பொருள்கள் உற்பத்தி செய்யும் அல்லது வாங்கும் அளவுகளில் உள்ள மாற்றத்தை அளவுக் குறியீட்டெண் குறிக்கிறது. பொருளாதார வெளியீட்டை அறிந்து கொள்ள இக்குறியீடு உதவுகிறது.

(இ) மதிப்புக் குறியீட்டெண்:

ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் உள்ள மொத்த மதிப்பை ஒரு அடிப்படை காலத்தின் மொத்த மதிப்புடன் ஒப்பிட மதிப்பு குறியீட்டெண் உதவுகிறது. இங்கு மொத்த மதிப்பு என்பது வாங்கப்பட்ட பண்டங்களின் விலையை பண்டங்களின் அளவால் பெருக்கக் கிடைப்பது ஆகும்.

குறியீடு: எந்த வகை குறியீட்டெண்களுக்கும் ஒப்பிடுவதற்கு இருவேறு கால இடைவெளிகள் தேவைப்படுகின்றன. அவை அடிப்படை காலம், மற்றும் நடப்புக் காலம் என அழைக்கப்படுகின்றன. ஒப்பிடுவதற்கு அடிப்படையாக எந்த காலம் பயன்படுத்தப்படுகிறதோ, அதனை அடிப்படை ஆண்டு எனவும் மற்றது நடப்பு ஆண்டு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. இங்கு பயன்படுத்தப்படும் பல்வேறு குறியீடுகள் பின்வருமாறு

P_1 = நடப்பு ஆண்டின் விலை P_0 = அடிப்படை ஆண்டு விலை

q_1 = நடப்பு ஆண்டின் அளவு q_0 = அடிப்படை ஆண்டு அளவு

P_{01}=நிகழாண்டின் விலை குறியீட்டெண் அடிப்படை ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டது

10.4 குறியீட்டெண்கள் அமைப்பதில் உள்ள சிக்கல்கள்:

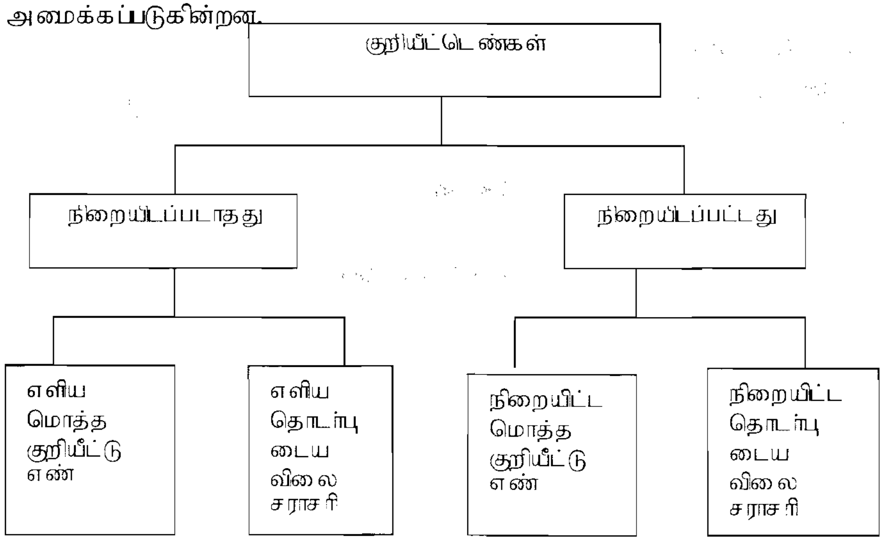
எந்த ஒரு குறியீட்டெண்ணும் எல்லாத் தேவைகளையும் நிறைவு செய்யக் கூடியதாக இல்லை. எனவே குறியீட்டெண்கள் அமைப்பதில் ஏற்படும் பலவகை சிக்கல்கள், பொருளியல் நிபுணர் அல்லது புள்ளியியல் நிபுணரால் தீர்க்கப்படுகின்றன.

அச்சிக்கல்களாவன,

1. குறியீட்டெண்களின் நோக்கம். 2. அடிப்படையாண்டின் தேர்வு.
3. உருப்படிகளின் தேர்வு 4. மூல விவரங்களின் தேர்வு.
5. விவரங்கள் சேகரித்தல் 6. சராசரியின் தேர்வு.
7. நிறையிடும் முறைகள்.

10.5 குறியீட்டெண்கள் அமைக்கும் முறை:

குறியீட்டெண்கள் கீழ்க்கண்டவாறு பல்வேறு முறைகளில் அமைக்கப்படுகின்றன.



105.1 எளிய மொத்த குறியீட்டெண்:

இது குறியீட்டெண்கள் அமைப்பதில் உள்ள மிக எளிய முறையாகும். நடப்பு ஆண்டில் உள்ள பல்வேறு பண்டங்களின் விலை கூட்டப்பட்டு, அக்கூடுதலை அடிப்படையாண்டில் அப்பொருள்களின் விலைக் கூடுதலால் வகுத்து அதை 100 ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

குறியீட்டு முறையில் = $P_{01} = \dfrac{\sum p_1}{\sum p_0} \times 100$

இங்கு, Σp_1 = நடப்பு ஆண்டு விலைக் கூடுதல்

Σp_0 = அடிப்படை ஆண்டு விலைக் கூடுதல்

எடுத்துக்காட்டு 1:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு எளிய மொத்த குறியீட்டெண் முறையில் குறியீட்டெண் கணக்கிடுக.

