வணிகக் கணிதம்

மேல்நிலை - இரண்டாம் ஆண்டு

தொகுதி-2

தீண்டாமை ஒரு பாவச்செயல்

தீண்டாமை ஒரு பெருங்குற்றம்

தீண்டாமை மனிதத்தன்மையற்ற செயல்

தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் கழகம்

கல்லூரிச் சாலை, சென்னை - 600 006.

முதற்பதிப்பு - 2005
இரண்டாம் பதிப்பு 2006

பாடல்நூல் குழு

தலைவர்

முனைவர். **ச. அந்தோணிராஜ்**
இணைப்பேராசிரியர், கணிதத்துறை
மாநிலக் கல்லூரி,
சென்னை – 5.

மேலா-வாளர்

முனைவர். **மா.ரெ. சீனிவாசன்**
இணைப்பேராசிரியர், புள்ளியியல் துறை,
சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்
சென்னை – 5.

மேலா-வாளர்கள்-நூலாசிரியர்கள்

திரு. **ந. ரமேஷ்**
தேர்வுநிலை விரிவுரையாளர்
கணிதத்துறை
அரசு ஆடவர் கலைக் கல்லூரி
நந்தனம், சென்னை – 35.

திரு. **இரா. மூர்த்தி**
தேர்வுநிலை விரிவுரையாளர்
கணிதத்துறை
மாநிலக் கல்லூரி
சென்னை – 5.

நூலாசிரியர்கள்

திரு. **வேணு. பிரகாஷ்**
புள்ளியியல் விரிவுரையாளர் (மு.நி.)
மாநிலக் கல்லூரி
சென்னை – 5.

திரு. **சு. இராமச்சந்திரன்**
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்
சிந்தாதிரிப்பேட்டை மேல்நிலைப்பள்ளி
சிந்தாதிரிப்பேட்டை, சென்னை–2.

திரு. **சங். திவே. பத்மநாபன்**
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்
இந்து மேல்நிலைப்பள்ளி
திருவல்லிக்கேணி, சென்னை–5.

திரு. **சா. இராமன்**
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்
ஜெயகோபால் கரோடியா தேசிய மேல்நிலைப் பள்ளி, கிழக்கு தாம்பரம், சென்னை–59.

திருமதி. **அமலி ராஜா**
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்
நல்ல ஆயன் மெட்ரிக். மேல்நிலைப்பள்ளி
கல்லூரிச்சாலை, சென்னை–6.

திருமதி. **மு. மாலினி**
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்
பெ.சு. மேல்நிலைப் பள்ளி (மையம்)
மைலாப்பூர், சென்னை–4.

விலை : ரூ.

பாடங்கள் தயாரிப்பு :
தமிழ்நாடு அரசுக்காக பள்ளிக் கல்வி இயக்ககம், தமிழ்நாடு

இந்நூல் 60 ஜி.எஸ்.எம். தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

முகவுரை

"எந்த ஓர் உண்மையின் மிகத் தெளிவான மற்றும் அழகான கூற்று இறுதியில் கணித வடிவத்தையே அடைய வேண்டும்" – தொரவ்.

பொருளியலுக்கான நோபல் பரிசு பெற்றவர்களில் அறுபது விழுக்காட்டிற்கும் மேற்பட்டோர் கணிதத்துவ பொருளியலில் மூலமுதலான சாதனைகள் செ–தவர்கள். அத்தகைய பொருளியல் வல்லுநர்கள் உயர் கணிதத்தை ஆழ்ந்து பயின்றதோடு அதனைப் பெருப்பொருளியல் மற்றும் கணிதப் பொருளியல் ஆகியவற்றின் உயர் ஆ–வுகளுக்கு வெற்றிகரமாகப் பயன்படுத்தினர்.

ஸ்டான்ஃபோர்டு பல்கலைக் கழக நிதித்துறைப் பேராசிரியர் முனைவர் ஸ்கோல்ஸ் என்பவரும் பொருளியல் வல்லுனர் முனைவர் மெர்டன் என்பவரும் இணைந்து 1970ஆம் ஆண்டு, காலப்போக்கில் ஏற்படும் மாற்றத்தைக் குறிக்கும் வகைக்கெழு சமன்பாட்டுச் சூத்திரம் ஒன்றைக் கண்டுபிடித்து பொருளாதாரத்திற்கென 1997ஆம் ஆண்டு நோபல் பரிசு பெற்றனர். இச்சூத்திரம் தெரிவுநிலைக் காலம், விலைகள், வட்டி வீதம் மற்றும் சந்தையில் மாறும் தன்மை என்ற நான்கு மாறிகளின் அடிப்படையில் விலையைத் தீர்மானிக்கும் வகையில் அமைந்திருந்தது. இச்சூத்திரம் நடைமுறையில் பெரிதும் பயன்பட்டதோடல்லாமல், அமெரிக்க பங்குச் சந்தையையே மாற்றமடையச் செ–தது.

பொருளியல் என்பது சில வெளிப்படை உண்மைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு தருக்க முறையைப் பயன்படுத்தி வருவிக்கப்படுவனவற்றை சார்ந்த அறிவியல் என்று கருதப்பட்டது. ஆனால் இன்று பொருளியல் முற்றிலும் உருமாறிவிட்டது. வரைபடங்கள், சமன்பாடுகள் மற்றும் புள்ளியியல் ஆகியவற்றின் ஏராளமான பயன்பாடுகள், பொருளியல் தன்மையை மாற்றிவிட்டன. சில மாறிகளில் துவங்கி படிப்படியாக மற்ற மாறிகளைப் புகுத்தி பின்னர் அவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பையும், மற்றும் பொருளாதாரக் கட்டமைப்பின் உள் அமைப்புத் தத்துவத்தை ஆராயவும் கணிதம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இவ்விதமாக புதிய பொருளியல் உண்மைகளைக் கண்டு அவற்றைப் பெருமளவில் பயன்படுத்த கணிதவழி அமைப்புகள் பயன்படுகின்றன.

ஆயுள் காப்பீடு, பங்கு வர்த்தகம் மற்றும் முதலீடு போன்றவைகளை உள்ளடக்கிய இடர்–நேர்வு மேலாண்மை கணிதவியலைச் சார்ந்துள்ளது. எதிர்காலத்தை மிகத் துல்லியமாக கணிக்க, கணிதத்தைச் சாதகமாகப் பயன்படுத்த முடியும்; ஆனாலும் துல்லியத் தன்மை நூறு விழுக்காடாக இருக்காது என்பது உண்மைதான். எனினும் ஒருவர் தன் பணத்தை எவ்வாறு முதலீடு செ–வது என்று புத்திசாலித்தனமாகவும் துல்லியமாகவும் முடிவெடுக்க கணிதம் பயன்படும். பதினேழாம் நூற்றாண்டைச் சேர்ந்த பாஸ்கல் மற்றும் ஃபெர்மாட் என்ற இரு கணித

வல்லுனர்கள் கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி எதிர்கால நிகழ்வுகளைக் கணிக்கும் முறையை உருவாக்கினர். இரு பகடைகளை குறிப்பிட்ட தடவைகள் வீசும் விளையாட்டின் பல்வேறு நிகழ்வுகளின் நிகழ்தகவுகளை அவர்கள் கணக்கிட்டனர்.

நவீன பொருளாதாரப் பிரச்சனைகளின் சிக்கல்களின் கடுமை அதிகரித்துக் கொண்டே போவதால் புதிய முறைகளை ஏற்பதற்கும் ஆரா–வதற்குமான தேவை மேன்மேலும் கூடிக்கொண்டே போகிறது. கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் அடிப்படையில் அமைந்த வழிமுறைகளைத் தக்கபடி பயன்படுத்தினால் அவை குறிப்பாக பொருளியல், வாணிபம் மற்றும் தொழில் ஆகிய துறைகளில் சுருக்கமான, ஒப்புமைத் தன்மையுடைய மற்றும் திறன்மிக்க கருவிகளாக அமையும். மேலும் இம்முறைகள் ஆ–வு செ–யப்படும் கோட்பாட்டை ஆழமாக அலசி ஆராய உதவுவதோடல்லாமல் சரியான மற்றும் பகுத்தறியும் அடிப்படையில் தீர்வுகளைப் பெறவும் வழிவகுக்கின்றன.

2005–2006 கல்வி ஆண்டு முதல் அறிமுகப்படுத்தப்படும் இப்பாடப் புத்தகம் பன்னிரெண்டாம் வகுப்பு வணிகக் கணிதத்தின் பாடத்திட்டத்திற் கிணங்க எழுதப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு பாடமும் அடிப்படைக் கருத்தில் துவங்கி படிப்படியாக கருத்துச் செறிவு பெறும் வண்ணம் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு நிலையிலும் ஏராளமான எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கருத்துருக்களையும் கலைச் சொற்களின் பொருளையும் மாணவர்கள் நன்கு கற்றுணர்ந்து மேலும் பல கணக்குகளைத் தாமாகவே எதிர்கொள்ள அவ்வெடுத்துக்காட்டுகள் உதவும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள பயிற்சி கணக்குகள் மாணவர்களுக்குப் போதுமான பயிற்சியை அளிக்கும். கணக்குகளைத் தாங்களே தீர்க்கத் தேவையான தன்னம்பிக்கையை வளர்ப்பதாக அவை அமையும். மாணவர்கள் இப்புத்தகத்தைப் பயன்படுத்தும்பொழுது, உடனுக்குடன் அந்தந்த கணக்குகளை ஓரோர்படியாகப் போட்டுப் பார்க்க வேண்டும் என விரும்புகிறோம். இப்புத்தகத்தின் புள்ளியியல் பகுதிகளில் எண்கள் சார்ந்த கணக்கீடுகள் இருப்பதால் வணிகக் கணித மாணவர்கள் அக்கணக்குகளின் தீர்வுகளுக்கு கணிப்பான்களை (**calculators**) பயன்படுத்துமாறு அறிவுறுத்தப்படுகிறார்கள். தங்களின் சொந்த முயற்சியால் பல கணக்குகளைத் தீர்ப்பதில் வெற்றிபெறும் மாணவர்கள், புதிய கணக்குகளின் அடிப்படையை உணர்ந்து அவற்றைத் தீர்க்கும் அவர்தம் திறன் பெருமளவில் பெருகுவதை உறுதியாக அறிய முடியும். பொதுத் தேர்வுகளில் விடைகளை எளிதில் அளிக்க அவர்களால் இயலும்.

இம்முயற்சிக்கு ஆசி வழங்கி வழி நடத்திய எல்லாம் வல்ல இறைவனைப் போற்றுகின்றோம். இப்புத்தகம் கல்விச் சமூகத்தினரிடையே வணிகக் கணிதப் பாடத்திற்கான ஆர்வத்தைக் கிளர்ந்தெழச் செ–யும் என நம்புகிறோம்.

"அண்மைக்காலத்தில் பொருளியல் தத்துவங்களைக் கண்டுபிடிப்பதில் கணிதவியல் யுக்திகளை நேரடியாகப் பயன்படுத்தும் முறைகள் கணித வல்லுநர்களின் கரங்களில் மிகச்சிறந்த சேவை ஆற்றியுள்ளன." – ஆல்ஃப்ரட் மார்ஷல்

மாலினி பிரகா	**அமலி ராஜா மூர்த்தி**	**இராமன் ரமே**	**பத்மநாபன் சீனிவாசன்**	**இராமச்சந்திரன் அந்தோணிராஜ்**

பொருளடக்கம்

7 முதல் 10 வரையிலான பாடங்களில் உள்ள கணக்குகளைத் தீர்வு செ–ய கணிப்பான்களைப் பயன்படுத்த வேண்டும்

வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் 6

நடைமுறை பிரச்சினைகளை கணிதவடிவில் நெறிமுறைப் படுத்தும்பொழுது, அவை வகைக் கெழுச்சமன்பாடுகளின் வடிவம் பெறும். பொருளாதாரம், வணிகவியல், பொறியியல் போன்ற துறைகளில் ஏற்படும் சிறப்பு நிகழ்வுகளைக் குறிக்கும் மாதிரிகள் (models), வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாக அமைகின்றன. அத்தகைய நிகழ்வுகளில் பெரும்பாலானவை சிக்கலாகவும் மற்றும் கடினமாகவும் இருக்கும். ஆனால் இவற்றை வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டின் மூலம் வெளிப்படுத்தினால் அவைப்பற்றி ஆரா−தல் மிக எளிதாகிவிடும். எடுத்துக்காட்டாக x உற்பத்தி பொருட்களுக்கான செலவின் மாறு வீதம் செலவிற்கு நேரிடை விகிதமாயிருப்பின் இந்நிகழ்வை கீழ்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினால் குறிக்கலாம்.

$\dfrac{dC}{dx} = k\, C$, இங்கு C என்பது செலவு மற்றும் k ஒரு மாறிலி இதன் தீர்வானது $C = C_0\, e^{kx}$, $x = 0$ என இருப்பின் $C = C_0$ ஆகும்.

6.1 வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை அமைத்தல் (Formation of differential equations)

ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சாரா மாறிகள், ஒரு சார்ந்த மாறி மற்றும் இவற்றின் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வகைக்கெழுக்களை கொண்டு அமைக்கப்படும் சமன்பாடு **வகைக் கெழுச் சமன்பாடு** ஆகும்.

வகைக் கெழுச்சமன்பாடுகள் இரு வகைப்படும்.

(i) ஒரேயொரு சாரா மாறியும், சாரா மாறியைப் பொறுத்த சார்ந்த மாறியின் வகைக்கெழு இவைகளை தன்னகத்தே கொண்ட சமன்பாடு **சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.**

(ii) ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சாரா மாறிகள் மற்றும் சார்ந்த மாறிகளின் பகுதி வகைக் கெழுக்கள் இவற்றைக் கொண்டு அமையும் சமன்பாட்டிற்கு **பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு** (Partial differential equation) என்று பெயர்.

கீழ்வருவன வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கு எடுத்துக் காட்டுகளாகும்.

1) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^x$ 2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$

3) $\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}} = k\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 4) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y \quad = 0$

5) $\quad + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ 6) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x + y$

(1), (2) மற்றும் (3) இவைகள் சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாகும்

(4), (5) மற்றும் (6) இவைகள் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாகும்

இப்பாடத்தில் சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைப் பற்றி மட்டுமே படிப்போம்.

6.1.1 வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி (Order and Degree of a Differential Equation)

ஒரு வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டில் $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ இடம் பெற்றிருக்கும் வகைக் கெழுவின் மிக உயர்ந்த வரிசையே அச்சமன்பாட்டின் **வரிசை** (order) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 7\frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை கருத்தில் கொள்க. $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ மற்றும் $\dfrac{dy}{dx}$ இவற்றின் வரிசைகள் முறையே 3, 2 மற்றும் 1 ஆகும். எனவே மிக உயர்ந்த வரிசை 3. ஆகையால் மேற்கண்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை 3 என அறியலாம்.

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் இடம்பெற்றிருக்கும் மிக உயர்ந்த வரிசை கொண்ட வகைக் கெழுவின் படியே அச்சமன்பாட்டின்

படி (degree) எனப்படும். இதனைக் காண, வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் உள்ள வகைக்கெழுக்களின் அடுக்குக் குறி, பின்னமாக இல்லாமலிருக்குமாறு உறுதி செ—து கொள்ளவேணடும்.

$$x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 7\frac{dy}{dx} - 4y = 0$$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி 2 எனஅறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1

பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் வரிசை படி காண்க.

(i) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = 3e^x$ (ii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 7\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 3\sin x$

(iii) $\frac{d^2x}{dy^2} + a^2x = 0$ (iv) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3\frac{d^3y}{dx^3} + 7\frac{d^2y}{dx^2} + 4\left(\frac{dy}{dx}\right) - \log x = 0$

(v) $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 4x$ (vi) $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{2}{3}} = \frac{d^2y}{dx^2}$

(vii) $\frac{d^2y}{dx^2} - \sqrt{\frac{dy}{dx}} = 0$ (viii) $\sqrt{1+x^2} = \frac{dy}{dx}$

தீர்வு :

வரிசை மற்றும் படி முறையே

(i) 1 ; 3	(ii) 2 ; 3	(iii) 2 ; 1	(iv) 3 ; 1
(v) 1 ; 2	(vi) 2 ; 3	(vii) 2 ; 2	(viii) 1 ; 1

குறிப்பு

(v), (vi) மற்றும் (vii) இவற்றின் படி மற்றும் வரிசைகளைக் காண்பதற்கு முன்பு வகைக் கெழுக்களின் பின்ன அடுக்குகளை நீக்க வேண்டும்.

6.1.2 வளை வரைகளின் குடும்பம் (Family of curves)

சில சமயங்களில், வளைவரைகளின் குடும்பத்தை ஒரேயொரு சமன்பாட்டின் மூலம் குறிக்கலாம். வளைவரைக் குடும்பத்தின்

சமன்பாட்டில் c என்ற யாதேனும் ஒரு மாறிலி இருக்கும். c -ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு வளைவரைக்குடும்பத்தின் வெவ்வேறு வளைவரைகளைப் பெறலாம். இங்கு c -ஐ **துணை அலகு** (parameter) என்போம். இது ஏதேனும் ஒரு மாறிலியாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

(i) $y = mx$ என்ற சமன்பாடு ஆதிவழிச் செல்லும் நேர்க்கோடுகளின் குடும்பத்தைக் குறிக்கிறது. இங்கு m ஒரு துணை அலகு.

(ii) ஆதியை மையமாகக்கொண்ட பொதுமைய வட்டங்களின் குடும்பம் $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படுகிறது இங்கு a ஒரு துணை அலகு.

(iii) ஒரே தளத்தில் அமையும் நேர்கோட்டுக் குடும்பத்தின் சமன்பாடு $y = mx + c$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. இங்கு m மற்றும் c என்பன துணை அலகுகள்.