பண்டங்கள்	விலை / அலகு (ரூபாயில்)	
	2000	2004
A	80	95
B	50	60
C	90	100
D	30	45

தீர்வு:

பண்டங்கள்	விலை / அலகு (ரூபாயில்)	
	2000 (P_0)	2004 (P_1)
A	80	95
B	50	60
C	90	100
D	30	45
மொத்தம்	250	300

எளிய மொத்த விலை குறியீட்டெண் = $\dfrac{\sum p_1}{\sum p_0} \times 100$

$= \dfrac{300}{250} \times 100 = 120$

10.5.2 **எளிய விலைச் சார்பிகளின் சராசரி குறியீட்டெண்:**

இம்முறையில், பல்வேறு பண்டங்களின் தொடர்புடைய விலைச் சார்பிகளைக் கணக்கிட வேண்டும். அச்சார்பிகளின் சராசரியை கூட்டு சராசரி முறையிலோ, பெருக்கு சராசரி முறையிலோ கணக்கிடலாம். விலை சராசரி தொடர்பு காண கூட்டு சராசரி முறை பயன்படுத்தும் பொழுது, குறியீட்டெண் கணக்கிட உதவும் சூத்திரம்,

எளிய விலைத் தொடர்புடைய சராசரி (கூட்டு சராசரிமுறையில்)

$$P_{01} = \frac{\Sigma\left(\frac{p_1}{p_0}\times 100\right)}{n}$$

P_1 = நடப்பு ஆண்டு விலைகள்

P_0 = அடிப்படை ஆண்டு விலைகள்

n = பண்டங்களின் எண்ணிக்கை

பெருக்கு சராசரிமுறையில் சராசரி விலைத் தொடர்பு குறியீட்டெண் காண உதவும் சூத்திரம்,

எளிய விலை சராசரிதொடர்புடைய குறியீட்டெண்

$$P_{01} = \text{எதிர்மடக்கை}\left(\frac{\Sigma\ \log(\frac{p_1}{p_0}\times 100)}{n}\right)$$

இங்கு,

$$P = \frac{p_1}{p_0}\times 100$$

$$P_{01} = \text{எதிர்மடக்கை}\left(\frac{\Sigma \log P}{n}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

பின்வரும் விவரத்தில் இருந்து 1997ஐ அடிப்படை ஆண்டாகக் கொண்டு 1998 ற்கான சராசரி விலைத் தொடர்பு குறியீட்டெண்னைண (அ) கூட்டு சராசரிமுறையில் (ஆ) பெருக்கு சராசரிமுறையில் காணவும்.

பண்டங்கள்	1997 இல் விலை	1998 இல் விலை
A	50	70
B	40	60
C	80	100
D	20	30

தீர்வு:

(அ) எளிய விலைச் சார்பி குறியீட்டெண் (கூட்டு சராசரி முறையில்)

பண்டங்கள்	1997 -ல் விலை (P_0)	1998 -ல் விலை (P_1)	$P = \frac{p_1}{p_0}\times 100$
A	50	70	140
B	40	60	150
C	80	100	125
D	20	30	150
		மொத்தம்	565

எளிய விலை தொடர்பு சராசரி குறியீட்டு எண்

$$P_{01} = \frac{\Sigma\left(\frac{p_1}{p_0}\times 100\right)}{n} = \frac{\sum P}{n}$$

$$= \frac{565}{4} = 141.25\%$$

(ஆ) எளிய விலைச் சார்பி குறியீட்டெண் (பெருக்கு சராசரிமுறையில்)

பண்டங்கள்	1997 ஶில் விலை (P_0)	1998 -ல் விலை (P_1)	$P = \frac{p_1}{p_0}\times 100$	log P
A	50	70	140	2.1461
B	40	60	150	2.1761
C	80	100	125	2.0969
D	20	30	150	2.1761
			மொத்தம்	8.5952

எளிய விலைத் தொடர் சராசரி குறியீட்டெண்.

$$(P_{01}) = \text{எதிர் மடக்கை } \frac{\Sigma \log P}{n}$$

$$(P_{01}) = \text{எதிர் மடக்கை } \left[\frac{8.5952}{4}\right] = \text{எதிர் மடக்கை } [2.1488] = 140.9\%$$

10.5.3 மொத்த நிறையிட்ட குறியீட்டெண்:

ஒவ்வொரு பொருளின் சரியான முக்கியத்துவத்தை உணர்த்துவதற்கு,அவற்றிற்கு சில சரியான எடைகள் கொடுக்கப்பட்டு மொத்த குறியீட்டெண் கணக்கிடப்படுகிறது. எடைகள் கொடுப்பதற்கு பல முறைகள் இருப்பதால், குறியீட்டெண்கள் அமைப்பதற்கு அதிகமான சூத்திரங்கள் உள்ளன, அவற்றில் சில முக்கியமான முறைகள்.