6.1.3 சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை அமைத்தல் (Formation of Ordinary Differential Equations)

$y = mx + \lambda$ ---------(1) என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுக. இங்கு m ஒரு மாறிலி. λ ஒரு துணை அலகு ஆகும். இச்சமன்பாடு சமமான சா−வுகளைக் கொண்ட இணைக் கோடுகளின் குடும்பத்தைக் குறிக்கும்.

(1) x -யைப்பொறுத்து வகையிட, $\dfrac{dy}{dx} = m$ என கிடைக்கும். இது நேர்க்கோட்டு குடும்பத்தின் வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டைக் குறிக்கிறது. இதே போன்று $y = \mathrm{A}e^{5x}$ என்ற சமன்பாடு $\dfrac{dy}{dx} = 5y$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை உருவாக்கும்.

மேற்குறிப்பிட்ட சார்புகள் ஒரே ஒரு துணை அலகைக் கொண்ட குடும்பங்களைக் குறிக்கும். ஒவ்வொரு குடும்பத்திற்கும் ஒரு வகைக் கெழுச் சமன்பாடு உண்டு. இவ்வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டை பெற குடும்பத்தின் சமன்பாட்டை x யைப் பொறுத்து, துணை அலகை மாறிலியாகக் கருதி வகையீடு காண வேண்டும். வகையீடு செ−த சமன்பாடு துணை அலகுகளின்றி இருக்கும் பொழுது, குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடாக அமையும்.

குறிப்பு

(i) இரு துணை அலகுகள் கொண்ட குடும்பத்தின் சமன்பாட்டை இருமுறை வகையீடு செ–து துணை அலகுகளை நீக்கி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை பெறலாம்.

(ii) பெறப்படும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசையானது வளைவரைக் குடும்பத்தின் சமன்பாட்டில் உள்ள மாறிலிகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

$y = A\cos 5x + B\sin 5x$ என்ற வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்க. இங்கு A மற்றும் B துணை அலகுகளாகும்.

தீர்வு :

$y = A\cos 5x + B\sin 5x$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$$\frac{dy}{dx} = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -25\,(A\cos 5x) - 25\,(B\sin 5x) = -25y$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 25y = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 3

$y = ae^{3x} + be^{x}$ என்ற வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை காண்க. a மற்றும் b என்பன துணை அலகுகளாகும்.

தீர்வு :

$$y = ae^{3x} + be^{x} \quad \text{------------}(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3ae^{3x} + be^{x} \quad \text{------------}(2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9ae^{3x} + be^{x} \quad \text{------------}(3)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} - y = 2ae^{3x} \quad \text{------------}(4)$$

$(3) - (2) \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 6ae^{3x} = 3\left(\dfrac{dy}{dx} - y\right)$ [(4) யை பயன்படுத்தி]

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 4

***y* = *a* cos (*mx* + *b*), *a* மற்றும் *b* களை ஏதேனும் மாறிலிகளாகக் கொண்ட வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.**

தீர்வு :

$$y = a\cos(mx+b) \qquad \text{------------(1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -ma\sin(mx+b)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -m^2a\cos(mx+b) = -m^2y \qquad \text{[(1)–யை பயன்படுத்தி]}$$

$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2} + m^2y = 0$ என்பது தேவையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5

***y* = *a* tan *x*+*b* sec*x* என்ற சமன்பாட்டில் உள்ள மாறிலிகள் *a* மற்றும் *b* இவற்றை நீக்குவதன் மூலம் வகைகெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.**

தீர்வு :

$$y = a\tan x + b\sec x$$

இருபுறமும் $\cos x$ –ஆல் பெருக்க,

$$y\cos x = a\sin x + b$$

x –யைப் பொறுத்து வகையீடு செ–ய

$$y(-\sin x) + \frac{dy}{dx}\cos x = a\cos x$$

$$-y\tan x + \frac{dy}{dx} = a \qquad \text{-----------(1)}$$

(1) யை x யைப் பொறுத்து வகையீடு செ–ய

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\tan x - y\sec^2 x = 0$$

பயிற்சி 6.1

1) கீழ்வருவனவற்றின் வரிசை மற்றும் படி காண்க.

(i) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + y = \cos x$ (ii) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 5\dfrac{dy}{dx} = 0$

(iii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \sqrt{\dfrac{dy}{dx}} = 0$ (iv) $\left(1+\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{dy}{dx}$

(v) $\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ (vi) $\sqrt{1+\dfrac{d^2y}{dx^2}} = x\dfrac{dy}{dx}$

(vii) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ (viii) $3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 3y = e^x$

(ix) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ (x) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}+1\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{3}}$

2) கீழ்வருவனவற்றின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $y = mx$ (ii) $y = cx - c + c^2$

(iii) $y = mx + \dfrac{a}{m}$, இங்கு m ஒரு ஏதேனும் மாறிலியாகும்

(iv) $y = mx + c$ இங்கு m மற்றும் c என்பன ஏதேனும் மாறிலிகளாகும்.

3) x, y அச்சுக்களைத் தொலைத் தொடுகோடுகளாகக் கொண்ட அதிபரவளைய குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

4) ஆதிவழிச் செல்லும் மற்றும் x அச்சின் மீது மையங்களைக் கொண்ட $x^2 + y^2 + 2gx = 0$ எனும் வட்டங்களின் குடும்பத்தைக் குறிக்கும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5) $y^2 = 4a\,(x + a)$ இன் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு a ஒரு துணை அலகு.

6) $y = ae^{2x} + be^{3x}$ என்ற வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு a மற்றும் b என்பன துணை அலகுகளாகும்.

7) $y = a\cos 3x + b\sin 3x$ –ன் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு a மற்றும் b என்பன துணை அலகுகளாகும்.

8) $y = ae^{bx}$ –ன் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு a மற்றும் b என்பன துணை அலகுகளாகும்.

9) $x^2 + y^2 = a^2$, என்ற பொதுமைய வட்டங்களின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு a ஒரு துணை அலகு.

6.2 வரிசை ஒன்றுடைய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (First order differential equations)

6.2.1 வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு (Solution of first order differential equation)

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழு சமன்பாட்டினை நிறைவு செ–யுமாறு அமையும் மாறிகளுக்கிடையேயான வகைக் கெழுக்களற்ற சார்பு அச்சமன்பாட்டின் **தீர்வு** ஆகும்.

தீர்விலுள்ள மாறிலிகளின் எண்ணிக்கையானது, வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசைக்குச் சமமாக இருப்பின், அத்தீர்வினை சமன்பாட்டின் **பொதுத் தீர்வு** (General solution) என்போம்.

பொதுத்தீர்வில் உள்ள மாறிலிகளுக்கு குறிப்பிட்ட மதிப்புகள் கொடுத்து பெறப்படும் தீர்விற்கு **சிறப்புத் தீர்வு** (Particular solution) என்று பெயர் எடுத்துக்காட்டாக,

வகைக்கெழுச் சமன்பாடு	பொதுத் தீர்வு	சிறப்புத் தீர்வு
(i) $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$	$y = \tan x + c$ (c ஒரு மாறிலியாகும்)	$y = \tan x - 5$
(ii) $\frac{dy}{dx} = x^2 + 2x$	$y = \frac{x^3}{3} + x^2 + c$	$y = \frac{x^3}{3} + x^2 + 8$
(iii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$	$y = Ae^{3x} + Be^{-3x}$	$y = 5e^{3x} - 7e^{-3x}$

6.2.2 பிரிக்கத்தக்க மாறிகள் (Variables separable)

வரிசை **1** மற்றும் படி **1** ஆக உள்ள வகைக் கெழுச்சமன்பாட்டில் மாறிகள் தனித்தனியே இரு பிரிவுகளாக அமையுமாறு பிரிக்கத் தக்க வகையிலிருப்பின், அவைகள் பிரிக்கத்தக்க மாறிகள் என அழைக்கப்படும்.

மாறிகள் பிரிக்கப்பட்ட பின்பு, வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$ என்ற வடிவைப்பெறும். இங்கு $f(x)$ என்பது x

யை மட்டும் மாறியாகக்கொண்டதும் $g(y)$ என்பது y யை மட்டும் மாறியாகக் கொண்டதுமான சார்புகளாக அமையும்.

இதன் பொதுத் தீர்வானது $\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = \mathrm{c}$ ஆகும். (c ஒரு தொகையிடலின் மாறிலியாகும்)

எடுத்துக்காட்டாக, $x\frac{dy}{dx} - y = 0$ என்ற சமன்பாட்டை கருதுக.

$x\frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ (மாறிகளை பிரிப்பதால்)

$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + k \qquad k$, ஒரு தொகையிடலின் மாறிலி

$\Rightarrow \quad \log y = \log x + k.$

k ஆனது $-\infty$ முதல் ∞ வரையிலான மதிப்புகளைப் பெறலாம்.

k –ன் மதிப்பு $-\infty$ முதல் ∞ வரை அமைவதைப்போன்று $\log c$ –ன் மதிப்பும் அமைவதால் தொகையிடலின் மாறிலி k –க்கு பதிலாக $\log c$ என்ற மாறிலியை பொதுத்தீர்வில் மாற்றியமைப்பதின் மூலம் தீர்வு புதுப் பொலிவு பெறுகிறது.

$\log y - \log x = \log c \;\Rightarrow\; \log\left(\frac{y}{x}\right) = \log c$

(அ–து) $\quad \frac{y}{x} = c \quad \Rightarrow \quad y = cx$

குறிப்பு

(i) வரிசை ஒன்றுடைய நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் y இல்லாமலிருப்பின் இவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\frac{dy}{dx} = f(x)$ என்ற வடிவைப் பெற்று இதன் தீர்வு $y = \int f(x)\,dx + c$ என அமையும்.

(ii) x இல்லாமலிருக்கையில், $\frac{dy}{dx} = g(y)$ என்ற வடிவைப்பெற்று, தீர்வானது $\int \frac{dy}{g(y)} = \int dx + c$ என அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 6

$xdy + ydx = 0$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு :

$$xdy + ydx = 0 \qquad [xy \text{ ஆல் வகுக்க}]$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0. \qquad \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = c_1$$

$$\therefore \quad \log y + \log x = \log c \;\Rightarrow\; xy = c$$

குறிப்பு

(i) $xdy + ydx = 0 \;\Rightarrow d(xy) = 0 \;\Rightarrow xy = c, .$

(ii) $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2} \quad \therefore \qquad = \int d\left(\frac{x}{y}\right) + c = \frac{x}{y} + c$

எடுத்துக்காட்டு 7

தீர்க்க : $\frac{dy}{dx} = e^{3x+y}$

தீர்வு :

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x} e^{y} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{e^{y}} = e^{3x}\, dx$$

$$\int e^{-y}\, dy = \int e^{3x}\, dx + c$$

$$\Rightarrow \quad -e^{-y} = \frac{e^{3x}}{3} + c \;\Rightarrow\; \frac{e^{3x}}{3} + e^{-y} = c$$

$$\int \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 8

தீர்வு காண்க : $(x^2 - ay)\, dx = (ax - y^2)dy$

தீர்வு :

கொடுத்த சமன்பாட்டிலிருந்து

$$x^2dx + y^2dy = a(xdy + ydx)$$

$$\Rightarrow \quad x^2dx + y^2dy = a\, d(xy)$$

$$\therefore \quad \int x^2\, dx + \int y^2\, dy = \mathrm{a} \int d\,(xy) + \mathrm{c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} = a(xy) + c$$

$x^3 + y^3 = 3axy + c$ என்பது பொதுத்தீர்வு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9

தீர்வு காண்க $y(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\ dy + x\sqrt{1+y^2}\ dx = 0$

தீர்வு :

$y\sqrt{1+x^2}\ dy + x\sqrt{1+y^2}\ dx = 0$ [$\sqrt{1+x^2}$ $\sqrt{1+y^2}$ ஆல் வகுக்க]

$\Rightarrow \quad \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}\ dy + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = 0$

$\therefore \quad \int \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}\ dy + \int \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = c_1$

$1+y^2 = t$ என்க

$2ydy = dt$

$1+x^2 = u$ என்க

$\therefore\ 2xdx = du$

$\therefore \quad \dfrac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\ dt + \dfrac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\ du = c$

(அ.து) $\quad t^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{1}{2}} = c$ or $\sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+x^2} = c$

குறிப்பு : இக்கணக்கை தொகையீடலை பின்வரும் விதியைப் பயன்படுத்தி தீர்வு காணலாம். $\int [f(x)]^n f'(x)\ dx = \dfrac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$

எடுத்துக்காட்டு 10

தீர்வு காண்க :

$$(\sin x + \cos x)\ dy + (\cos x - \sin x)\ dx = 0$$

$\int dy$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை கீழ்வருமாறு எழுத,

$$dy + \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\ dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad + \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\ dx = c$$

$$\Rightarrow \quad y + \log(\sin x + \cos x) = c$$

எடுத்துக்காட்டு 11

$x = \sqrt{2}$ **எனும்பொழுது** $y = \dfrac{\pi}{4}$ **எனில்**

$x\dfrac{dy}{dx} + \cos y = 0$ **ஐ தீர்க்க.**

தீர்வு :

$$x\,dy = -\cos y\,dx$$

$\therefore \quad \int \sec y\,dy = -\int \frac{dx}{x} + k \qquad k$, தொகையிடலின் மாறிலி

$\log(\sec y + \tan y) + \log x = \log c$, இங்கு $k = \log c$

$\Rightarrow \quad x(\sec y + \tan y) = c.$

$x = \sqrt{2}$, $y = \frac{\pi}{4}$, எனில்

$$(\sec \frac{\pi}{4} + \tan \quad) = c$$

$$\Rightarrow c = \quad (\sqrt{2} + 1) = 2 + \sqrt{2}$$

$\therefore$ சிறப்புத் தீர்வானது $x(\sec y + \tan y) = 2 + \sqrt{2}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 12

***x* அலகுகள் உற்பத்திக்கான இறுதிநிலைச் செலவுச் சார்பு $MC = 23+16x - 3x^2$. மற்றும் 1 அலகு உற்பத்திக்கான மொத்த செலவு ரூ.40 எனில், மொத்த செலவு மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்புகளைக் காண்க.**

தீர்வு :

$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

x அலகுகள் உற்பத்தியின் மொத்த செலவுச் சார்பு $C(x)$ எனில்

$$\frac{dC}{dx} = MC = 23 + 16x - 3x^2$$

$$\therefore \int \frac{dC}{dx}\,dx = \int (23+16x - 3x^2)dx + k$$

$C = 23x + 8x^2 - x^3 + k$, k ஒரு மாறிலி

$x = 1$ எனில் $C(x) = 40$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$$23(1) + 8(1)^2 - 1^3 + k = 40 \Rightarrow k = 10$$

$\therefore$ மொத்த செலவுச் சார்பு $C(x) = 23x + 8x^2 - x^3 + 10$

சராசரி செலவுச் சார்பு $= \dfrac{23x + 8x^2 - x^3 + 10}{x}$

$$= 23 + 8x - x^2 + \frac{10}{x}$$

எடுத்துக்காட்டு 13

தேவையின் நெகிழ்ச்சி -1 எனில் தேவைச் சார்பின் பொது வடிவம் காண்க.

தீர்வு :

p விலைக்கு கோரப்படும் பொருட்களின் எண்ணிக்கை x என்க.

$$\eta_d = \frac{-p}{x}$$

கொடுக்கப்பட்டது, $\frac{-p}{x} = -1 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dp}{p} \Rightarrow \int \frac{dx}{x}$

$$= \int \frac{dp}{p} + \log k$$

$\Rightarrow \quad \log x = \log p + \log k, \quad$ (k ஒரு மாறிலி)

$$\Rightarrow \quad \log x = \log kp \Rightarrow x = kp \Rightarrow p = \frac{1}{k}x$$

(அ.து) $\quad p = cx,\;$ இங்கு $c = \frac{1}{k}$ ஒரு மாறிலி

எடுத்துக்காட்டு 14

ஒரு தானியக் கிடங்கை பராமரிப்பதற்கான செலவு c மற்றும் அதில் சேமித்து வைக்கக் கூடிய பொருளின் அளவு x ஆகியவற்றை தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு $\frac{dC}{dx} = ax + b$. $x = 0$ எனும் போது $C = C_0$ எனில் C -ஐ x -ன் சார்பாகக் காண்க.

தீர்வு :

$$\frac{dC}{dx} = ax + b \quad \therefore\; dC = (ax + b)\,dx$$

$$\int dC = \int (ax+b)\,dx + k,$$

$\Rightarrow \quad C = \frac{ax^2}{2} + bx + k,\;$ (k ஒரு மாறிலி) -------------(1)

$x = 0$ எனில் $C = C_0 \;\therefore\; (1) \Rightarrow \quad C_0 = \frac{a}{2}(0) + b(0) + k$

$$\Rightarrow k = C_0$$

எனவே செலவுச் சார்பு $C = \frac{a}{2}x^2 + bx + C_0$

எடுத்துக்காட்டு 15

ஒரு வளைவரையின் எந்த ஒரு புள்ளியிலும் அதன் சா-வு அப்புள்ளியின் y ஆயத்தொலையின் இருமடங்கின் தலைகீழ் ஆகும். வளைவரை $(4, 3)$ வழிச் செல்லுகிறது எனில் அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

ஒரு புள்ளியிடத்து வளைவரையின் சா–வு என்பது அப்புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சா–வாகும்.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} \Rightarrow 2ydy = dx$$

$$\int 2y\,dy = \int dx + c \Rightarrow y^2 = x + c$$

வளைவரை $(4, 3)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்வதால்

$$9 = 4 + c \Rightarrow c = 5$$

$\therefore$ வளைவரையின் சமன்பாடு $y^2 = x + 5$

பயிற்சி 6.2

1) தீர்க்க (i) $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$ (ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$

(iii) $\frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{x-1}$ (iv) $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx} = 0$

2) தீர்க்க (i) $\frac{dy}{dx} = e^{2x-y} + x^3 e^{-y}$ (ii) $(1-e^x)\sec^2 y\,dy + 3e^x \tan y\,dx = 0$

3) தீர்க்க (i) $\frac{dy}{dx} = 2xy + 2ax$ (ii) $x(y^2 + 1)\,dx + y(x^2 + 1)\,dy = 0$

(iii) $(x^2 - yx^2)\frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$

4) தீர்க்க (i) $xdy + ydx + 4\sqrt{1-x^2y^2}\,dx = 0$

(ii) $ydx - xdy + 3x^2y^2e^{x^3}dx = 0$

5) தீர்க்க (i) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+4y+5}{x^2-2x+2}$ (ii) $\frac{dy}{dx} + \frac{y^2+y+1}{x^2+x+1} = 0$

6) P(x, y) என்ற புள்ளியிடத்து ஒரு வளைவரையின் சா–வு $3x^2 + 2$ ஆகும். வளைவரை $(1, -1)$ வழிச்செல்லுமெனில் அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7) (x, y) என்ற ஒரு புள்ளியில் அதன் சா–வு அப்புள்ளியின் x ஆயத்தொலைக்கு நேர் விகிதசமத்தில் உள்ளது. வளைவரை $(0, 0)$ மற்றும் $(1, 1)$ எனும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லுகிறது எனில் அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

8) $x = \frac{1}{2}$ எனும் போது $y = 2$ எனில் $\sin^{-1}x\, dy + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 0$ ஐ தீர்க்க.

9) தேவையின் நெகிழ்ச்சி - n எனில் தேவை சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் காண்க.

10) தேவையின் நெகிழ்ச்சி $-\frac{1}{2}$ எனில் தேவை சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் காண்க.

11) x அலகுகளின் உற்பத்திக்கான இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு MC = $e^{3x + 7}$. உற்பத்தி ஏதும் இல்லாதபோது மொத்தச் செலவு இல்லை எனக்கொண்டு, மொத்தச் செலவு மற்றும் சராசரிச் செலவு சார்புகளைக் காண்க.

6.2.3 சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Homogeneous differential equations)

$f(x, y)$ மற்றும் $g(x, y)$ என்பன ஒவ்வொன்றும் ஒரே படியுள்ள சமபடித்தான சார்புகளெனில் $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ என்பது x, y இல் ஒரு சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும்.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{x^3+y^3}$$

மற்றும் $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}$$

என்பன வரிசை ஒன்று உடைய சமபடித்தான வகைக்கெழு சமன்பாடுகளுக்கு சில எடுத்துக் காட்டுகளாகும்.

6.2.4 வரிசை ஒன்று உடைய சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை தீர்க்கும் முறை (Solving first order homogeneous differential equations)

$y = vx$ எனில் $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ ஆகும். எனவே வரிசை ஒன்று உடைய சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடானது மாறிகளைப் பிரிக்கக் கூடிய சமன்பாட்டின் வடிவம் பெறும். தொகையீடுதலுக்குப் பிறகு v ஐ $\dfrac{y}{x}$ என்று மாற்றி தீர்வைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 16

பின் வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை தீர்க்க. $(x^2 + y^2)dx = 2xydy$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ என்று எழுதலாம். ------------- (1)

இது ஒரு சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும்.

$y = vx$ என்க $\therefore\ \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ ------------- (2)

(1) ஐ (2) இல் பிரதியிட

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + v^2x^2}{2x(vx)} = \frac{1+v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{2v}$$

மாறிகளைப் பிரிப்பதால்,

$$\frac{2v}{1-v^2}\,dv = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{-2v}{1-v^2} = \int\frac{-dx}{x} + c_1$$

$$\log(1 - v^2) = -\log x + \log c \quad [\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log f(x)]$$

$$\Rightarrow \quad \log(1 - v^2) + \log x = \log c \Rightarrow (1 - v^2)\,x = c$$

v ஐ $\dfrac{y}{x}$ என மாற்றினால்

$\left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\right)x = c$ அல்லது $x^2 - y^2 = cx$ என அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 17

தீர்க்க : $(x^3 + y^3)dx = (x^2y + xy^2)\, dy$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{x^2y + xy^2} \qquad \text{--------------} \ (1)$$

$y = vx$ என்க. $\therefore \ \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$$\Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^3}{v+v^2}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^3}{v+v^2} - v = \frac{1-v^2}{v(v+1)} = \frac{(1-v)(1+v)}{v(v+1)}$$

$$\int \frac{v}{1-v}\,dv = \qquad dx + c$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{-v}{1-v}\,dv = - \qquad dx + c \quad \text{or} \quad \int \frac{(1-v)-1}{1-v}\,dv = -\int \frac{1}{x}\,dx + c$$

$$\Rightarrow \quad \int\left(1+\frac{(-1)}{1-v}\right)dv = -\int \frac{1}{x}\,dx + c$$

$$\therefore \quad v + \log(1 - v) = -\log x + c$$

v ஐ $\frac{y}{x}$ என மாற்றினால் $\frac{y}{x} + \log(x - y) = c$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 18

தீர்க்க : $x\frac{dy}{dx} = y - \sqrt{x^2 + y^2}$

தீர்வு :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \qquad \text{------------}(1)$$

$y = vx$ என்க $\quad \therefore \ \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$$(1) \Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx - \sqrt{x^2 + v^2x^2}}{x} = v - \sqrt{1+v^2}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = -\sqrt{1+v^2} \Rightarrow = \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = -\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = -\int \frac{dx}{x} + c_1$$

$$\Rightarrow \qquad \log\left(v + \sqrt{1+v^2}\right) = -\log x + \log c$$

$$\log x\left(\mathrm{v} + \sqrt{1+v^2}\right) = \log c$$

அல்லது $\quad x\left(v + \sqrt{1+v^2}\right) = c$

(அ–து) $\quad x\left[\frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right] = c \quad \therefore \quad y + \sqrt{x^2+y^2} = c$

எடுத்துக்காட்டு 19

தீர்க்க $(x+y)\,dy + (x-y)dx = 0$

தீர்வு :

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x-y}{x+y}\right) \qquad \text{------------ } (1)$$

$y = vx$ என்க. $\quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

எனவே $\quad v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{x-vx}{x+vx} \Rightarrow v + x = -\frac{1-v}{1+v}$

(அ–து) $\quad x\frac{dv}{dx} = -\left(\frac{1-v}{1+v} + \frac{dv}{dx}\right) \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-(1-v+v+v^2)}{1+v}$

$$\therefore \quad \frac{1+v}{1+v^2}\,dv = \qquad dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dv}{1+v^2}\,dv + \frac{1}{2}\int \frac{2v}{1+v^2}\,dv = \int -\frac{1}{x}\,dx + c$$

$$\tan^{-1}v + \frac{1}{2}\log\left(1+v^2\right) = -\log x + \mathrm{c}$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) = -\log x + \mathrm{c}$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right) - \frac{1}{2}\log x^2 = -\log x + \mathrm{c}$$

$$\therefore \quad \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right) = c$$

எடுத்துக்காட்டு 20

இலாபம் p மற்றும் கோரப்படும் தேவை அளவு x ஆகியவை $\frac{dp}{dx}=\frac{2p^3-x^3}{3xp^2}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை நிறைவு செ-கின்றன. $x = 10$ எனும் போது $p = 20$ எனில், இலாபம் மற்றும் கோரப்படும் தேவை ஆகியவற்றுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\frac{dp}{dx}=\frac{2p^3-x^3}{3xp^2} \qquad \text{-------------}(1)$$

என்பது x, p இல் சமபடித்தான வகைக்கெழு சமன்பாடு ஆகும்.

$p = vx$ எனில் $\frac{dp}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$.

$$(1) \Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2v^3-1}{3v^2} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{2v^3-1}{3v^2} - v$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = -\left[\frac{1+v^3}{3v^2}\right]$$

$$\frac{3v^2}{1+v^3}\,dv = -\frac{dx}{x} \quad \therefore \quad \int\frac{3v^2}{1+v^3}\,dv = -\int\frac{dx}{x} = k$$

$\Rightarrow \quad \log(1 + v^3) = -\log x + \log k$, இங்கு k ஒரு மாறிலி

$$\log(1 + v^3) = \log\frac{k}{x} \Rightarrow 1 + v^3 = \frac{k}{x}$$

v ஐ $\frac{p}{x}$ என மாற்றினால்,

$$\Rightarrow \quad x^3 + p^3 = kx^2$$

ஆனால் $x = 10$ எனில் $p = 20$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\therefore \quad (10)^3 + (20)^3 = k(10)^2 \Rightarrow k = 90 \quad \therefore x^3+p^3 = 90x^2$

(அ–து) $p^3 = x^2(90 - x)$ என்பது தேவையான தொடர்பாகும்..

எடுத்துக்காட்டு 21

பொருட்களின் கோருதல் அளவு q அதிகரிக்கும்பொழுது, கோருதல் மற்றும் அவைகளை இருப்பு வைப்பதற்குமான

செலவு C -ன் அதிகரிக்கும் வீதம் $\dfrac{dC}{dq} = \dfrac{C^2 + 2Cq}{q^2}$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினால் தரப்பட்டுள்ளது. C மற்றும் q க்கு இடையே உள்ள தொடர்பை C = 1 மற்றும் q = 1 எனும் நிலையில் காண்க.

தீர்வு :

C மற்றும் q ல் உள்ள சமபடித்தான சமன்பாடு

$$\frac{dC}{dq} = \frac{C^2 + 2Cq}{q^2} \qquad \text{------------}(1)$$

$C = vq$ என்க $\therefore \quad \dfrac{dC}{dq} = v + q\dfrac{dv}{dq}$

$$(1) \Rightarrow v + q\frac{dv}{dq} = \frac{v^2q^2 + 2vq^2}{q^2} = v^2 + 2v$$

$$\Rightarrow \quad q\frac{dv}{dq} = v^2 + v = v\,(v + 1) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v(v+1)} = \frac{dq}{q}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{(v+1) - v}{v(v+1)}\, dv = \int \frac{dq}{q} + k,$$ k ஒரு மாறிலி.

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} - \int \frac{dv}{v+1} = \int \frac{dq}{q} + \log k,$$

$$\Rightarrow \quad \log v - \log (v + 1) = \log q + \log k$$

$\Rightarrow \quad \log \dfrac{v}{v+1} = \log qk$ அல்லது $\dfrac{v}{v+1} = kq$

$v = \dfrac{C}{q}$ எனும் போது, $C = kq(C + q)$.

C = 1 மற்றும் $q = 1$ எனும் போது

$$C = kq(C + q) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}$$

$\therefore \quad C = \dfrac{q(C+q)}{2}$ என்பது C மற்றும் q விற்கு இடையிலான தொடர்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 22

மொத்த உற்பத்திச் செலவு y மற்றும் உற்பத்தியின் அளவு x ஆகியவை $(6x^2 + 2y^2)\, dx - (x^2 + 4xy)\, dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் வாயிலாக இறுதி நிலை உற்பத்தி செலவுடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளன. $x = 1$ எனும் பொழுது $y = 2$ எனில், மொத்த செலவிற்கும் உற்பத்திக்கும் இடையே யுள்ள தொடர்பினைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ளது $(6x^2 + 2y^2)\, dx = (x^2 + 4xy)\, dy$

$$\therefore \quad = \frac{6x^2 + 2y^2}{x^2 + 4xy} \qquad \text{------------}(1)$$

இது x மற்றும் y –யில் உள்ள சமபடித்தான சமன்பாடு ஆகும்.

$y = vx$ என்க. $\therefore \; \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$

$$(1) \Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{6x^2 + 2y^2}{x^2 + 4xy} \quad \Rightarrow \quad \frac{(1+4v)dv}{6 - v - 2v^2}\, dv = \quad dx$$

$\therefore \quad -\displaystyle\int \frac{-1-4v}{6 - v - 2v^2}\, dv = \int \frac{1}{x}\, dx + k,$ k ஒரு மாறிலி

$$\Rightarrow \quad -\log(6 - v - 2v^2) = \log x + \log k = \log kx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{6 - v - 2v^2} = kx$$

$\Rightarrow \quad x = c(6x^2 - xy - 2y^2)$ இங்கு $c = \dfrac{1}{k}$ மற்றும் $v = \dfrac{y}{x}$.

$x = 1$ மற்றும் $y = 2$ எனில், $\quad 1 = c(6 - 2 - 8) \Rightarrow c = -\dfrac{1}{4}$

$$\therefore \quad 4x = (2y^2 + xy - 6x^2)$$

பயிற்சி 6.3

1) பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2}$ (ii) $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2}$

(iii) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy - 2y^2}{x^2 - 3xy}$ (iv) $x(y - x)\dfrac{dy}{dx} = y^2$

(v) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2xy}{x^2 - 2xy}$ (vi) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$

(vii) $(x + y)^2\, dx = 2x^2\, dy$ (viii) $x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

2) பொருட்களின் கோருதல் அளவு q அதிகரிக்கும்பொழுது, கோருதல் மற்றும் அவைகளை இருப்பு வைப்பதற்குமான செலவு C -ன் அதிகரிக்கும் வீதம் $\frac{dC}{dq} = \frac{C^2 + q^2}{2Cq}$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினால் தரப்பட்டுள்ளது. C மற்றும் q க்கு இடையே உள்ள தொடர்பை $C = 4$ மற்றும் $q = 2$ எனும் நிலையில் காண்க.

3) மொத்த உற்பத்திச் செலவு y மற்றும் உற்பத்தியின் அளவு x ஆகியவை $\frac{dy}{dx} = \frac{24x^2 - y^2}{xy}$ என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் வாயிலாக இறுதி நிலை உற்பத்தி செலவுடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளன. $x = 2$ எனும் பொழுது $y = 4$ எனில், மொத்த செலவுச் சார்பு யாது?

6.2.5 வரிசை ஒன்றுடைய நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (First order linear differential equation)

வரிசை ஒன்று உள்ள வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டில் உள்ள சார்ந்த மாறி மற்றும் அதன் வகைக் கெழுக்களின் படி 1 மற்றும் இவ்விரண்டின் பெருக்கல் பலன் இல்லாமலும் இருக்குமாயின் அச்சமன்பாடு **வரிசை ஒன்றுடைய நேரியியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு** எனப்படும்.

வரிசை 1 உள்ள நேரியியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வடிவம் $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ என அமையும். இங்கு P மற்றும் Q என்பன x ல் மட்டுமே உள்ள சார்புகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $\frac{dy}{dx} + 3y = x^3$; இங்கு $P = 3$, $Q = x^3$

(ii) $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \cos x$, $P = \tan x$, $Q = \cos x$

(iii) $\frac{dy}{dx} x - 3y = xe^x$, $P = -\frac{3}{x}$, $Q = e^x$

(iv) $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + xy = (1+x^2)^3$, $P = \frac{x}{1+x^2}$, $Q = (1 + x^2)^2$

என்பன வரிசை 1 உள்ள நேரியியல் வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளாகும்.

6.2.6 தொகையீட்டுக் காரணி (I.F)

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாடு, நேரிடையாக தொகையீடு காணத்தக்க வகையில் இல்லாமல் இருக்கலாம். ஆனால் இதை ஒரு சார்பின் மூலம் பெருக்குவதால் தொகையீடு காணத்தக்கதாக மாறலாம். இத்தகைய சார்பிற்கு **தொகையீட்டுக் காரணி (integrating factor (I.F))** என்று பெயர். ஆகையால், வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை நேரிடையாக தொகையீடு காணத்தக்க வகையில் மாற்றுவதற்கு உதவும் சார்பு தொகையீட்டுக் காரணியாகும்.

$\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$, -----------(1) எனும் சமன்பாட்டிற்கு $e^{\int \mathrm{P}dx}$ என்பது தொகையீட்டுக் காரணி என நிறுவுவோம். இங்கு P மற்றும் Q என்பன x இல் சார்புகள்.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(ye^{\int \mathrm{P}dx}) &= \frac{dy}{dx}\, e^{\int \mathrm{P}dx} + y\frac{d}{dx}(e^{\int \mathrm{P}dx})\\ &= \frac{dy}{dx}\, e^{\int \mathrm{P}dx} + y\,e^{\int \mathrm{P}dx}\,\frac{d}{dx}\int \mathrm{P}dx\\ &= \frac{dy}{dx}\, e^{\int \mathrm{P}dx} + y\,e^{\int \mathrm{P}dx}\,\mathrm{P} = \left(\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y\right) e^{\int \mathrm{P}dx}\ .\end{aligned}$$

(1) யை $e^{\int \mathrm{P}dx}$ ஆல் பெருக்க

$$\left(\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y\right) e^{\int \mathrm{P}dx} = \mathrm{Q}\,e^{\int \mathrm{P}dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(ye^{\int \mathrm{P}dx}) = \mathrm{Q}\, e^{\int \mathrm{P}dx}$$

தொகையீடு செ–ய,

$$\mathrm{y}\,e^{\int \mathrm{P}dx} = \int \mathrm{Q}\,e^{\int \mathrm{P}dx}\, dx + \mathrm{c} \qquad \text{-------------(2)}$$

ஆகையால் $e^{\int \mathrm{p}dx}$ என்பது தொகையீட்டுக் காரணியாகும்.