1. லாஸ்பியாரின் முறை
2. பாஷியின் முறை
3. பிஷரின் விழுமிய முறை
4. பௌலியின் முறை
5. மார்ஷெல், எட்ஜ்வொர்தின் முறை
6. கெல்லியின் முறை

1. லாஸ்பியாரின் முறை:

லாஸ்பியாரின் குறியீட்டெண் என்பது, நிறையிட்ட மொத்த விலைக் குறியீட்டெண் ஆகும். இங்கு எடைகள் அடிப்படையாண்டின் அளவுகளால் நிர்ணயிக்கப்பட்டு மொத்த விலைக் குறியீட்டெண் கணக்கிடப்படுகிறது. இது கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்படுகிறது.

$$\text{லாஸ்பியாரின் விலைக் குறியீட்டெண்} = P_{01}{}^{L} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

2. பாஷியின் முறை:

இம்முறையில் எடைகள் நடப்பு ஆண்டின் அளவுகளால் கொடுக்கப்பட்டு மொத்த விலைக் குறியீட்டெண் கணக்கிடப்படுகிறது, குறியீட்டெண் காண உதவும் சூத்திரமானது,

$$\text{பாஷியின் விலைக் குறியீட்டெண்} = P_{01}{}^{P} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$$

இங்கு P_0 = அடிப்படை ஆண்டு விலை P_1 = நடப்பு ஆண்டு விலை

q_0 = அடிப்படை ஆண்டு அளவு q_1 = நடப்பு ஆண்டு அளவு

3. பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் முறை:

லாஸ்பியர் மற்றும், பாஷியின் குறியீட்டெண்களின் பெருக்கல் சராசரி பிஷரின் விலைக் குறியீட்டெண் ஆகும்.

$$\text{பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்} = P_{01}{}^{F} = \sqrt{L \times P}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100$$

இது ஒரு விழுமிய குறியீட்டெண் என்று அழைக்கப்படுகிறது, ஏனெனில்

(அ) பெருக்கல் சராசரியை அடிப்படையாகக் கொண்டது.

(ஆ) இது அடிப்படையாண்டு, நடப்பு ஆண்டு இரண்டையும் அடிப்படையாகக் கொண்டது.

(இ) இது நல்ல குறியீட்டெண்களுக்கான சோதனைகளை நிறைவு செய்கிறது.

(ஈ) இது விருப்பு வெறுப்புகளற்றது.

4. பௌலியின் முறை:

லாஸ்பியர், மற்றும் பாஷி குறியீட்டெண்களின் கூட்டு சராசரி பௌலியின் விலைக் குறியீட்டெண் ஆகும்.

குறியீட்டு முறையில்,

$$\text{பௌலியின் குறியீட்டெண்} = P_{01}{}^{B} = \frac{L+P}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} + \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}\right] \times 100$$

5. மார்ஷெல் எட்ஜ்வொர்த் முறை

இம்முறையில், நடப்பு ஆண்டு மற்றும் அடிப்படையாண்டுகளின், விலைகள் மற்றும், அளவுகள் இரண்டுமே, எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன. இக்குறியீட்டெண் கணக்கிடுவதற்கான சூத்திரம்

மார்ஷெல் எட்ஜ்வொர்த் விலைக் குறியீட்டெண்

$$= P_{01}{}^{ME} = \frac{\Sigma(q_0+q_1)p_1}{\Sigma(q_0+q_1)p_0} \times 100 = \frac{\Sigma p_1 q_0 + \Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0 + \Sigma p_0 q_1} \times 100$$

6. கெல்லியின் முறை:

குறியீட்டெண்களை கணக்கிடுவதில் பின்வரும் சூத்திரத்தை கெல்லி தெரிவு செய்துள்ளார்,

$$\text{கெல்லியின் விலைக் குறியீட்டெண்} = P_{01}{}^{k} = \frac{\Sigma p_1 q}{\Sigma p_0 q} \times 100$$

$$\text{இங்கு } q = \frac{q_0 + q_1}{2}$$

அதாவது இரண்டு ஆண்டுகளின் அளவுகளின் சராசரி நிறைகளாக பயன்படுத்தப் படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு 1. லாஸ்பியர் முறை 2.பாஷியின் முறை 3.பிஷரின் முறை மூலம் விலைக் குறியீட்டெண் காண்க.

பண்டங்கள்	2000		2001	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	2	8	4	5
B	5	12	6	10
C	4	15	5	12
D	2	18	4	20

தீர்வு:

பண்டங்கள்	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
A	2	8	4	5	16	10	32	20
B	5	12	6	10	60	50	72	60
C	4	15	5	12	60	48	75	60
D	2	18	4	20	36	40	72	80
					172	148	251	220

லாஸ்பியரின் விலைக் குறியீட்டெண் $= P_{01}{}^{L} = \dfrac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$

$$= \frac{251}{172} \times 100 = 145.93\%$$

பாஷியின் விலைக் குறியீட்டெண் $= P_{01}{}^{P} = \dfrac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times 100$

$$= \frac{220}{148} \times 100$$

$$= 148.7\ \%$$

பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் $= \sqrt{L \times P}$

$$= \sqrt{(145.9) \times (148.7)}$$

$$= \sqrt{21695.33}$$

$$= 147.3\ \%$$

(அல்லது)

பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் $= \sqrt{\dfrac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \dfrac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{251}{172} \times \frac{220}{148}} \times 100$$

$$= \sqrt{(1.459) \times (1.487)} \times 100$$

$$= \sqrt{2.170} \times 100$$

$$= 1.473 \times 100$$

$$= 147.3$$

விளக்கம்: குறிப்பிட்ட பொருட்களை வாங்க அடிப்படை ஆண்டில் நூறு ரூபாய் செலவழித்திருந்தால் அதே அளவுள்ள பொருட்களை நடப்பு ஆண்டில் வாங்குவதற்கு ரூ.145.93 செலவழிக்க வேண்டும் அதாவது பொருட்களின் விலையில் 45.93% விலை மாற்றம் நடப்பு ஆண்டில் ஏற்பட்டுள்ளது என்பது லாஸ்பியர் குறியீட்டெண்ணின் பொருளாகும். இதே போல் மற்ற குறியீட்டெண் மதிப்புகளையும் விளக்கிக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4:

பின்வரும் விவரங்கட்கு

(அ) பௌலியின் விலைக் குறியீட்டு முறையில்

(ஆ) மார்ஷெல் எட்ஜ்வொர்த் விலைக் குறியீட்டு முறையில், குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுக.

பொருட்கள்	அடிப்படையாண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	அளவு	விலை	அளவு	விலை
A	10	3	8	4
B	20	15	15	20
C	2	25	3	30

தீர்வு:

பொருட்கள்	Q_0	P_0	Q_1	P_1	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
A	10	3	8	4	30	24	40	32
B	20	15	15	20	300	225	400	300
C	2	25	3	30	50	75	60	90
					380	324	500	422

(அ) பௌலியின் விலைக் குறியீட்டெண் = $\frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}+\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\right]\times 100$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{500}{380}+\frac{422}{324}\right]\times 100$$

$$= \frac{1}{2}\left[1.316 + 1.302\right]\times 100$$

$$= \frac{1}{2}\left[2.168\right]\times 100$$

$$= 1.309 \times 100 = 130.9\%$$

(ஆ) மார்ஷெல் எட்ஜ்வொர்த் விலைக் குறியீட்டெண்

$$= P_{01}^{ME} = \frac{\Sigma(q_0+q_1)p_1}{\Sigma(q_0+q_1)p_0}\times 100$$

$$= \left[\frac{500+422}{380+324}\right]\times 100 = \left[\frac{922}{704}\right]\times 100 = 131\%$$

எடுத்துக்காட்டு 5:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு பொருத்தமான விலைக் குறியீட்டெண் கணக்கிடுக.

பொருட்கள்	அளவு	விலை	
		1996	1997
A	20	2	4
B	15	5	6
C	8	3	2

தீர்வு:

இங்கு பயன்படுத்தப்படும் அளவுகள் பொதுவாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால் கெல்லியின் விலைக் குறியீட்டெண்ணைப் பயன்படுத்தலாம்.

பொருட்கள்	Q	P_0	P_1	p_0q	P_1q
A	20	2	4	40	80
B	15	5	6	75	90
C	8	3	2	24	16
			மொத்தம்	139	186

கெல்லியின் விலைக் குறியீட்டெண் = $P_{01}{}^{k} = \frac{\Sigma p_1q}{\Sigma p_0q}\times 100$

$$= \frac{\mathbf{186}}{139}\times 100 = 133.81$$

எடையிட்ட சராசரி விலைச் சார்பிகள் முறை:

ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் தனிப்பட்ட எடைகள், கொடுக்கப்படும்பொழுது, எடையிட்ட குறியீட்டெண் பின்வரும் சூத்திரத்தால் கணக்கிடப் படுகிறது.

விலைச் சார்பிகள் முறையில் எடையிட்ட சராசரி = $\frac{\Sigma pw}{\Sigma w}$

இங்கு W = பொருளின் எடை, P = குறியிட்ட விலைச் சார்பி = $\frac{p_1}{p_0}\times 100$

அடிப்படையாண்டின் மதிப்பு P_0q_0 எடையாகக் கொடுக்கப்பட்டால், அதாவது $W = P_0q_0$ எனில் விலைச் சார்பி முறையில் நிறையிட்ட கூட்டு சராசரி

$$= \frac{\Sigma\left(\frac{p_1}{p_0}\times 100\right)\times p_0q_0}{\Sigma p_0q_0} = \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times 100$$

இது லாஸ்பியரின் சூத்திரம் ஆகும். நிறைகள் $W = P_0q_1$ என்று எடுக்கப்பட்டால் விலைச் சார்பிகள் முறையில் நிறையிட்ட கூட்டு சராசரி

$$= \frac{\Sigma\left(\frac{p_1}{p_0}\times 100\right)\times p_0q_1}{\Sigma p_0q_1} = \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\times 100$$ இது பாஷியின் சூத்திரம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6:

பின்வரும் விவரங்கட்கு நிறையிட்ட விலைக் குறியீட்டெண் கணக்கிடுக.

பண்டங்கள்	விலை		நிறை
	நடப்பு ஆண்டு	அடிப்படை ஆண்டு	
A	5	4	60
B	3	2	50
C	2	1	30

தீர்வு:

பண்டங்கள்	P_1	P_0	W	$P = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	PW
A	5	4	60	125	7500
B	3	2	50	150	7500
C	2	1	30	200	6000
			140		21000

நிறையிட்ட சராசரி விலைச் சார்பு குறியீட்டெண் $= \frac{\Sigma pw}{\Sigma w}$

$$= \frac{21000}{140}$$

$$= 150\%$$

10.6 அளவுக் குறியீட்டெண்:

விலைக் குறியீட்டெண்களால் சில பொருட்களின் விலைகளை மட்டுமே ஒப்பிட இயலும். ஆனால் அளவுக் குறியீட்டெண்கள் மூலம், உற்பத்தி அளவு, வேலை வாய்ப்பு ஆகியவற்றை அளவிட இயலும். உற்பத்தி அளவிற்கான பொதுவாக அதிகம் பயன்படுத்தப்படும் அளவுக் குறியீட்டெண்களாவன.

லாஸ்பியரின் அளவு குறியீட்டெண் $= Q_{01}^{L} = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times 100$

பாஷியின் அளவு குறியீட்டெண் $= Q_{01}^{P} = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1} \times 100$

பிஷரின் அளவு குறியீட்டெண் $= Q_{01}^{F} = \sqrt{L \times P}$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}} \times 100$$

இச்சூத்திரங்கள் அளவுக் குறியீட்டெண்ணைக் குறிக்கின்றன. இதில் வெவ்வேறு பொருட்களின் அளவுகள், அவற்றின் விலையால் நிறையிடப் படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 7:

பின்வரும் விவரங்களில் இருந்து அளவுக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுக.

1. லாஸ்பியர் முறை 2. பாஷியின் முறை 3. பிஷரின் முறை

	2000		2002	
பண்டங்கள்	விலை	மொத்த மதிப்பு	விலை	மொத்த மதிப்பு
A	10	100	12	180
B	12	240	15	450
C	15	225	17	340

தீர்வு:

இங்கு அளவுகளுக்கு பதிலாக மொத்த மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. முதலில், அடிப்படையாண்டு மற்றும் நடப்பு ஆண்டுகளின் அளவுகள் கணக்கிடப்பட வேண்டும்.

அளவு $= \frac{\text{மொத்த மதிப்பு}}{\text{விலை}}$

பண்டங்கள்	p_0	q_0	P_1	q_1	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
A	10	10	12	15	100	150	120	180
B	12	20	15	30	240	360	300	450
C	15	15	17	20	225	300	255	340
					565	810	675	970

லாஸ்பியரின் அளவு குறியீட்டெண் $= Q_{01}^{L} = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times 100$

$$= \frac{810}{565} \times 100 = 143.4$$

பாஷியின் அளவு குறியீட்டெண் $= Q_{01}^{P} = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1} \times 100$

$$= \frac{970}{675} \times 100 = 143.7$$

பிஷரின் அளவு குறியீட்டெண் $= Q_{01}^{F} = \sqrt{L \times P}$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{143.4 \times 143.7} = 143.6$$

(அல்லது)

$$q_{01}^{F} = \sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{810}{565} \times \frac{970}{675}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.434 \times 1.437} \times 100$$

$$= 1.436 \times 100 \quad = 143.6$$

10.7 குறியீட்டெண்களின் பொருத்தமுடைமைக்கான சோதனைகள்:

குறியீட்டெண் அமைப்பதற்கான பல சூத்திரங்களைப் பற்றி படித்தோம். கொடுக்கப்பட்ட கணக்கிற்கு பொருத்தமான சூத்திரம் எது என்ற கேள்வி எழுகிறது. இதற்கு பல சோதனைகள் ஏற்படுத்தப்பட்டிருப்பினும் அவற்றில் முக்கியமானவை.

1. அலகு சோதனை:

இச்சோதனையின்படி குறியீட்டெண் விலை மற்றும் அளவு சார்பற்ற அலகுகளாக தெரிவு செய்யப்பட்டிருக்க வேண்டும். இச் சோதனை முறையை எளிய கூட்டல் முறைச் சோதனையைத் தவிர மற்ற அனைத்து குறியீட்டெண்களும் நிறைவு செய்கின்றன.

2. கால மாற்றுச் சோதனை:

கால மாற்றுச் சோதனை என்பது கொடுக்கப்பட்ட முறை, காலத்தின் முன்முகமாயும், பின் முகமாயும் இயங்கும் தன்மை உடையதா என்பதை அறியும் சோதனையாகும். பிஷரின் வார்த்தைகளில் "குறியீட்டெண் கணக்கீடு சூத்திரங்களில், அடிப்படையாண்டு, நடப்பு ஆண்டு என்ற இரண்டில் எதை அடிப்படையாக எடுத்தாலும், ஒப்பிடலில் அவற்றின் விகிதம் சமமாக இருக்க வேண்டும்". குறியீட்டு முறையில் பின்வரும் தொடர்பை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

$$P_{01} \times P_{10} = 1$$

இங்கு P_{01} என்பது குறியீட்டெண்ணையும் 1 என்பது நடப்பு காலத்தையும், 0 என்பது அடிப்படை ஆண்டையும் குறிக்கும். P_{10} என்ற குறியீட்டெண்ணில் 0 என்பது நடப்பு காலத்தையும் 1 என்பது அடிப்படை ஆண்டையும் குறிக்கிறது. இவற்றின் பெருக்கல் '1' ற்கு சமம் இல்லை எனில் அது கால மாற்று சோதனைக்கு உட்பட்டதல்ல. பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் காலமாற்று சோதனையை நிறைவு செய்கிறது.