குறிப்பு

(i) $e^{\log \mathrm{f}(x)} = f(x)$ when $f(x) > 0$

(ii) $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$ –ல் $\mathrm{Q} = 0$ எனில் பொதுத் தீர்வு $y\ (\mathrm{I.F}) = c$, இங்கு c ஒரு மாறிலி

(iii) $\dfrac{dx}{dy} + \text{P}x = \text{Q}$ என்ற சமன்பாட்டில் P மற்றும் Q என்பன y –யின் சார்புகளாயின் இச்சமன்பாட்டின் I.F $e^{\int \text{P}dy}$ ஆகும். மற்றும் தீர்வானது $x\,(\text{I.F}) = \int Q\,(\text{I.F})\,dy + c$ என அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 23

$(1 - x^2)\dfrac{dy}{dx} - xy = 1$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு :

$$(1\text{-}x^2)\ \frac{dy}{dx} - xy = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} - \frac{x}{1-x^2}\ y = \frac{1}{1-x^2}$$

இது $\dfrac{dy}{dx} + \text{P}y = \text{Q},$ என்ற வடிவில் உள்ளது

இங்கு $\text{P} = \dfrac{-x}{1-x^2}$; $\text{Q} =$

$$\text{I.F} = e^{\int \text{P}dx} = e^{\int \frac{-x}{1-x^2}dx} = \sqrt{1-x^2}$$

பொதுத்தீர்வு:

$$y\,(\text{I.F}) = \int \text{Q}\,(\text{I.F})dx + c \ \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$$

$$y\sqrt{1-x^2} = \int \frac{1}{1-x^2} \qquad dx + c$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + c$$

$$y\sqrt{1-x^2} = \sin^{-1}x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 24

தீர்க்க $\dfrac{dy}{dx} + ay = e^x$ (இங்கு $a \neq -1$)

தீர்வு :

இங்கு $\text{P} = a$; $\text{Q} = e^x$

$$\therefore \quad \text{I.F} = e^{\int \text{P}dx} = e^{ax}$$

பொதுத் தீர்வு

$$y\,(\text{I.F}) = \int Q\,(\text{I.F})\,dx + c$$

$$\Rightarrow \quad y\, e^{ax} = \int e^{x}\, e^{ax}\, dx + c = \int e^{(a+1)x}\, dx + c$$

$$y\, e^{ax} = \frac{e^{(a+1)x}}{a+1} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 25

தீர்க்க $\mathbf{\cos x \dfrac{dy}{dx} + y \sin x = 1}$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை கீழ்வரும் முறையில் எழுத

$$\frac{dy}{dx} + y\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x$$

இங்கு $P = \tan x$; $Q = \sec x$

$$\text{I.F} = e^{\int \tan x\, dx} = e^{\log \sec x} = \sec x$$

பொதுத் தீர்வு

$$y\,(\text{I.F}) = \int Q\,(\text{I. F})\, dx + c$$

$$y \sec x = \int \sec^2 x\; dx + c$$

$$\therefore \quad y \sec x = \tan x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 26

ஒரு வங்கி, முதலீட்டின் உடனடி மாறு வீதமும், அம்முதலின் ஓராண்டு வட்டியும் சம அளவில் இருக்குமாறு கணக்கிட்டு வட்டியளிக்கிறது. வருடத்திற்கு 6.5% தொடர் கூட்டு வீதத்தில் ரூ.50,000 -த்தை அவ்வங்கியில் ஒருவர் முதலீடு செ-தால் 10 வருடங்களுக்கு பின்னர் அவர் பெறும் முதிர்வு தொகையைக் கணக்கிடுக. $(e^{\cdot 65} = 1.9155)$

தீர்வு :

t என்ற காலத்தில் P(t) என்பது கணக்கில் இருக்கும் தொகை எனக் கொள்க. பணத்தின் வளர்ச்சியைக் குறிக்கும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடானது

$$\frac{dP}{dt} = \frac{6.5}{100}P = 0.065P \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int (0.065)\ dt + c$$

$$\log_e P = 0.065t + c \qquad \therefore \quad P = e^{0.065t}\ e^c$$

$$P = c_1\ e^{0.065t} \qquad \text{-------------}(1)$$

$t = 0$, P = 50000 எனில்

$$(1) \Rightarrow 50000 = c_1\, e^0 \quad \text{or} \quad c_1 = 50000$$

$$\therefore \quad P = 50000\ e^{0.065t}$$

At $t = 10$ எனில் P $= 50000\ e^{\ 0.065 \times 10} = 50000\ e^{\ 0.65}$

$= 50000 \times (1.9155) =$ ரூ.95,775

எடுத்துக்காட்டு 27

தீர்க்க : $\displaystyle \frac{dy}{dx} + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

தீர்வு :

இங்கு $P = \cos x$; $Q = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$\int P\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\text{I.F} = e^{\int P dx} = e^{\ \sin x}$$

பொதுத் தீர்வு

$$y\ (\text{I.F}) = \int Q\,(\text{I.F})\ dx + c$$

$$= \int \frac{1}{2}\sin 2x.\ e^{\sin x}\ dx + c$$

$$= \int \sin x \cos x.\ e^{\sin x}\ dx + c$$

$\sin x = t$, என்க
$\cos x\ dx = dt$

$$= \int t\, e^t\ dt + c = e^t\,(t - 1) + c$$

$$= e^{\sin x}\,(\sin x - 1) + c$$

எடுத்துக்காட்டு 28

தயாரிப்பு நிறுவனம் ஒன்றில் உபகரணங்களை இயக்கவும் பராமரிக்கவும் ஆகும் செலவு C மற்றும் அடுத்தடுத்த இரு பழுது பார்த்தலுக்குரிய இடைவெளிக் காலம் m ஆகியவற்றை $m^2\dfrac{dC}{dm} + 2mC = 2$, $m = 2$ எனில் $C = 4$ எனும் சமன்பாட்டினால் குறித்தால், C மற்றும் m களுக்கிடையேயான தொடர்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$m^2\frac{dC}{dm} + 2mC = 2 \Rightarrow \frac{dC}{dm} + \frac{2C}{m} = \frac{2}{m^2}$$

இது வரிசை **1** உள்ள நேரியியல் வகைக் கெழுச் சமன்பாடாகும்.

$$+ Py = Q, \quad \text{இங்கு} \quad P = \frac{2}{m} \; ; \quad Q = \frac{2}{m^2}$$

$$\text{I.F} = \qquad = e^{\int \frac{2}{m} dm} = e^{\log m^2} = m^2$$

பொதுத் தீர்வு :

$$C\,(\text{I.F}) = \int Q\,(\text{I.F})\, dm + k, \quad k \text{ ஒரு மாறிலி}$$

$$Cm^2 = \int \frac{2}{m^2} m^2\, dm + k$$

$$Cm^2 = 2m + k$$

$C = 4$ மற்றும் $m = 2$ எனில்

$16 = 4 + k \quad \Rightarrow \quad k = 12$

C மற்றும் m –க்கான தொடர்பு

$Cm^2 = 2m + 12 = 2(m + 6)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 29

தயாரிப்பு நிறுவனம் ஒன்றில் உபகரணங்களை இயக்கவும் பராமரிக்கவும் ஆகும் செலவு C மற்றும் அடுத்தடுத்த இரு பழுது பார்த்தலுக்குரிய இடைவெளிக் காலம் x ஆகியவற்றை $x^2 \qquad - 10xC = -10$ என்ற சமன்பாட்டினால் குறிக்கப்படின், $x = x_0$ எனில் $C = C_0$ எனக்கொண்டு C -ஐ x -ன் சார்பாகக் காண்க.

தீர்வு :

$$x^2 \frac{dC}{dx} - 10xC = -10 \quad \Rightarrow \quad \frac{dC}{dx} - \frac{10C}{x} = -\frac{10}{x^2}$$

இது வரிசை 1 உள்ள நேரியியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்

$$P = -\frac{10}{x} \quad \text{மற்றும் } Q = -\frac{10}{x^2}$$

$$\int P\, dx = \int -\frac{10}{x}\, dx = -10 \log x = \log\left(\frac{1}{x^{10}}\right)$$

$$I.F = e^{\int P dx} = e^{\log\left(\frac{1}{x^{10}}\right)} = \frac{1}{x^{10}}$$

பொதுத் தீர்வு :

$$C(I.F) = \quad (I.F)\, dx + k, \; k \text{ ஒரு மாறிலி}$$

$$\frac{C}{x^{10}} = \qquad dx + k \quad \text{or} \quad \frac{C}{x^{10}} = \quad \left(\frac{1}{x^{11}}\right) + k$$

எனவே $C = C_0$ மற்றும் $x = x_0$ எனில்

$$\frac{C_0}{x_0^{10}} = \frac{10}{11}\left(\frac{1}{x_0^{11}}\right) + k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{C}{x_0^{10}} - \frac{10}{11x_0^{11}}$$

∴ தீர்வு

$$\frac{C}{x^{10}} = \quad \left(\frac{1}{x^{11}}\right) + \left[\frac{C}{x_0^{10}} - \frac{10}{11x_0^{11}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{C}{x^{10}} - \qquad = \frac{10}{11}\left(\frac{1}{x^{11}} - \frac{1}{x_0^{11}}\right)$$

பயிற்சி 6.4

1) பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $\frac{dy}{dx} + y \cot x = \text{cosec } x$

(ii) $\frac{dy}{dx} - \sin 2x = y \cot x$

(iii) $\frac{dy}{dx} + y \cot x = \sin 2x$

(iv) $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x$, ($x = \frac{\pi}{2}$ எனில் $y = 0$)

(v) $- 3y \cot x = \sin 2x$, ($x = \frac{\pi}{2}$ எனில் $y = 2$)

(vi) $x \quad - 3y = x^2$

(vii) $\frac{dy}{dx} + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^2}$, ($x = 1$ எனில் $y = 0$)

(viii) $\frac{dy}{dx} - y \tan x = e^x \sec x$

(ix) $\log x \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin 2x$

2) தொடர்ச்சிக் கூட்டு வட்டி வீதம் 12% கொண்ட சிறு சேமிப்பு திட்டத்தில் ஒருவர் 5 வருடங்களுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையை முதலீடு செ–ய திட்டமிடுகிறார். 5 வருடங்களுக்கு பிறகு ரூ. 25,000 கிடைப்பதற்கு இத்திட்டத்தில் அவர் எவ்வளவு பணம் முதலீடு செ–ய வேண்டும் என்பதைக் காண்க. ($e^{-0.6} = 0.5488$)

3) தயாரிப்பு நிறுவனம் ஒன்றில் உபகரணங்களை இயக்கவும் பராமரிக்கவும் ஆகும் செலவு C மற்றும் அடுத்தடுத்த இரு பழுது பார்த்தலுக்குரிய இடைவெளிக் காலம் x ஆகியவற்றை இணைக்கும் சமன்பாடு $x^2 \frac{dC}{dx} - (b-1)Cx = \frac{dy}{dx} ba$ ஆகும். இதில் a, b ஆகியன மாறிலிகள். மற்றும் $x = x_0$ எனில் $C = C_0$ ஆகும். C மற்றும் x இவற்றின் தொடர்புக்கான சமன்பாட்டைக் காண்க.

4) பொருளின் அளவு q மாறும்பொழுது, கோருதல் மற்றும் இருப்பு வைத்தல் ஆகியவற்றிற்கான செலவு C -ன் மாறுதலை $\frac{dC}{dq} = a - \frac{C}{q}$, (a ஒரு மாறிலி) எனும் சமன்பாட்டினால் குறித்தால், $q = q_0$ எனும் பொழுது $C = C_0$ எனக் கொண்டு C –யை q –ன் சார்பாகக் கருதுக.

6.3 மாறிலி குணகங்களைக் கொண்ட வரிசை இரண்டுடைய நேரியியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Second order linear differential equations with constant co-efficients)

வரிசை 2 உள்ள, மாறிலி குணகங்களைக் கொண்ட, நேரியியல் வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம்:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x).$$

இப்பகுதியில் (i) $f(x) = 0$ (ii) $f(x) = ke^{\lambda x}$ என அமையும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை மட்டுமே கருதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $3\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$ (or) $3y'' - 5y' + 6y = 0$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = e^{5x}$ (or) $(D^2 - 4D + 3)y = e^{5x}$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y = 7$ (or) $(D^2 + D - 1)y = 7$

என்பன வரிசை இரண்டுடைய நேரியியல் சமன்பாடுகளாகும்.

6.3.1 துணைச் சமன்பாடு மற்றும் நிரப்புச் சார்பு (Auxiliary equation and Complementary function)

$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$, என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கு $am^2 + bm + c = 0$ என்பதை, **துணைச் சமன்பாடு** (auxiliary equation) என்கிறோம். இது m –ல் இருபடிச் சமன்பாடாகும். இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளான m_1 மற்றும் m_2 வின் தன்மைக்கு ஏற்ப நிரப்புச் சார்புகள் (complementary function) பின் வரும் விதத்தில் அமையும்.

தீர்வுகளின் தன்மை	***நிரப்புச்சார்பு***
(i) மெ– மற்றும் வெவ்வேறு $(m_1 \neq m_2)$	$Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$
(ii) மெ– மற்றும் சமமானது ($m_1 = m_2 = m$ எனில்)	$(Ax + B)\, e^{mx}$
(iii) கலப்பு எண்கள் $(\alpha \pm i\beta)$	$e^{\alpha x}(A\cos \beta x + B\sin \beta x)$
(A மற்றும் B என்பன ஏதேனும் மாறிலிகளாகும்.	

6.3.2 *சிறப்புத் தொகை* (P.I)

$(aD^2 + bD + c)y = e^{\lambda x}$ என்பதை கருதுக

$f(D) = aD^2 + bD + c$ என்க.

வகை 1 : $f(\lambda) \neq 0$ எனில் துணைச் சமன்பாடு $f(m) = 0$ -க்கு λ ஒரு மூலம் அல்ல.

விதிமுறை : $\text{P.I} = \dfrac{1}{f(D)}e^{\lambda x} = \dfrac{1}{f(\lambda)}e^{\lambda x}.$

வகை 2 : $f(\lambda) = 0$ எனில், $f(m) = 0$ இன் மூலம் λ ஆகும். இந்நிலையில்,

(i) துணைச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் m_1 மற்றும் m_2 என்க. மேலும் $\lambda = m_1$ எனக் கொள்க.

$$f(m) = a(m - m_1)(m - m_2) = a(m - \lambda)(m - m_2)$$

விதிமுறை : $\text{P.I} = \dfrac{1}{a(D-\lambda)(D-m_2)}e^{\lambda x} = \dfrac{1}{a(\lambda - m_2)}xe^{\lambda x}$

(ii) துணைச் சமன்பாடு ஆனது இரண்டு சமமான தீர்வுகளைப் பெற்றிருப்பின் (அ.து) $m_1 = m_2 = \lambda$ எனில்

$$\therefore\ f(m) = a(m - \lambda)^2$$

விதிமுறை : $\therefore\ \text{P.I.} = \dfrac{1}{a(D-\lambda)^2}e^{\lambda x} = \dfrac{1}{a}\dfrac{x^2}{2!}e^{\lambda x}$

6.3.3 பொதுத் தீர்வு

வரிசை 2 உள்ள நேரியியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு y = நிரப்புச் சார்பு (C.F) + சிறப்புத் தொகை (P.I) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 30

தீர்க்க : 3 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

தீர்வு :

துணைச் சமன்பாடு $3m^2 - 5m + 2 = 0$

$$\Rightarrow\ (3m - 2)(m - 1) = 0$$

தீர்வுகள் $m_1 = \dfrac{2}{3}$ மற்றும் $m_2 = 1$ (மெ– மற்றும் வெவ்வேறு)

$\therefore$ நிரப்புச் சார்பு

$$\text{C.F} = \text{A}\, e^{\frac{2}{3}x} + \text{B}e^{x}$$

பொதுத் தீர்வு

$$y = \text{A}\, e^{\frac{2}{3}x} + \text{B}e^{x} .$$

எடுத்துக்காட்டு 31

தீர்க்க : $(16D^2 - 24D + 9)\, y = 0$

தீர்வு :

துணைச் சமன்பாடு $16m^2 - 24m + 9 = 0$

$\Rightarrow \quad (4m - 3)^2 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{4}$ (தீர்வுகள் சமம்)

$\therefore \quad \text{C.F} = (\text{A}x + \text{B})\, e^{\frac{3}{4}x}$

பொதுத் தீர்வு $y = (\text{A}x + \text{B})\, e^{\frac{3}{4}x}$

எடுத்துக்காட்டு 32

தீர்க்க : $(D^2 - 6D + 25)\, y = 0$

தீர்வு :

துணைச் சமன்பாடு $m^2 - 6m + 25 = 0$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$$

தீர்வுகள் $\alpha \pm i\beta$ வடிவிலுள்ள கலப்பு எண்கள். இங்கு $\alpha = 3$ மற்றும் $\beta = 4$ ஆகும்.

$$\text{C.F} = e^{\alpha x}(\text{A} \cos \beta x + \text{B} \sin \beta x)$$

நிரப்புச் சார்பு $= e^{3x}(\text{A} \cos 4x + \text{B} \sin 4x)$

பொதுத் தீர்வு :

$$y = e^{3x}(\text{A} \cos 4x + \text{B} \sin 4x)$$

எடுத்துக்காட்டு 33

தீர்க்க : $\quad - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{5x}$

தீர்வு :

துணைச் சமன்பாடு $m^2 - 5m + 6 = 0 \Rightarrow m = 3\,,\ 2$

$\therefore$ நிரப்புச்சார்பு C. F $= Ae^{3x} + Be^{2x}$

சிறப்புத் தொகை $\text{P. I} = \frac{1}{D^2 - 5D + 6}\ e^{5x} = \frac{1}{6}\,e^{5x}$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு

$y = \text{C.F} + \text{P. I}$

$y = Ae^{3x} + Be^{2x} + \frac{e^{5x}}{6}$

எடுத்துக்காட்டு 34

தீர்க்க : $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 2e^{-3x}$

தீர்வு :

துணைச் சமன்பாடு $m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = -2, -2$

$\therefore$ நிரப்புச் சார்பு C. F $= (Ax + B)e^{-2x}$

சிறப்புத் தொகை $\text{P. I} = \frac{1}{D^2 + 4D + 4}2e^{-3x}$

$= \frac{1}{(-3)^2 + 4(-3) + 4}\ 2e^{-3x} = 2e^{-3x}$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு

$y = \text{C.F} + \text{P. I}$

$y = (Ax + B)\ e^{-2x} + 2e^{-3x}$

எடுத்துக்காட்டு 35

தீர்க்க : $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 4y = 5 + 3e^{-x}$

தீர்வு :

துணைச் சமன்பாடு $m^2 - 2m + 4 = 0$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{2 \pm i2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

$$\text{C.F} = e^{x}\,(\text{A} \cos \sqrt{3}\,x + \text{B} \sin \sqrt{3}\,x)$$

சிறப்புத் தொகை $\text{P. I}_1 = \frac{1}{\text{D}^2 - 2\text{D} + 4} 5\, e^{0x} = \frac{1}{4} 5\, e^{0x} = \frac{5}{4}$

சிறப்புத் தொகை $\text{P.I}_2 = \frac{1}{\text{D}^2 - 2\text{D} + 4} 3\, e^{-x}$

$$= \frac{1}{(-1)^2 - 2(-1) + 4}\, 3e^{-x} = \frac{3e^{-x}}{7}$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு

$$y = \text{C.F} + \text{P. I}_1 + \text{P.I}_2$$

$$y = \text{e}^{x}\,(\text{A} \cos \sqrt{3}\,x + \text{B} \sin \sqrt{3}\,x) + \frac{5}{4} + \frac{3}{7}\text{e}^{-x}$$

எடுத்துக்காட்டு 36

தீர்க்க : $(4\text{D}^2 - 8\text{D} + 3)y = e^{\frac{1}{2}x}$

தீர்வு :

துணைச் சமன்பாடு $4m^2 - 8m + 3 = 0$

$$m_1 = \frac{3}{2}, \quad m_2 = \frac{1}{2}$$

நிரப்புச் சார்பு $\quad \text{C.F} = \text{A}\, e^{\frac{3}{2}x} + \text{B}\, e^{\frac{1}{2}x}$

சிறப்புத் தொகை $\text{P. I} = \frac{1}{4\text{D}^2 - 8\text{D} + 3} e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4(\text{D} - \frac{3}{2})(\text{D} - \frac{1}{2})} e^{\frac{1}{2}x}$

$$= \frac{1}{4(\frac{1}{2} - \frac{3}{2})(\text{D} - \frac{1}{2})} e^{\frac{1}{2}x} = \frac{x}{-4} e^{\frac{1}{2}x}$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு

$$y = \text{C.F.} + \text{P. I}$$

$$y = \text{A}\, e^{\frac{3}{2}x} + \text{B}\, e^{\frac{1}{2}x} - \frac{x}{4} e^{\frac{x}{2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 37

தீர்க்க : $(\text{D}^2 + 10\text{D} + 25)y = \frac{5}{2} + e^{-5x}$

தீர்வு :

துணைச் சமன்பாடு $m^2 + 10m + 25 = 0$

$\Rightarrow \quad (m + 5)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad m = -5, \; -5$

$\therefore$ நிரப்புச் சார்பு $\text{C.F} = (\text{A}x + \text{B})\, e^{-5x}$

சிறப்புத் தொகை $\text{P. I}_1 = \dfrac{1}{\text{D}^2 + 10\text{D} + 25} \dfrac{5}{2} e^{0x} = \dfrac{1}{25} \left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{1}{10}$

சிறப்புத் தொகை $\text{P.I}_2 = \dfrac{1}{\text{D}^2 + 10\text{D} + 25} e^{-5x} = \dfrac{1}{(\text{D}+5)^2} \text{e}^{-5x}$

$$= \frac{x^2}{2} \left(e^{-5x}\right)$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு

$y = \text{C.F} + \text{P. I}_1 + \text{P.I}_2$

$y = (\text{A}x + \text{B})\, e^{-5x} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{x^2}{2} e^{-5x}$

எடுத்துக்காட்டு 38

$\mathbf{Q_d = 42 - 4p - 4\dfrac{dp}{dt} + \dfrac{d^2p}{dt^2}}$ மற்றும் $\mathbf{Q_s = -6 + 8p}$ என்பன முறையே ஒரு பொருளின் தேவை அளவு மற்றும் அளிப்பு அளவு ஆகியனவற்றைக் குறிக்கிறது. (இங்கு p விலையைக் குறிக்கிறது) சந்தைப் பரிமாற்றத்தில் சமன்நிலை விலையை (equilibrium price)க் காண்க.

தீர்வு :

சமன் நிலை விலையில், $Q_d = Q_s$ ஆக இருக்கும்.

$\therefore \quad 42 - 4p - 4\dfrac{dp}{dt} + \dfrac{d^2p}{dt^2} = -6 + 8p$

$\Rightarrow \quad 48 - 12p - 4\dfrac{dp}{dt} + \dfrac{d^2p}{dt^2} = 0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{d^2p}{dt^2} - 4\dfrac{dp}{dt} - 12\text{p} = -48$

துணைச் சமன்பாடு $m^2 - 4m - 12 = 0$

$\Rightarrow \quad m = 6\,,\ -2$

$\therefore \quad C.F. = Ae^{6t} + Be^{-2t}$

$$P.\ I = \frac{1}{D^2 - 4D - 12}\ (-48)\ e^{0t} \ = \ \frac{1}{-12}\ (-48) = 4$$

பொதுத் தீர்வு

$$p = C.F. + P.\ I \qquad \therefore\ p = Ae^{6t} + Be^{-2t} + 4$$

பயிற்சி 6.5

1) பின் வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $- 10\frac{dy}{dx} + 24y = 0$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ (iv) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

2) தீர்க்க :

(i) $(3D^2 + 7D - 6)y = 0$ (ii) $(4D^2 - 12D + 9)y = 0$

(iii) $(3D^2 - D + 1)y = 0$

3) தீர்க்க :

(i) $(D^2 - 13D + 12)\ y = e^{-2x} + 5e^{x}$

(ii) $(D^2 - 5D + 6)\ y = e^{-x} + 3e^{-2x}$

(iii) $(D^2 - 14D + 49)y = 3 + e^{7x}$

(iv) $(15D^2 - 2D - 1)y = e^{\frac{x}{3}}$

4) $Q_d = 30 - 5P + 2\frac{dP}{dt} + \frac{d^2P}{dt^2}$ மற்றும் $Q_s = 6 + 3P$ என்பன முறையே ஒரு பொருளின் தேவை அளவு மற்றும் அளிப்பு அளவு ஆகியனவற்றைக் குறிக்கின்றன. இங்கு p விலையைக் குறிக்கிறது. சந்தை பரிமாற்றத்தில் சமன்நிலை விலையைக் காண்க.

பயிற்சி 6.6

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செ-க.

1) ஆதி வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடுகளின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

(a) $x\frac{dy}{dx} = y$ (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ (c) $\frac{dy}{dx} = 0$ (d) $x\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$

2) $\frac{d^2y}{dx^2}$ -6 $\sqrt{\frac{dy}{dx}}$ = 0 என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் படி மற்றும் வரிசை முறையே

(a) 2 மற்றும் 1 (b) 1 மற்றும் 2 (c) 2 மற்றும் 2 (d) 1 மற்றும் 1

3) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3\frac{d^3y}{dx^3} + 7\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x + \log x$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி முறையே

(a) 1 மற்றும் 3 (b) 3 மற்றும் 1 (c) 2 மற்றும் 3 (d) 3 மற்றும் 2

4) $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{2}{3}} = \frac{d^2y}{dx^2}$ என்ற சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி முறையே

(a) 3 மற்றும் 2 (b) 2 மற்றும் 3 (c) 3 மற்றும் 3 (d)2 மற்றும் 2

5) $x\,dy + y\,dx = 0$ ன் தீர்வு

(a) $x + y = c$ (b) $x^2 + y^2 = c$ (c) $xy = c$ (d) $y = cx$

6) $x\,dx + y\,dy = 0$ ன் தீர்வு

(a) $x^2 + y^2 = c$ (b) $\frac{x}{y} = c$ (c) $x^2 - y^2 = c$ (d) $xy = c$

7) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ ன் தீர்வு $\frac{1+v^2}{v+v^3}$

(a) $e^y e^x = c$ (b) $y = \log ce^x$ (c) $y = \log(e^x+c)$ (d) $e^{x+y} = c$

8) $\frac{dp}{dt} = ke^{-t}$ (k ஒரு மாறிலி) ன் தீர்வு

(a) $c - \frac{k}{e^t} = p$ (b) $p = ke^t + c$

(c) $t = \log \frac{c-p}{k}$ (d) $t = \log_c p$

9) $(x^2 - y^2)\,dy = 2xy\,dx$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் $y = vx$ என பிரதியிடும்பொழுது சமன்பாடு கீழ் கண்டவைகளில் எதுவாக மாறும்**?**

(a) $dv = \frac{dx}{x}$ (b) $\frac{1-v^2}{v(1+v^2)}\,dv = \frac{dx}{x}$

(c) $\frac{dv}{v^2-1} = \frac{dx}{x}$ (d) $\frac{dv}{1+v^2} = \frac{dx}{x}$

10) $x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ என்ற சமன்பாட்டில் $y = vx$ என பிரதியிட, சமன்பாடு கீழ்கண்டவைகளில் எதுவாக மாறும்?

(a) $\frac{dv}{\sqrt{v^2 - 1}} = \frac{dx}{x}$ (b) $\frac{vdv}{\sqrt{v^2 + 1}} = \frac{dx}{x}$

(c) $\frac{dv}{\sqrt{v^2 + 1}} = \frac{dx}{x}$ (d) $\frac{vdv}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{dx}{x}$

11) $\frac{dy}{dx} + \text{P}y = 0$ என்ற வடிவுடைய சமன்பாட்டின் தீர்வு (P ஆனது x இல் சார்பு)

(a) $y\, e^{\int \text{P}dx} = c$ (b) $y \int \text{P}dx = c$

(c) $x\, e^{\int \text{P}dx} = y$ (d) $y = cx$

12) $\frac{dx}{dy} + \text{P}x = \text{Q}$ என்ற வடிவுடைய சமன்பாட்டின் தீர்வு (P மற்றும் Q என்பன y இல் சார்பு)

(a) $y = \int \text{Q}\, e^{\int \text{P}dx}\, dy + \text{c}$ (b) $y\, e^{\int \text{P}dx} = \int \text{Q}\, e^{\int \text{P}dx}\, dx + \text{c}$

(c) $x\, e^{\int \text{P}dy} = \int \text{Q}\, e^{\int \text{P}dy}\, dy + \text{c}$ (d) $x\, e^{\int \text{P}dy} = \int \text{Q}\, e^{\int \text{P}dx}\, dx + \text{c}$

13) $x\frac{dy}{dx} - y = e^x$ –ன் தொகையீட்டுக் காரணி

(a) $\log x$ (b) $e^{\frac{-1}{x}}$ (c) $\frac{1}{x}$ (d) $\frac{-1}{x}$

14) $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + xy = (1 + x^2)^3$ –ன் தொகையீட்டுக் காரணி

(a) $\sqrt{1 + x^2}$ (b) $\log (1 + x^2)$ (c) $e^{\tan^{-1}x}$ (d) $\log^{(\tan^{-1}x)}$

15) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$ –என்ற சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி

(a) $2 \log x$ (b) e^{x^2} (c) $3 \log(x^2)$ (d) x^2

16) $(\text{D}^2 - \text{D})\, y = e^x$ –என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் நிரப்புச் சார்பு

(a) $\text{A} + \text{B}\, e^x$ (b) $(\text{A}x + \text{B})e^x$ (c) $\text{A} + \text{B}e^{-x}$ (d) $(\text{A}+\text{B}x)e^{-x}$

17) $(\text{D}^2 - 2\text{D} + 1)y = e^{2x}$ –என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் நிரப்புச் சார்பு

(a) $\text{A}e^x + \text{B}e^{-x}$ (b) $\text{A} + \text{B}e^x$ (c) $(\text{A}x + \text{B})e^x$ (d) $\text{A}+\text{B}e^{-x}$

18) $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{5x}$ –என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தொகை

(a) $\frac{e^{5x}}{6}$ (b) $\frac{xe^{5x}}{2!}$ (c) $6e^{5x}$ (d) $\frac{e^{5x}}{25}$

19) $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = e^{3x}$–என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் சிறப்பு தொகை

(a) $\frac{e^{3x}}{2!}$ (b) $\frac{x^2e^{3x}}{2!}$ (c) $\frac{xe^{3x}}{2!}$ (d) $9e^{3x}$

20) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு

(a) $(A + B)e^{x}$ (b) $(Ax + B)e^{-x}$ (c) $Ae^{x} + \frac{B}{e^{x}}$ (d) $(A+Bx)e^{-x}$

இடைச்செருகல் மற்றும் நேர்க்கோடு பொருத்துதல் 7

7.1 இடைச்செருகல் (INTERPOLATION)

இடைச்செருகல் என்பது அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு, கொடுக்கப்படாத ஒரு மதிப்பினைக் காணுகின்ற கலையாகும். அதாவது கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் மதிப்புகளைக் கொண்டு அம்மதிப்புகளுக்கு இடைப்பட்ட மதிப்புகளைக் காண்பதையோ அல்லது நிரப்புவதையோ இடைச்செருகல் என்கிறோம். பின்வரும் அட்டவணையில் ஒரு நகரத்தின் பத்து ஆண்டுக்கு ஒரு முறை கணக்கிடப்படும் மக்கள் தொகை விவரம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டு x :	1910	1920	1930	1940	1950
மக்கள்தொகை $f(x)$: (ஆயிரங்களில்)	12	15	20	27	39

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு 1914, 1923, 1939, 1947 ஆகிய ஆண்டுகளின் மக்கள் தொகையைக் காணும் முறை **இடைச்செருகல்** எனப்படும். 1955, 1960 ஆகிய ஆண்டுகளின் மக்கள் தொகையைக் காணும் முறை புறச் செருகல் எனப்படும்.

இடைச் செருகலைக் காண பின்வருவனவற்றைக் கருத்தில் கொள்க :

(i) $f(x)$-ன் மதிப்புகள் ஏறு வரிசையிலோ அல்லது இறங்கு வரிசையிலோ இருக்க வேண்டும்.

(ii) $f(x)$-ன் மதிப்புகள் சீராக இருக்க வேண்டும். அதாவது x-ன் ஏதாவது இரண்டு மதிப்புகளுக்கிடையே $f(x)$-ன் மதிப்புகளில் திடீர் ஏற்றமோ அல்லது திடீர் இறக்கமோ இருக்கக் கூடாது.

பின்வரும் முறைகளில் இடைச்செருகலைக் காணலாம் :

1) வரைபட முறை, 2) இயற்கணித முறை

7.1.1 வரைபட முறையில் இடைச்செருகல் காணல் (Graphic method of interpolation)

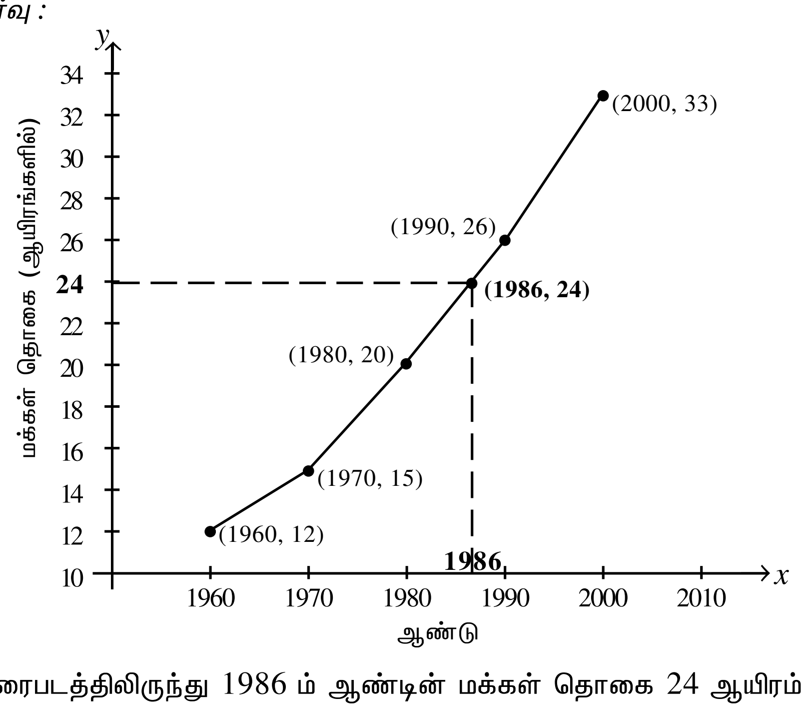
$y = f(x)$ என்க. x-ன் மதிப்புகளுக்கும் அதற்கு ஏற்ற y-ன் மதிப்புகளுக்கும் ஏற்ப வரைபடத்தில் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். இந்த வரை படத்தின் மூலம் கொடுக்கப்பட்ட x-க்கு ஏற்ற y-ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1

பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு 1986 ஆம் ஆண்டின் மக்கள் தொகையை வரைபடத்தின் மூலம் மதிப்பிடுக.

ஆண்டு :	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**
மக்கள்தொகை: (ஆயிரங்களில்)	**12**	**15**	**20**	**26**	**33**

தீர்வு :



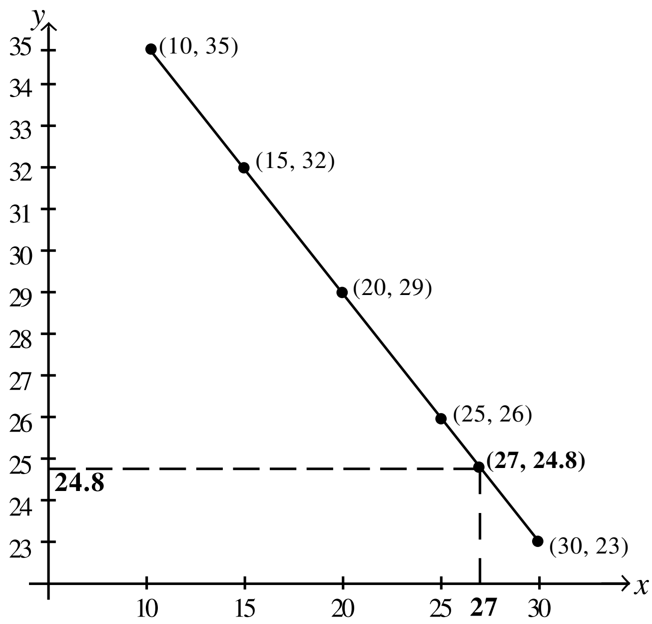
வரைபடத்திலிருந்து 1986 ம் ஆண்டின் மக்கள் தொகை 24 ஆயிரம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

வரைபடத்தின் மூலம், $x = 27$ ஆக இருக்கும்பொழுது y-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	**:**	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**
y	**:**	**35**	**32**	**29**	**26**	**23**

தீர்வு :



$x = 27$ ஆக இருக்கும்பொழுது $y = 24.8$ ஆகும்.