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$$

$$P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}}$$

பிறகு $P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}}$

$$= \sqrt{1} = 1$$

3. காரணிமாற்று சோதனை:

பிஷரால் தெரிவு செய்யப்பட்ட மற்றொரு சோதனை காரணி மாற்று சோதனையாகும். இச்சோதனை விலைக் குறியீட்டெண் மற்றும் அளவுக் குறியீட்டெண் இவற்றின் பெருக்கல் அதற்கொத்த மதிப்பு குறியீட்டெண்ணுக்கு சமம் என்பதை நிறைவு செய்கிறது. பிஷரின் வார்த்தைகளில் அதாவது, ஒரு நல்ல விலைக் குறியீட்டெண்ணை, காலமாற்றத்தால், பொருத்தமற்ற முடிவுகளைக் கொடுக்காமல், இருக்கக்கூடிய சூத்திரம், அது போலவே விலைகள், அளவுகள் என்ற காரணிகள் மாற்றும் பொழுதும், பொருத்தமற்ற முடிவுகளைக் கொடுக்காமல் இருக்க வேண்டும். அதாவது இரு முடிவுகளின் பெருக்குத் தொகை, உண்மை மதிப்பு விகிதத்தைக் கொடுக்க வேண்டும்.

$$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

இச்சோதனை அடிப்படையில், உண்மை மதிப்பு சதவிகிதத்திற்கு, குறியீட்டெண்களின் பெருக்குத் தொகை சமம் இல்லை எனில், அவற்றில் ஒன்றிலோ, இரண்டிலுமோ பிழை உள்ளது என அறியலாம்.

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$$

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}}$$

எனவே $P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}}$

$$= \sqrt{\left(\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}\right)^2} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

$$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$, என்பதில் இருந்து காரணி மாற்று சோதனையை பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டு எண் நிறைவு செய்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் அமைக்க அது காலமாற்று, மற்றும் காரணிமாற்று சோதனைகளை நிறைவு செய்கிறதா எனக் காண்க.

	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
பொருட்கள்	அளவு	விலை	அளவு	விலை
A	12	10	15	12
B	15	7	20	5
C	5	5	8	9

தீர்வு:

பொருட்கள்	q_0	p_0	q_1	p_1	P_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
A	12	10	15	12	120	150	144	180
B	15	7	20	5	105	140	75	100
C	5	5	8	9	25	40	45	72
					250	330	264	352

பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் $P_{01}^F = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{264}{250} \times \frac{352}{330}} \times 100$$

$$= \sqrt{(1.056)\times(1.067)} \times 100$$

$$= \sqrt{1.127} \times 100$$

$$= 1.062 \times 100$$

$$= 106.2$$

காலமாற்று சோதனை:

$P_{01} \times P_{10} = 1$ எனில் காலமாற்று சோதனை நிறைவு செய்கிறது எனலாம்.

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{264}{250} \times \frac{352}{330}}$$

$$P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}} = \sqrt{\frac{330}{352} \times \frac{250}{264}}$$

இப்பொழுது $P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{264}{250} \times \frac{352}{330} \times \frac{330}{352} \times \frac{250}{264}}$

$$= \sqrt{1} = 1$$

எனவே பிஷரின் குறியீட்டெண் காலமாற்று சோதனையை நிறைவு செய்கிறது.

காரணிமாற்று சோதனை:

$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$ எனும்பொழுது காரணி மாற்று சோதனை நிறைவடைகிறது எனலாம்.

இப்பொழுது $P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$

$$= \sqrt{\frac{264}{250} \times \frac{352}{330}}$$

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{330}{250} \times \frac{352}{264}}$$

பிறகு $P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{264}{250} \times \frac{352}{330} \times \frac{330}{250} \times \frac{352}{264}}$

$$= \sqrt{\left(\frac{352}{250}\right)^2}$$

$$= \frac{352}{250}$$

$$= \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

எனவே, பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் காரணி மாற்று சோதனையை நிறைவு செய்கிறது.

10.8 நுகர்வோர் விலைக் குறியீடு:

நுகர்வோர் விலைக் குறியீடு என்பது வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண் எனவும் அழைக்கப்படும். ஒரு குறிப்பிட்ட பொருட்களின் விலை மற்றும் சேவையின் மாற்றத்தினால் ஏற்படும் விலைகளை அறியவும் நடப்புக் காலத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட வகுப்பினரின் வாங்கும் திறனை ஒரு அடிப்படைக் காலத்துடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும், இந்த குறியீட்டெண்கள் உருவாக்கப்பட்டன. வெவ்வேறு பிரிவு மக்களிடையே, வெவ்வேறு விதமாக இவ்விலைவாசி மாற்றம், ஒரு பாதிப்பை ஏற்படுத்துகிறது.பொதுவான குறியீட்டெண் இதை உணர்த்தத் தவறிவிடுகிறது.எனவே, நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண்களின் அவசியம் ஏற்படுகிறது. மனிதனுக்கு மனிதன், இடத்திற்கு இடம், பிரிவிற்கு பிரிவு, மக்களின் வாங்கும் பழக்கம் வேறுபடுகிறது. மொத்த மக்களுக்காகவும், விலைக் குறியீடு அவசியமாகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக உழைக்கும் வர்க்கம், ஏழை மக்கள், நடுத்தர வகுப்பினர், பணம் படைத்தவர்கள், இவர்கள் அனைவருக்கும், மற்றும் பெரிய நகரங்கள், நகர்ப்புறம், கிராமப்புறம், போன்ற புவியியல் பகுதிகளில் மக்களனைவரையும் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண்களின் பயன்கள்:

1. பல நாடுகளில், சம்பளத்தை நிர்ணயிக்கலாம், பஞ்சப்படியை திருத்துவதற்கும், சம்பளப் பேச்சு வார்த்தைகளுக்கு மிக்க பயனுடையதாய் அமைகிறது.
2. அரசாங்க நிலையில், இக்குறியீட்டெண்கள் சம்பளக் கொள்கை, விலைவாசிக் கொள்கை, வாடகைக் கட்டுப்பாடு, வரிவிலக்கு பொதுவான பொருளாதாரக் கொள்கைகளுக்கு பயன்படுகிறது.
3. பணத்தின் வாங்கும் திறனை அளவிடவும் உண்மை வருவாயை அளப்பதற்கும் பயன்படுகிறது.
4. ஒரு குறிப்பிட்ட பொருட்களின் விலை மற்றும் சேவை மாற்றத்தை ஆய்வு செய்யவும் குறியீட்டெண்கள் பயன்படுகின்றன.

நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண் அமைக்கும் முறை:

நுகர்வோர் விலைக்குறியீடு அமைப்பதில் இரு முறைகள் உள்ளன. அவையாவன.

1. மொத்த செலவின முறை
2. குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறை அல்லது நிறையிட்ட சார்பி முறை.

1. மொத்த செலவின முறை: இது லாஸ்பியரின் முறையை அடிப்படையாகக் கொண்டது. இது பரவலாகப் பயன் படுத்தப் படுகிறது.

அடிப்படையாண்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட பிரிவினரால் நுகரப்படும் பொருட்களின் அளவுகள், நிறைகளாகும்.

$$\text{நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண்} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

2. குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறை அல்லது நிறையிட்ட சார்பி முறை:

ஒரு சராசரி குடும்பத்தில், பல்வேறு பொருட்களுக்கு செய்யப்படும் செலவு மொத்தமும் கருத்தில் கொள்ளப்பட்டு அவற்றிற்கு எடைகள் கொடுக்கப் படுகின்றன.

$$\text{இதற்கான நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டு எண்} = \frac{\Sigma pw}{\Sigma w}$$

$$\text{இங்கு ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கு } P = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

w = அப்பொருளின் எடை, மதிப்பு நாம் முன்னர் படித்த 'எடையிட்ட விலைச் சார்பி சராசரி முறை'யும் 'குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறையும்' ஒரே முறையில் நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண்ணைக் காண்பதில் பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 9:

மொத்த செலவின முறையில் பின்வரும் விவரங்களுக்கு 1993ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு 1996 ற்காக நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண் அமைக்க.

பண்டங்கள்	வாங்கப்பட்ட அளவு	விலை	
		1993	1996
A	100	8	12
B	25	6	7
C	10	5	8
D	20	15	18

தீர்வு:

பண்டங்கள்	q_0	p_0	p_1	p_0q_0	p_1q_0
A	100	8	12	800	1200
B	25	6	7	150	175
C	10	5	8	50	80
D	20	15	18	300	360
			மொத்தம்	1300	1815

மொத்த செலவின முறையில் நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண்

$$= \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \frac{1815}{1300} \times 100 = 139.6$$

எடுத்துக்காட்டு 10:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு 1990ம் வருடத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு 1993 வருடத்திற்கான நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண்ணை 'குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறையில்' காண்க.