7.1.2 இடைச்செருகலுக்கான இயற்கணித முறைகள்

இடைச்செருகல் காண்பதற்கான கணித முறைகள் பல உள்ளன. அவற்றுள் பின்வரும் சில முறைகளைக் காண்போம்.

(i) திட்டமான வேறுபாடுகள் (Finite differences)

(ii) கிரிகோரி–நியூட்டனின் சூத்திரங்கள் (Gregory-Newton's formulae)

(iii) இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரம் (Lagrange's formula)

7.1.3 திட்டமான வேறுபாடுகள்

$x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற சார்பின் மாறிகளையும் (arguments) $y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ என்ற சார்பலன்களையும் (entries) எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு $y = f(x)$ என்பது இடைச்செருகலில் பயன்படுத்தப்படும் ஒரு சார்பு ஆகும்.

x-ன் மதிப்புகள் ஏறு வரிசையில் இருப்பதாகவும் மற்றும் அவை சம இடைவெளிகளில் இருப்பதாகவும் எடுத்துக்கொள்வோம். சம இடைவெளிகளின் நீளம் h என்போம்.

$x_0,\ x_0 + h,\ x_0 + 2h,\ \ldots\ x_0 + nh$ என்பன x-ன் மதிப்புகள் என்போம். அவற்றிற்குரிய சார்பலன்கள் $f(x_0),\ f(x_0+h),\ f(x_0 + 2h),\ \ldots,\ f(x_0 + nh)$ என்பனவாகும்

முன் நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி (Forward difference operator)

x-ன் எந்த ஒரு மதிப்பிற்கும், முன்நோக்குச் செயலி Δ(டெல்டா)வை

$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ என வரையறுக்கலாம்.

குறிப்பாக, $\Delta y_0 = \Delta f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0) = y_1 - y_0$

$\Delta f(x),\ \Delta[f(x+h)],\ \Delta[f(x+2h)],\ \ldots$ என்பன $f(x)$-ன் முதல்நிலை வேறுபாடுகள் ஆகும்.

$$\begin{aligned}
\Delta^2 f(x) &= \Delta[\Delta\{f(x)\}] \\
&= \Delta[f(x+h) - f(x)] \\
&= \Delta[f(x+h)] - \Delta[f(x)] \\
&= [f(x+2h) - f(x+h)] - [f(x+h) - f(x)] \\
&= f(x+2h) - 2f\,(x+h) + f(x).
\end{aligned}$$

$\Delta^2 f(x),\ \Delta^2\,[f(x+h)],\ \Delta^2\,[f(x+2h)]\ \ldots$ என்பன $f(x)$-ன் இரண்டாம் நிலை வேறுபாடுகள் ஆகும்.

இதே போல் $\Delta^3 f(x),\ \Delta^4 f(x), \ldots \Delta^n f(x),\ \ldots$ என்பன வரையறுக்கப்படுகின்றன.

பின்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி (Backward difference operator)

x-ன் எந்த ஒரு மதிப்பிற்கும், பின்நோக்கு வேறுபாட்டுச் செயலி ∇(நெப்லா) வை

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h) \text{ என வரையறுக்கலாம்.}$$

குறிப்பாக, $\nabla y_n = \nabla f(x_n) = f(x_n) - f(x_n - h) = y_n - y_{n-1}$

$\nabla f(x)$, $\nabla[f(x+h)]$, $\nabla[f(x+2h)]$, ... என்பன $f(x)$-ன் முதல்நிலை வேறுபாடுகள் ஆகும்.

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x) &= \nabla[\nabla\{f(x)\}] = \nabla[f(x) - f(x-h)] \\ &= \nabla[\mathrm{f}(x)] - \nabla[f(x-h)] \\ &= f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)\end{aligned}$$

$\nabla^2 f(x)$, $\nabla^2[f(x+h)]$, $\nabla^2[f(x+2h)]$ ... என்பன $f(x)$ ன் இரண்டாம் நிலை வேறுபாடுகள் ஆகும்.

இதே போல் $\nabla^3 f(x)$, $\nabla^4 f(x), \ldots \nabla^n f(x)$, ... என்பன வரையறுக்கப்படுகின்றன.

இடப்பெயர்வுச் செயலி (Shifting operator)

x-ன் எந்த ஒரு மதிப்பிற்கும், இடப்பெயர்வுச் செயலி E ஐ

$$\mathrm{E}[f(x)] = f(x+h) \text{ என வரையறுக்கலாம்.}$$

குறிப்பாக, $\mathrm{E}(y_0) = \mathrm{E}[f(x_0)] = f(x_0+h) = \mathrm{y}_1$

மேலும், $\mathrm{E}^2[f(x)] = \mathrm{E}[\mathrm{E}\{f(x)] = \mathrm{E}[f(x+h)] = f(x+2h)$

இதேபோல் $\mathrm{E}^3[f(x)] = f(x+3h)$

பொதுவாக $\mathrm{E}^n[f(x)] = f(x+nh)$

Δ க்கும் E க்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு

வரையறையின்படி $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

$$\begin{aligned} &= \mathrm{E}\,f(x) - f(x) \\ \Delta f(x) &= (\mathrm{E}-1)\,f(x) \\ \Rightarrow \quad \Delta &= \mathrm{E} - 1 \\ \text{(அ-து)} \quad \mathrm{E} &= 1 + \Delta \end{aligned}$$

முடிவுகள்

1) மாறிலிச் சார்பின் வேறுபாடுகள் பூச்சியமாக இருக்கும்.

2) $f(x)$ என்பது n ஆம் படி பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் $f(x)$ ன் n ஆம் நிலை வேறுபாடுகள் மாறிலியாகும் மற்றும் $\Delta^{n+1} f(x) = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 3

பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு விடுபட்ட உறுப்பைக் காண்க.

x	:	**1**	**2**	**3**	**4**
$f(x)$	:	**100**	**--**	**126**	**157**

தீர்வு :

$f(x)$-ன் மூன்று மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், $f(x)$ ஒரு இரண்டாம்படி பல்லுறுப்புக் கோவை என எடுத்துக் கொள்வோம்.

எனவே மூன்றாம் நிலை வேறுபாடுகள் பூச்சியமாகும்.

$$\Rightarrow \quad \Delta^3 [f(x_0)] = 0$$

அல்லது $\Delta^3(y_0) = 0$

$$\therefore \quad (E-1)^3 y_0 = 0 \qquad (\because \Delta = E - 1)$$

$$(E^3 - 3E^2 + 3E - 1)\, y_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = 0$$

$$157 - 3(126) + 3y_1 - 100 = 0$$

$$\therefore \quad y_1 = 107$$

எடுத்துக்காட்டு 4

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு 1962 மற்றும் 1965 ஆம் ஆண்டுகளுக்கான உற்பத்திகளைக் காண்க.

ஆண்டு	:	**1961**	**1962**	**1963**	**1964**	**1965**	**1966**	**1967**
உற்பத்தி (டன்களில்)	:	**200**	**--**	**260**	**306**	**--**	**390**	**430**

தீர்வு :

$f(x)$ -ன் ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் $f(x)$ ஒரு நான்காம்படி பல்லுறுப்புக் கோவை என எடுத்துக்கொள்வோம். எனவே ஐந்தாம் நிலை வேறுபாடுகள் பூச்சியமாகும்.

$\therefore \quad \Delta^5 [f(x_0)] = 0$

(அ–து) $\Delta^5 (y_0) = 0$

$\therefore \quad (E-1)^5 (y_0) = 0$

(அ–து) $(E^5 - 5E^4 + 10E^3 - 10E^2 + 5E - 1)\, y_0 = 0$

$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$

$390 - 5y_4 + 10(306) - 10(260) + 5y_1 - 200 = 0$

$\Rightarrow \quad y_1 - y_4 = -130 \quad$ --------------(1)

ஐந்தாம் நிலை வேறுபாடுகள் பூச்சியமாக இருப்பதால், மேலும்

$\Delta^5 [f(x_1)] = 0$

(அ–து) $\Delta^5 (y_1) = 0$

(அ–து) $(E-1)^5\, y_1 = 0$

$(E^5 - 5E^4 + 10E^3 - 10E^2 + 5E - 1)y_1 = 0$

$y_6 - 5y_5 + 10y_4 - 10y_3 + 5y_2 - y_1 = 0$

$430 - 5(390) + 10y_4 - 10(306) + 5(260) - y_1 = 0$

$\Rightarrow \quad 10y_4 - y_1 = 3280 \quad$ ------------(2)

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) களைத் தீர்க்கும்பொழுது நமக்குக் கிடைப்பது

$y_1 = 220$ மற்றும் $y_4 = 350$

$\therefore$ 1962 மற்றும் 1965 ஆம் ஆண்டுகளின் உற்பத்திகள் முறையே 220 டன்கள் மற்றும் 350 டன்கள் ஆகும்.

7.1.4 கிரிகோரி-நியூட்டனின் முன்நோக்கு சூத்திரத்தை தருவிக்கும் முறை

$y = f(x)$ என்பது n ஆம் படி பல்லுறுப்புக்கோவை என்க. x ஆனது $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ என்கின்ற சம இடைவெளியிலும், ஏறு வரிசையிலும்

உள்ள மதிப்புகளைப் பெறும்பொழுது y ஆனது முறையே $f(x_0), f(x_1)$, $f(x_2) \ldots f(x_n)$ ஆகிய $(n+1)$ மதிப்புகளை அடைகின்றது.

$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h$ என்க

(h ஒரு மிகை எண்)

இங்கு $f(x_0) = y_0, \; f(x_1) = y_1, \ldots f(x_n) = y_n$

இப்பொழுது $f(x)$ ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots$$
$$+a_n(x-x_0)\,(x-x_1)\ldots\,(x-x_{n-1}) \quad \text{----------------(1)}$$

$x = x_0$ எனில், $(1) \Rightarrow$

$f(x_0) = \mathrm{a}_0$ அல்லது $a_0 = y_0$

$x = x_1$ எனில், $(1) \Rightarrow$

$f(x_1) = a_0 + a_1 (x_1 - x_0)$ **(அ–து)** $y_1 = y_0 + a_1 h$

$\therefore \quad a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{h} \quad \Rightarrow \quad a_1 =$

$x = x_2$ எனில், $(1) \Rightarrow$

$$f(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)\,(x_2 - x_1)$$

$$y_2 = y_0 + \quad (2h) + a_2\,(2h)\,(h)$$

$$2h^2\,a_2 = y_2 - y_0 - 2\Delta y_0 \qquad \frac{\Delta y_0}{h} \quad \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}$$
$$= y_2 - y_0 - 2(y_1 - y_0)$$
$$= y_2 - 2y_1 + y_0 = \Delta^2 y_0$$

$\therefore \quad a_2 =$

இதே போல்

$a_3 = \dfrac{\Delta^3\,y_0}{3!\,h^3}, \quad a_4 = \dfrac{\Delta^4\,y_0}{4!\,h^4}, \ldots, a_n = \dfrac{\Delta^n\,y_0}{n!\,h^n}$ எனக் கிடைக்கும்.

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ என்பதன் மதிப்புகளை (1) ல் பிரதியிட

$$f(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}\,(x - x_0) + \qquad (x - x_0)\,(x - x_1) + \ldots$$
$$+ \frac{\Delta^n\,y_0}{n!\,h^n}\,(x - x_0)\,(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \quad \text{---------(2)}$$

$u = \dfrac{x - x_0}{h}$ என எடுத்துக்கொண்டால்

$$x - x_0 = hu$$
$$x - x_1 = (x - x_0) - (x_1 - x_0) = hu - h = h(u-1)$$
$$x - x_2 = (x - x_0) - (x_2 - x_0) = hu - 2h = h(u-2)$$
$$x - x_3 = h\,(u - 3)$$

பொதுவாக,

$$x - x_{n\text{-}1} = h\{u - (n-1)\}$$

ஆதலால் (2) ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$f(x) = y_0 + \quad \Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots$$
$$+ \frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-\overline{n-1})}{n!}\Delta^n y_0$$

$u = \dfrac{x - x_0}{h}$. இதுவே கிரிகோரி–நியூட்டனின் முன்நோக்கு சூத்திரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5

x	**:**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
y	**:**	**176**	**185**	**194**	**202**	**212**

எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்பொழுது, *x = 0.2* எனில் *y*ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

0.2 என்பது (x_0, x_1) என்ற முதல் இடைவெளியில் உள்ளது. (அ–து) $(0, 1)$க்கு இடையில் உள்ளது. எனவே இடைச்செருகலுக்கான கிரிகோரி–நியூட்டன் முன்நோக்கு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம். ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் இடைச்செருகலுக்கான சூத்திரம்,

$$y = y_0 + \quad \Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$+\frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!}\Delta^4 y_0 \text{ இங்கு } u = \frac{x-x_0}{h}$$

$h = 1,\ x_0 = 0$ மற்றும் $x = 0.2$ ஆகும்.

$\therefore\ u = \qquad = 0.2$

முன்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை:

x	**y**	**Δy**	**Δ²y**	**Δ³y**	**Δ⁴y**
0	**176**				
		9			
1	185		**0**		
		9		**-1**	
2	194		-1		**4**
		8		3	
3	202		2		
		10			
4	212				

$$\therefore\quad y = \mathbf{176} + \qquad (\mathbf{9}) + \frac{0.2(0.2-1)}{2!}(\mathbf{0})$$

$$+ \qquad (\mathbf{-1}) + \qquad (\mathbf{4})$$

$$= 176 + 1.8 - 0.048 - 0.1344$$

$$= 177.6176$$

$x = 0.2$ எனில், $y = 177.6176$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6

$y_{75} = 2459,\ y_{80} = 2018,\ y_{85} = 1180$ மற்றும் $y_{90} = 402$ எனில் y_{82} ஐக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை பின்வருமாறு எழுதலாம்:

x	:	75	80	85	90
y	:	2459	2018	1180	402

82 என்பது (80, 85) என்ற இடைவெளியில் உள்ளது. எனவே இடைச்செருகலுக்கான கிரிகோரி–நியூட்டன் முன்நோக்கு

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம். நான்கு மதிப்புகள் கொடுக்கப் பட்டிருப்பதால் இடைச்செருகலுக்கான சூத்திரம்,

$$y = y_0 + \quad \Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

இங்கு $u = \dfrac{x - x_0}{h}$

$$h = 5,\ x_0 = 75 \quad x = 82$$

$$\therefore\ u = \qquad = \quad = 1.4$$

முன்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
75	**2459**			
		-441		
80	2018		**-397**	
		-838		**457**
85	1180		60	
		-778		
90	402			

$$\therefore\quad y \quad = 2459 + \frac{1.4}{1!}\ (-441) + \frac{1.4(1.4-1)}{2!}\ (-397)$$

$$+ \quad \frac{1.4(1.4-1)(1.4-2)}{3!}\ (457)$$

$$= 2459 - 617.4 - 111.6 - 25.592$$

$x = 82$ எனில், $y \quad = 1704.408$

எடுத்துக்காட்டு 7

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு $e^{1.75}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	**:**	**1.7**	**1.8**	**1.9**	**2.0**	**2.1**
e^x	**:**	**5.474**	**6.050**	**6.686**	**7.389**	**8.166**

தீர்வு :

ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், இடைச் செருக்கலுக்கான சூத்திரம்,

$$y_x = y_0 + \quad \Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$+ \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

இங்கு $u = \dfrac{x - x_0}{h}$

$h = 0.1,\; x_0 = 1.7 \;\; x = 1.75$

$\therefore\; u = \qquad = \qquad =0.5$

முன்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1.7	**5.474**				
		0.576			
1.8	6.050		**0.060**		
		0.636		**0.007**	
1.9	6.686		0.067		0
		0.703		0.007	
2.0	7.389		0.074		
		0.777			
2.1	8.166				

$$\therefore y \;= 5.474 + \frac{0.5}{1!}(0.576) + \frac{0.5(0.5-1)}{2!}(0.06)$$

$$+ \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{3!}(0.007)$$

$= 5.474 + 0.288 - 0.0075 + 0.0004375$

$x = 1.75$ எனில், $\quad y = 5.7549375$

எடுத்துக்காட்டு 8

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு 80செமீ. லிருந்து 90செ.மீ வரை உயரமுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையினைக் காண்க.

உயரம்(செ.மீ.) x :	**40-60**	**60-80**	**80-100**	**100-120**	**120-140**
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை y :	**250**	**120**	**100**	**70**	**50**

தீர்வு :

முன்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை

x (’க்கு கீழ் உள்ளோர்)	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
60	**250**				
		120			
80	370		**-20**		
		100		**-10**	
100	470		-30		**20**
		70		10	
120	540		-20		
		50			
140	590				

90செமீக்குக் குறைவான உயரம் உடைய மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்போம்.

இங்கு $x = 90$ $u =$ $=$ $= 1.5$

$$y(90) = 250 + (1.5)(120) + \quad (-20)$$

$$+ \quad (-10) + \quad (20)$$

$$= 250 + 180 - 7.5 + 0.625 + 0.46875 \quad \frac{(0.5)(0.5-1)(1.5-2)(1.5-3)}{20 \;\; h \;\; 2! \;\; 3! \;\; 4!}$$

$$= 423.59 \simeq 424$$

80செ.மீ.லிருந்து 90செ.மீ. வரை உயரமுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $y(90) - y(80)$

$$\Rightarrow \quad 424 - 370 = 54.$$

எடுத்துக்காட்டு 9

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு ரூ.30 லிருந்து ரூ.35 வரை கூலி பெறுபவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

கூலி	**x :**	**20-30**	**30-40**	**40-50**	**50-60**
நபர்களின் எண்ணிக்கை	**y :**	**9**	**30**	**35**	**42**

தீர்வு :

முன்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை

x (’க்கு குறைவாக)	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
30	**9**			
		30		
40	39		**5**	
		35		**2**
50	74		7	
		42		
60	116			

ரூ.35க்கும் குறைவாக கூலி பெறுபவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்போம்.

இங்கு $x = 35$, $u = \frac{x-x_0}{h} = \frac{35-30}{10} = 0.5$

கிரிகோரி–நியூட்டனின் முன்நோக்கு சூத்திரத்தின்படி,

$$y(35) = 9 + (0.5)(30) + \frac{(0.5)(0.5-1)}{2!}(5)$$

$$+ \frac{(0.5)(0.5-1)(0.5-2)}{2!}(2)$$

$$= 9 + 15 - 0.6 + 0.1$$

$$= 24 \text{ (தோராயமாக)}$$

ரூ.30 லிருந்து ரூ.35 வரை கூலி பெறுபவர்களின் எண்ணிக்கை $y(35) - y(30) \quad \Rightarrow \; 24 - 9 = 15.$

7.1.5 கிரிகோரி-நியூட்டனின் பின்நோக்கு சூத்திரத்தைத் தருவிக்கும் முறை

$y = f(x)$ என்பது n ஆம் படி பல்லுறுப்புக்கோவை என்க. x ஆனது $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ என்கின்ற சம இடைவெளியிலும், ஏறு வரிசையிலும் உள்ள மதிப்புகளைப் பெறும்பொழுது y ஆனது முறையே $f(x_0), f(x_1), f(x_2) \ldots f(x_n)$ ஆகிய $(n+1)$ மதிப்புகளை அடைகின்றது.

$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots x_n - x_{n-1} = h$ என்க (h ஒரு மிகை எண்)

இங்கு $f(x)$ என்பதை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_n) + a_2(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \ldots$$
$$+ a_n(x-x_n)(x-x_{n-1}) \ldots (x-x_1) \quad \text{-----------}(1)$$

$x = x_n$ எனில் , $(1) \Rightarrow f(x_n) = a_0$ **(அ–து)** $a_0 = y_n$

$x = x_{n-1}$ எனில், $(1) \Rightarrow f(x_{n-1}) = a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n)$

அல்லது $y_{n-1} = y_n + a_1(-h)$ அல்லது $a_1 =$ $\Rightarrow a_1 =$

$x = x_{n-2}$ எனில், $(1) \Rightarrow$

$$f(x_{n-2}) = a_0 + a_1(x_{n-2} - x_n) + a_2(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})$$

$$y_{n-2} = y_n + \quad (-2h) + a_2(-2h)(-h)$$

$$2h^2 a_2 = (y_{n-2} - y_n) + 2\nabla y_n$$
$$= y_{n-2} - y_n + 2(y_n - y_{n-1})$$
$$= y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n = \nabla^2 y_n$$

$$\therefore a_2 =$$

இதேபோன்று பின்வருவனவற்றை நாம் பெறலாம்.

$$a_3 = \frac{\nabla^3 y_n}{3!h^3}, \quad a_4 = \frac{\nabla^4 y_n}{4!h^4} \ldots a_n = \frac{\nabla^n y_n}{n!}$$

$$\therefore \quad f(x) = y_n + \frac{\nabla y_n}{h}(x-x_n) + \quad (x-x_n)(x-x_{n-1}) + \ldots$$
$$+ \frac{\nabla^n y_n}{n!}(x-x_n)(x-x_{n-1}) \ldots (x-x_1) \quad \text{------------}(2)$$

மேலும், $u = \dfrac{x - x_n}{h}$ எனில்,

$$x - x_n = h_u$$
$$x - x_{n-1} = (x-x_n)(x_n - x_{n-1}) = hu + h = h(u+1)$$
$$x - x_{n-2} = (x-x_n)(x_n - x_{n-2}) = hu + 2h = h(u+2)$$
$$x - x_{n-3} = h(u+3)$$

பொதுவாக,

$$x - x_{n-k} = h(u+k)$$

ஆதலால் (2) ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$f(x) = y_n + \quad \nabla y_n + \frac{u(u+1)}{2!}\,\nabla^2 y_n + \dots$$

$$+ \frac{u(u+1)\dots\{u+(n-1)\}}{n!}\,\nabla^n y_n \text{ இங்கு } u =$$

இதுவே கிரிகோரி–நியூட்டனின் பின்நோக்கு சூத்திரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10

ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டு x :	**1961**	**1971**	**1981**	**1991**	**2001**
மக்கள்தொகை y : (ஆயிரங்களில்)	**46**	**66**	**81**	**93**	**101**

***கிரிகோரி-நியூட்டன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி* 1995 ஆம் ஆண்டின் மக்கள் தொகையைக் காண்க.**

$1995 - 2001$

$1!\ h \quad 10$

தீர்வு :

1995 என்பது கடைசி இடைவெளி (1991, 2001)ல் உள்ளது. எனவே கிரிகோரி–நியூட்டனின் பின்நோக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம். ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் இடைச்செருகலுக்கான சூத்திரம்,

$$y = y_4 + \quad \nabla y_4 + \frac{u(u+1)}{2!}\,\nabla^2 y_4 + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\,\nabla^3 y_4$$

$$+ \frac{u(u+1)(u+2)(u+3)}{4!}\,\nabla^4 y_4 \text{ இங்கு } u = \frac{x - x_4}{h}$$

$$h = 10,\ x_4 = 2001 \quad x = 1995$$

$$\therefore\ u = \qquad\qquad = -0.6$$

பின்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை :

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
1961	46				
		20			
1971	66		-5		
		15		2	
1981	81		-3		**-3**
		12		**-1**	
1991	93		**-4**		
		8			
2001	**101**				

$$\therefore \quad y = 101 + \quad (8) + \quad (-4)$$

$$+ \quad (-1)$$

$$+ \quad (-3)$$

$$= 101-4.8+0.48+0.056+0.1008$$

$$\therefore \quad y = 96.8368$$

$\therefore$ 1995 ஆம் ஆண்டின் மக்கள் தொகை 96.837 ஆயிரங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 11

பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு 58 வயதில் முதிர்ச்சியடையக்கூடிய காப்பீடு (policy) ஒன்றின் காப்பீட்டுத் தொகையைக் (premium) காண்க.

வயது	**x : 40**	**45**	**50**	**55**	**60**
காப்பீட்டுத் தொகை	**y : 114.84**	**96.16**	**83.32**	**74.48**	**68.48**

தீர்வு :

ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் இடைச் செருகலுக்கான சூத்திரம்,

$$y = y_4 + \quad \nabla y_4 + \ldots + \frac{u(u+1)(u+2)(u+3)}{4!}\nabla^4 y_4$$

இங்கு $u = \frac{58-60}{5} = -0.4$

பின்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை :

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
40	114.84				
		-18.68			
45	96.16		5.84		
		-12.84		-1.84	
50	83.32		4.00		**0.68**
		-8.84		**-1.16**	
55	74.48		**2.84**		
		-6.00			
60	**68.48**				

$\therefore \quad y \quad = 68.48 + \qquad (-6) + \qquad (2.84)$

$+ \qquad (-1.16) + \qquad (0.68)$

$= 68.48 + 2.4 - 0.3408 + 0.07424 - 0.028288$

$\therefore \quad y \quad = 70.5851052$ (அ–து) $y \simeq 70.59$

$\therefore$ 58 வயதில் முதிர்ச்சியடையக் கூடிய காப்பீடு ஒன்றின் காப்பீட்டுத் தொகை 70.59

எடுத்துக்காட்டு 12

(4.5)-45(0.6)(1.6)(2.6)
1! 1! 2 6 24

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு x = 4.5 க்கு yன் மதிப்பைக் காண்க.

x	:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
y	:	**1**	**8**	**27**	**64**	**125**

தீர்வு :

ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் இடைச் செருகலுக்கான சூத்திரம்,

$$y = y_4 + \quad \nabla y_4 + \ldots + \frac{u(u+1)(u+2)(u+3)}{4!} \nabla^4 y_4$$

இங்கு $u = \dfrac{x - x_4}{h}$

$u = \qquad = -0.5$

பின்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை :

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
1	1				
		7			
2	8		12		
		19		6	
3	27		18		**0**
		37		**6**	
4	64		**24**		
		61			
5	**125**				

$\therefore\ y = 125+ \qquad (61)+ \qquad (24) + \qquad (6)$

$x = 4.5$ எனில், $y = 91.125$

7.1.6 இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரம்

$y = f(x)$ என்பது n ஆம் படி பல்லுறுப்புக்கோவை என்க. x ஆனது $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ என்கின்ற ஏறு வரிசையில் உள்ள மதிப்புகளைப் பெறும்பொழுது y ஆனது முறையே $f(x_0), f(x_1), f(x_2) \ldots f(x_n)$ ஆகிய $(n+1)$ மதிப்புகளை அடைகின்றது (x என்பது சம இடைவெளியில் இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை).

இங்கு $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$.

இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரம்

$f(x) = y_0$

$+ y_1$

$+ \ldots + y_n$

எடுத்துக்காட்டு 13

பின்வரும் அட்டவணையில் $x = 42$ ஆக இருக்கும்பொழுது y-ன் மதிப்பை இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

x	**:**	**40**	**50**	**60**	**70**
y	**:**	**31**	**73**	**124**	**159**

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து,

$x_0 = 40,\ x_1 = 50,\ x_2 = 60,\ x_3 = 70$ மற்றும் $x = 42$

$y_0 = 31,\ y_1 = 73,\ y_2 = 124,\ y_3 = 159$

இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த நமக்குக் கிடைப்பது,

$$y = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$+ y_1$

$+ y_2$

$+ y_3$

$y(42) = 31 \qquad + 73\frac{\text{[illegible]}(x-x_3)}{\text{[illegible]}(x_2-x_3)}$

$+124 \qquad +159$

$= 20.832 + 36.792 - 27.776 + 7.632$

$y = 37.48$

எடுத்துக்காட்டு 14

பின்வரும் அட்டவணையைக் கொண்டு இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $x = 4$ ஆக இருக்கும்பொழுது y-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	**:**	**0**	**3**	**5**	**6**	**8**
y	**:**	**276**	**460**	**414**	**343**	**110**

தீர்வு :

$$x_0 = 0,\ \ x_1 = 3,\ x_2 = 5,\ x_3 = 6,\ x_4 = 8 \text{ மற்றும் } x = 4$$
$$y_0 = 276,\ y_1 = 460,\ y_2 = 414,\ y_3 = 343,\ y_4 = 110$$

என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த நமக்குக் கிடைப்பது,

$$y = y_0$$
$$+ y_1$$
$$+ y_2$$
$$+ y_3$$
$$+ y_4$$
$$= 276 \qquad + 460$$
$$+ 414 \qquad + 343$$
$$+ 110$$
$$= -3.066 + 163.555 + 441.6 - 152.44 + 3.666$$
$$y = 453.311$$

எடுத்துக்காட்டு 15

பின்வரும் அட்டவணையைக் கொண்டு இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $y(11)$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	**:**	**6**	**7**	**10**	**12**
y	**:**	**13**	**14**	**15**	**17**

தீர்வு :

$x_0 = 6,\ x_1 = 7, x_2 = 10, x_3 = 12$ மற்றும் $x = 11$

$y_0 = 13, y_1 = 14, y_2 = 15, y_3 = 17$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த நமக்குக் கிடைப்பது,

$= 13 \qquad\qquad + 14$

$+\ 15 \qquad\qquad +17$

$= 2.1666 - 4.6666 + 12.5 + 5.6666 \quad \therefore \quad y = 15.6666$

பயிற்சி 7.1

1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு $x = 42$ ஆக இருக்கும்போது y-ன் மதிப்பை வரைபடத்தின் மூலம் காண்க.

x	:	20	30	40	50
y	:	51	43	34	24

2) ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

ஆண்டு x :	1940	1950	1960	1970	1980	1990
மக்கள்தொகை y : (இலட்சங்களில்)	20	24	29	36	46	50

$\frac{[illegible]}{[illegible]}$

1976 ம் ஆண்டின் மக்கள் தொகையை வரைபடத்தின் மூலம் காண்க.

3) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு $f(3)$ ஐக் காண்க.

x	:	1	2	3	4	5
f(x)	:	2	5	-	14	32

4) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு விடுபட்ட எண்ணைக் காண்க.

x	:	0	5	10	15	20	25
y	:	7	11	14	--	24	32

5) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு 2000 ஆம் ஆண்டின் ஏற்றுமதியை மதிப்பிடுக.

ஆண்டு x :	1999	2000	2001	2002	2003
ஏற்றுமதி y : (டன்களில்)	443	–	369	397	467

6) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு $x = 145$ ஆக இருக்கும்பொழுது y -ன் மதிப்பை கிரிகோரி–நியூட்டன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

x	:	140	150	160	170	180
y	:	46	66	81	93	101

7) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு $y(8)$ -ன் மதிப்பை கிரிகோரி–நியூட்டன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

x	:	0	5	10	15	20	25
y	:	7	11	14	18	24	32

8) 1975 ஆம் ஆண்டின் மக்கள் தொகையை கிரிகோரி–நியூட்டன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி கணக்கிடுக.

வருடம்	:	1961	1971	1981	1991	2001
மக்கள்தொகை	:	98572	132285	168076	198690	246050

9) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு விட்டம் 96 அலகுகள் உள்ள வட்டத்தின் பரப்பை கிரிகோரி–நியூட்டன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

விட்டம்	x	:	80	85	90	95	100
பரப்பு	y	:	5026	5674	6362	7088	7854

10) கிரிகோரி–நியூட்டன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $x = 85$ ஆக இருக்கும்பொழுது y -ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	:	50	60	70	80	90	100
y	:	184	204	226	250	276	304

11) கிரிகோரி–நியூட்டன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $y(22.4)$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	:	19	20	21	22	23
y	:	91	100	110	120	131

12) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $y(25)$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	:	20	30	40	50
y	:	512	439	346	243

13) $f(0) = 5, f(1) = 6, f(3) = 50, f(4) = 105$ எனில் இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f(2)$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

14) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு, இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $x = 5$ எனில், y -ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	:	1	2	3	4	7
y	:	2	4	8	16	128

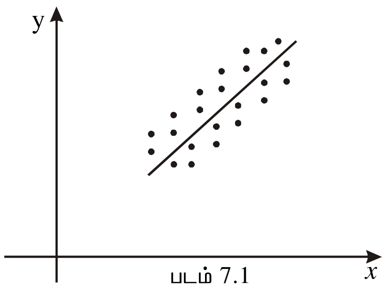
7.2 நேர்க்கோடு பொருத்துதல்

பொதுவாக பல துறைகளில் இரண்டு (அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட) மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்புகள் குறித்து ஆராய வேண்டிய அவசியம் உள்ளது.

உதாரணமாக ஒரு குழந்தையின் எடையானது அதன் வயதுடன் தொடர்புடையது; ஒரு பொருளின் விலையானது அப்பொருளின் தேவையோடு தொடர்புடையது; ஒரு வாகனத்தின் பராமரிப்புச் செலவானது அது பயன்படுத்தப்பட்ட காலத்தோடு தொடர்புடையது.

7.2.1 சிதறல் வரைபடம் (Scatter diagram)

இரு மாறிகள் x மற்றும் y என்பன ஒரு ஆணின் வயது மற்றும் எடையைக் குறிக்கின்றது என எடுத்துக் கொண்டால், $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ என்பன n ஆண்களின் வயதையும் $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ என்பன முறையே அவர்களின் எடையையும் குறிக்கின்றன என்போம். $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots (x_n, y_n)$ என்ற புள்ளிகளை ஒரு செவ்வகல ஆயத்தொலைகளில் குறியிடுவோம். இவ்வாறு குறியிடுவதால் வரைபடத்தில் கிடைக்கும் புள்ளிகளின் கணத்தை **சிதறல் வரைபடம்** என்போம்.



படம் 7.1

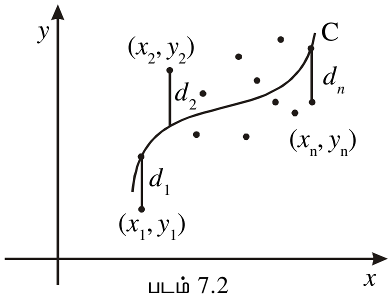
சிதறல் வரைபடம் மூலம் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கான புள்ளிகளை அணுகி வருமாறு ஒரு சீரான வளைவரை இருக்கக்கூடும் என்பதை நாம் காணலாம். இத்தகைய வளைவரையை **அணுகி வருகின்ற வளைவரை** என்போம். மேலே உள்ள படம் **7.1** ல்

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகள் ஒரு நேர்க்கோட்டை அணுகி வருகின்றன என்பதையும் மற்றும் இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே ஒரு நேரியல் தொடர்பு இருப்பதையும் உணரலாம்.

7.2.2 மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கை (Principle of least squares)

பொதுவாக கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு ஒன்றுக்கும் மேற்பட்ட வளைவரைகள் பொருந்துவது போல் தோன்றும். எனவே நேர்க்கோடுகள் வரையும்பொழுது மிகச் சிறந்த பொருத்தமான ஒரு நேர்க்கோட்டிற்குரிய வரையறையைக் கவனத்தில் கொள்வது அவசியமாகும்.