இனங்கள்	எடை	விலை	
		1990 (ரூ)	1993 (ரூ)
உணவு	35	150	140
வாடகை	20	75	90
உடை	10	25	30
எரிபொருள்	15	50	60
இதரவகைகள்	20	60	80

தீர்வு:

இனங்கள்	w	P_0	P_1	$P = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	pw
உணவு	35	150	140	93.33	3266.55
வாடகை	20	75	90	120.00	2400.00
உடை	10	25	30	150.00	1500.00
எரிபொருள்	15	50	60	120.00	1800.00
இதரவகைகள்	20	60	80	133.33	2666.60
	100				11633.15

குடும்ப வரவு செலவு திட்ட முறையில் நுகர்வோர் குறியீட்டெண் $= \frac{\Sigma pw}{\Sigma w}$

$$= \frac{11633.15}{100} = 116.33$$

பயிற்சி - 10

I. சரியான விடையைத் தெரிந்தெடுத்து எழுதுக:

1. குறியீட்டெண் என்பது
   (அ) தொடர்புடைய மாற்றங்களை அளப்பது
   (ஆ) ஒரு சராசரியின் சிறப்பு வகை.
   (இ) ஒரு சதவீத சார்பு
   (ஈ) இவை அனைத்தும்

2. குறியீட்டெண்களில் மிகவும் ஏற்றுக் கொள்ளக் கூடிய சராசரி முறை
   (அ) கூட்டு சராசரி
   (ஆ) பெருக்கல் சராசரி
   (இ) இசைவுச் சராசரி
   (ஈ) மேற்கண்டவற்றில் எதுவும் இல்லை
3. லாஸ்பியர் குறியீட்டெண் சூத்திரத்தில் எடைகளாக பயன்படுத்தப் படுபவை
   (அ) அடிப்படை ஆண்டு
   (ஆ) நடப்பு அண்டு
   (இ) வருடங்கள் எண்ணிக்கையின் சராசரி
   (ஈ) மேற்கண்டவற்றில் எதுவும் இல்லை
4. லாஸ்பியர் மற்றும் பாஷியின் குறியீட்டெண்களின் பெருக்கல் சராசரி
   (அ) பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்
   (ஆ) கெல்லியின் குறியீட்டெண்
   (இ) மார்ஷெல்-எட்ஜ்வொர்த் குறியீட்டெண்
   (ஈ) பௌலியின் விலைக் குறியீட்டெண்
5. வழக்கமான குறியீட்டில் காலமாற்று சோதனை நிறைவு செய்யும் நிபந்தனை.
   (அ) $P_{01} \times P_{10} = 1$
   (ஆ) $P_{10} \times P_{01} = 0$
   (இ) $P_{01} / P_{10} = 1$
   (ஈ) $P_{01} + P_{10} = 1$
6. நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண் காண மிகச்சரியான முறை
   (அ) நிறையிட்ட மொத்த செலவின் முறை
   (ஆ) குடும்ப வரவு செலவுத்திட்ட முறை
   (இ) விலைச் சார்பு முறை
   (ஈ) மேற்கண்டவற்றில் எதுவுமில்லை
7. பாஷியின் சூத்திரத்தில் நிறைகளாக பயன்படுபவை
   (அ) அடிப்படையாண்டு
   (ஆ) கொடுக்கப்பட்ட ஆண்டு
   (இ) தெரிவு செய்யப்பட்ட ஏதேனும் ஒரு ஆண்டு
   (ஈ) மேற்கண்டவற்றில் எதுவுமில்லை

II. கோடிட்ட இடத்தை பூர்த்திசெய்க:

8. __________ உருவாக்க குறியீட்டெண்கள் உதவிசெய்கிறது
9. பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் என்பது, லாஸ்பியர் மற்றும் பாஷியின் குறியீட்டெண்களின் __________

10. குறியீட்டெண்கள் ____________ குறிப்பிடப்படுகிறது
11. __________ என்பது விழுமிய குறியீட்டெண் ஆகும்
12. குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறையில், வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண் ____________

III. பின்வருவனவற்றிற்கு விடையளி:

13. குறியீட்டெண் என்றால் என்ன? அவற்றின் பயன்கள் யாவை?
14. காலமாற்று சோதனை மற்றும் காரணி மாற்று சோதனையை விவரி?
15. நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண் என்றால் என்ன? அவற்றின் பயன்கள் யாவை?
16. கீழ்க்கண்ட முறையில் விலைக் குறியீட்டெண் காண்க?

i. லாஸ்பியரின் முறை ii. பாஷியின் முறை பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்

	1990		1995	
பண்டங்கள்	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	20	15	30	20
B	15	10	20	15
C	30	20	25	10
D	10	5	12	10

17. பின்வரும் விவரத்திற்கு பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் கணக்கிடுக, மேலும் அது கால மாற்று சோதனை மற்றும் காரணி மாற்று சோதனையை நிறைவு செய்கிறதா எனக் காண்க.

	விலை		அளவு	
பண்டங்கள்	2000	2002	2000	2002
A	6	35	10	40
B	10	25	12	30
C	12	15	8	20

18. பின்வரும் விவரங்களுக்கு வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண் காண்க.

	இனங்கள்		
இனங்கள்	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு	எடை
உணவு	30	45	4
வாடகை	10	15	2
உடை	15	20	1
எரிபொருள்	20	15	3
இதரவகைகள்	25	20	2

விடைகள்:

I.

1. (ஈ) 2. (ஆ) 3. (அ) 4. (ஈ)
5. (அ) 6. (ஆ) 7. (ஆ)

II.

8. கொள்கை மாற்றங்கள் 9. பெருக்கல் சராசரி 10. சதவீதம்

11. பிஷரின் குறியீட்டெண் 12. $\frac{\Sigma pw}{\Sigma w}$

III.

16. (i) L = 110

(ii) P = 123.9

(iii) F = 116.7

17. 296

18. 118.2