மதிப்புகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... (x_n, y_n) என்பனவற்றை புள்ளிகளாக எடுத்துக் கொள்வோம். கொடுக்கப்பட்ட $x = x_1$ என்ற மதிப்பிற்கு ஏற்ற y-ன் மதிப்பிற்கும் வளைவரை C-ன் மூலம் கிடைக்கக் கூடிய அதே y-ன் மதிப்பிற்கும் வித்தியாசம் இருக்கக் கூடும். (படம் 7.2)



படம் 7.2

இந்த வித்தியாசத்தை d_1 என்க. d_1 ஐ விலக்கம் அல்லது பிழை எனக் கூறலாம். இங்கு d_1 என்பது மிகை எண், குறை எண் அல்லது பூச்சியமாக இருக்கலாம். அதே போன்று x_2, x_3, ... x_n -களுக்கான விலக்கங்கள் முறையே d_2, d_3, ... d_n எனக் கிடைக்கும்.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு ஏற்ற மிகச் சிறந்த பொருத்தமான வளைவரையின் அளவை d_1^2, d_2^2, ... d_n^2-களிலிருந்து பெறலாம்.

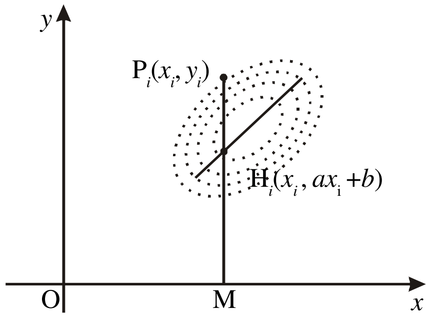
கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை அணுகி வருகின்ற அனைத்து வளைவரைகளிலும் $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + ... + d_n^2$ ஆனது எவ்வளைவரைக்கு மீச்சிறு மதிப்பைக் கொண்டுள்ளதோ அவ்வளைவரையே மிகச் சிறந்த பொருத்தமான வளைவரை என்போம். அவ்வாறு அணுகி வருகின்ற வளைவரையானது நேர்க்கோடாக இருப்பின் அதனை மிகச் சிறந்த பொருத்தமான நேர்க்கோடு (line of best fit) என்போம்.

7.2.3 மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கை மூலம் இயல் நிலைச் சமன்பாடுகளைத் தருவித்தல்

கொடுக்கப்பட்ட $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ என்ற n புள்ளிகளுக்கு பொருந்தும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = ax + b \qquad \text{------------(1)}$$

a மற்றும் b -களின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு (1) ஆனது நேர்க்கோட்டுக் குடும்பம் ஒன்றைக் குறிக்கும். (1)-ற்கு சிறந்ததாகவும் பொருத்தமானதாகவும் உள்ள a மற்றும் b களின் மதிப்புகளை நாம் காணவேண்டும். இம் மதிப்புகளைக் காண மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கையினைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.



படம் 7.3

$P_i\,(x_i, y_i)$ என்பது சிதறல் வரைபடத்தில் (படம் 7.3) பொதுவான ஒரு புள்ளி என்க. P_iM ஐ x-அச்சுக்கு செங்குத்தாகவும், $y = ax + b$ ஐ H_i ல் வெட்டுமாறும் வரைக. H_i ன் x அச்சுத் தொலைவு x_i மற்றும் y - அச்சுத் தொலைவு $ax_i + b$ ஆகும்.

$$P_iH_i = P_iM - H_iM$$

$$= y_i - (ax_i + b) \text{ என்பது } y_i \text{ -ன் விலக்கம் ஆகும்.}$$

மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கையின்படி a மற்றும் b களின் மதிப்புகளைக் காண வேண்டும். எனவே,

$E = \sum_{i=1}^{n} P_iH_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2$ என்பது சிறும மதிப்பைப் பெற வேண்டும்.

பெறும அல்லது சிறும மதிப்பிற்கான நிபந்தனைகளின்படி a மற்றும் b இவற்றைப் பொறுத்து E -ன் பகுதி வகைக் கெழுக்கள் தனித்தனியே பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad \frac{\partial E}{\partial a} = 0 \;\Rightarrow -2\sum_{i=1}^{n} x_i[y_i - (ax_i + b)] = 0$$

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \text{-------------(2)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 0 \ \Rightarrow \ -2 \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)] = 0$$

i.e., $\Sigma y_i - a\Sigma x_i - nb = 0$

$$\Rightarrow \ a \sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \text{-------------(3)}$$

சமன்பாடுகள் (2) மற்றும் (3) ஆகியவை இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள் எனப்படும். இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதன் மூலம் a மற்றும் b களின் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

குறிப்பு

$\boldsymbol{y = a + bx}$ என்ற வடிவில் உள்ள சமன்பாடு மிகப் பொருத்தமான நேர்கோடாக அமைவதற்கான இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள்

$$\boldsymbol{na + b\Sigma x_i = \Sigma y_i}$$
$$\boldsymbol{a\Sigma x_i + b\Sigma x_i^2 = \Sigma x_i y_i}$$

எடுத்துக்காட்டு 16

$\Sigma x = 10$, $\Sigma y = 19$, $\Sigma x^2 = 30$, $\Sigma xy = 53$ மற்றும் $n = 5$ என்பனவற்றுக்கு ஒரு நேர்க்கோட்டைப் பொருத்துக.

தீர்வு :

மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடு $y = ax + b$ என்க.

$\Sigma y = a\Sigma x + nb$

$\Sigma xy = a\Sigma x^2 + b\Sigma x$

$\Rightarrow \ 10a + 5b = 19$ ------------(1)

$30a + 10b = 53$ ------------(2)

(1) மற்றும் (2) களைத் தீர்ப்பதன் வாயிலாக $a = 1.5$ மற்றும் $b = 0.8$ எனப் பெறலாம்.

$\therefore$ எனவே மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$y = 1.5x + 0.8$

எடுத்துக்காட்டு 17

$\Sigma x = 10$, $\Sigma y = 16.9$, $\Sigma x^2 = 30$, $\Sigma xy = 47.4$ மற்றும் $n = 7$ என்பனவற்றுக்கு தக்கபடி வரையப்பட்ட மிகப் பொருத்தமான கோட்டில் x-அச்சின் வெட்டுத் துண்டைக் காண்க.

தீர்வு :

மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடு $y = ax + b$ என்க.

இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள்

$$\Sigma y = a\Sigma x + nb$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x^2 + b\Sigma x$$

$$\Rightarrow \quad 10a + 7b = 16.9 \quad \text{-----------}(1)$$

$$30a + 10b = 47.4 \quad \text{-----------}(2)$$

(1) மற்றும் (2) களைத் தீர்ப்பதன் மூலம்,

$a = 1.48$ and $b = 0.3$ எனக் கிடைக்கும்.

$\therefore$ மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = 1.48x + 0.3$$

எனவே x-அச்சின் வெட்டுத் துண்டு $= -\dfrac{0.3}{1.48}$

எடுத்துக்காட்டு 18

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு ஒரு நேர்க்கோடு பொருத்துக.

x :	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
y :	**1**	**1**	**3**	**4**	**6**

தீர்வு :

மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடு $y = ax + b$

இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள்

$$a\Sigma x + nb = \Sigma y \quad \text{------------}(1)$$

$$a\Sigma x^2 + b\Sigma x = \Sigma xy \quad \text{------------}(2)$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து

x	y	x^2	xy
0	1	0	0
1	1	1	1
2	3	4	6
3	4	9	12
4	6	16	24
10	**15**	**30**	**43**

இம்மதிப்புகளை சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) களில் பிரதியிட நமக்குக் கிடைப்பது,

$10a + 5b = 15$ ------------(3)

$30a + 10b = 43$ ------------(4)

இவற்றைத் தீர்க்க, நமக்குக் கிடைப்பது,

$a = 1.3$ and $b = 0.4$

$\therefore$ மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $y = 1.3x + 0.4$.

எடுத்துக்காட்டு 19

கொடுக்கப்பட்டுள்ள $\frac{x_i - 14}{2}$ **விவரங்களுக்கு ஒரு நேர்க்கோடு பொருத்துக**

x :	**4**	**8**	**12**	**16**	**20**	**24**
y :	**7**	**9**	**13**	**17**	**21**	**25**

தீர்வு :

ஆதியை $\frac{12+16}{2} = 14$ என்ற இடத்தில் எடுத்துக்கொள்வோம்.

$u_i =$ என்க. இங்கு $n = 6$

மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடு $y = au + b$ என்க.

இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள்,

$a\Sigma u + nb = \Sigma y$ ----------(1)

$a\Sigma u^2 + \mathrm{b}\Sigma u = \Sigma uy$ ----------(2)

x	y	u	u^2	uy
4	7	-5	25	-35
8	9	-3	9	-27
12	13	-1	1	-13
16	17	1	1	17
20	21	3	9	63
24	25	5	25	125
மொத்தம்	**92**	**0**	**70**	**130**

இம்மதிப்புகளை (1) மற்றும் (2) களில் பிரதியிட நமக்குக் கிடைப்பது,

$a = 1.86$ மற்றும் $b = 15.33$

$\therefore$ மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடு

$$y = 1.86\left(\frac{x-14}{2}\right)+15.33 = 0.93x + 2.31$$

எடுத்துக்காட்டு 20

பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒரு நேர்க்கோடு பொருத்துக.

x :	**100**	**200**	**300**	**400**	**500**	**600**
y :	**90.2**	**92.3**	**94.2**	**96.3**	**98.2**	**100.3**

தீர்வு :

$u_i = \dfrac{x_i-350}{50}$ மற்றும் $v_i = y_i - 94.2$ என்க. இங்கு $n = 6$.

மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடு $v = au + b$

இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள் $a\Sigma u + nb = v$ ----------(1)

$a\Sigma u^2 + b\Sigma u = \Sigma uv$ ----------(2)

x	y	u	v	u^2	uv
100	90.2	-5	-4	25	20
200	92.3	-3	-1.9	9	5.7
300	94.2	-1	0	1	0
400	96.3	1	2.1	1	2.1
500	98.2	3	4	9	12
600	100.3	5	6.1	25	30.5
மொத்தம்		**0**	**63**	**70**	**70.3**

இம்மதிப்புகளை சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) களில் பிரதியிட நமக்குக் கிடைப்பது $a = 1.0043$ and $b = 1.05$.

மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடு $v = 1.0043\, u + 1.05$

$$\Rightarrow \quad y = 0.02x + 88.25$$

பயிற்சி 7.2

1) சிதறல் வரைபடம் – விளக்குக.

2) மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கையைக் கூறுக.

3) $\Sigma x = 75$, $\Sigma y = 115$, $\Sigma x^2 = 1375$, $\Sigma xy = 1875$ மற்றும் $n = 6$ எனில், ஒரு மிகச் சிறந்த நேர்க்கோடு பொருத்துக.

4) $\Sigma x = 10$, $\Sigma y = 25$, $\Sigma x^2 = 30$, $\Sigma xy = 90$ மற்றும் $n = 5$ எனில், ஒரு மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோட்டினைப் பொருத்தி அதன் சா–வு மற்றும் y-அச்சின் வெட்டுத் துண்டு ஆகியவற்றைக் காண்க.

5) பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி $y = ax + b$ எனும் நேர்க்கோட்டைப் பொருத்துக.

x :	0	1	3	6	8
y :	1	3	2	5	4

6) 5 மாணவர்களைக் கொண்ட குழு ஒன்று ஒரு பயிற்சிக்கு முன்பும் அதன் பின்பும் பெற்ற மதிப்பெண்களின் விவரம்,

பயிற்சிக்கு முன்பு பெற்ற மதிப்பெண்கள் :	3	4	4	6	8
பயிற்சிக்கு பின்பு பெற்ற மதிப்பெண்கள் :	4	5	6	8	10

மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி பொருத்தமான நேர்க் கோட்டினைக் காண்க.

7) பின்வரும் விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோட்டினைக் காண்க.

x :	100	120	140	160	180	200
y :	0.45	0.55	0.60	0.70	0.80	0.85

8) பின்வரும் விவரங்களுக்கு மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோட்டினைக் காண்க. மேலும் $x = 3.5$ எனில் y -ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

x :	0	1	2	3	4
y :	1	1.8	3.3	4.5	6.3

9) பின்வரும் விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடு காண்க.

பயன்படுத்தப்பட்ட நீரின் ஆழம் (செ.மீ.களில்)	x :	0	12	24	36	48
சராசரி விளைச்சல் (டன்கள் / ஏக்கர்)	y :	35	55	65	80	90

10) மாதிரிக்காக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட ஆறு மருந்துக் கடைகளின் விளம்பரச் செலவுகள் (மொத்தச் செலவின் விழுக்காட்டில்) மற்றும் நிகர லாபங்கள் (மொத்த விற்பனையின் விழுக்காட்டில்) பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது.

விளம்பரச் செலவு :	0.4	1.0	1.3	1.5	2.0	2.8
நிகர இலாபம் :	1.90	2.8	2.9	3.6	4.3	5.4

மிகப்பொருத்தமான நேர்க்கோட்டைப் பொருத்துக.

11) பத்து மாணவர்கள் ஆங்கிலப் பாடம் படித்த நேரம் (மணிகளில்) மற்றும் அவர்கள் தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் விவரம் பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது.

படித்த நேரம் (மணிகளில்)	x :	4	9	10	12	14	22
தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள்	y :	31	58	65	68	73	91

(i) $y = ax + b$ என்ற நேர்க்கோட்டைப் பொருத்துக.

(ii) 17 மணி நேரம் படித்த ஒரு மாணவர் பெறும் மதிப்பெண்ணைக் காண்க.

பயிற்சி 7.3

1) $\Delta f(x) =$

(a) $f(x+h)$ (b) $f(x)-f(x+h)$

(c) $f(x+h)-\mathrm{f}(x)$ (d) $f(x)-f(x-h)$

2) $E^2 f(x) =$

(a) $f(x+h)$ (b) $f(x+2h)$

(c) $f(2h)$ (d) $f(2x)$

3) $E =$

(a) $1+\Delta$ (b) $1 - \Delta$ (c) $\nabla + 1$ (d) $\nabla - 1$

4) $\nabla f(x+3h) =$

(a) $f(x+2h)$ (b) $f(x+3h)$-$f(x+2h)$

(c) $f(x+3h)$ (d) $f(x+2h) - f(x - 3h)$

5) $h = 1$ எனில், $\Delta(x^2) =$

(a) $2x$ (b) $2x - 1$ (c) $2x+1$ (d) 1

6) $y = ax + b$ என்பது மிகச் சிறந்த பொருத்தமான நேர்கோடாக அமைவதற்கான a மற்றும் b என்பனவற்றைக் கணக்கிட தேவையான இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள்

(a) $a\Sigma x_i^2 + b\Sigma x_i = \Sigma x_i y_i$ மற்றும் $a\Sigma x_i + nb = \Sigma y_i$

(b) $a\Sigma x_i + b\Sigma x_i^2 = \Sigma x_i y_i$ மற்றும் $a\Sigma x_i^2 + nb = \Sigma y_i$

(c) $a\Sigma x_i + nb = \Sigma x_i y_i$ மற்றும் $a\Sigma x_i^2 + b\Sigma x_i = \Sigma y_i$

(d) $a\Sigma x_i^2 + nb = \Sigma x_i y_i$ மற்றும் $a\Sigma x_i + b\Sigma x_i = \Sigma y_i$

7) மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடான $y = 5.8\ (x\text{-}1994) + 41.6$ -ல் $x = 1997$ எனில், y ன் மதிப்பு

(a) 50 (b) 54 (c) 59 (d) 60

8) ஓர் நேர்கோட்டைப் பொருத்துவதற்கான ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மேலும் $\Sigma x = 0$ மற்றும் $\Sigma y = 15$ ஆகும். இப்பொழுது மிகச் சிறந்த பொருத்தமான நேர்கோட்டின் y -அச்சின் வெட்டுத்துண்டு,

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

9) $y = ax + b$ என்ற நேர்கோட்டைப் பொருத்துவதற்கான இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள் $10a + 5b = 15$ மற்றும் $30a + 10b = 43$ ஆகும். இப்பொழுது மிகப்பொருத்தமான நேர்கோட்டின் சா–வு,

(a) 1.2 (b) 1.3 (c) 13 (d) 12

10) n புள்ளிகள் (x, y) ஐ மீச்சிறு வர்க்க முறையில் $y = ax + b$ எனும் நேர்க்கோட்டில் பொருத்தும்பொழுது $4 = 4a + b$ மற்றும் $\Sigma xy = 120a + 24b$ என்ற இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன எனில், $n =$

(a) 30 (b) 5 (c) 6 (d) 4

நிகழ்தகவு பரவல்கள் 8

8.1 சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் நிகழ்தகவு சார்பு
(Random variable and probability function)

சமவாய்ப்பு மாறி

சமவாய்ப்பு மாறி என்பது கூறுவெளி S –ன் மீது வரையறுக்கப்பட்டுள்ள மெய்–மதிப்புடைய ஒரு சார்பாகும் மற்றும் இம்மாறி $-\infty$ லிருந்து ∞ வரையிலான மெய்–மதிப்புகளை பெறும்.

8.1.1 தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி

X என்ற மாறி முடிவுறு அல்லது முடிவுறா ஆனால் எண்ணிடத்தக்க மதிப்புகள் பெறுமாயின் அம்மாறி ஒரு **தனித்த சமவாய்ப்பு** மாறியாகும்.

உதாரணங்கள்

(i) ஒரு நாணயத்தை இருமுறை சுண்டுதலை ஒரு சோதனையாக கருதுவோம். இச்சோதனையின்கூறுப்புள்ளிகள் $s_1 = (H, H)$, $s_2 = (H, T)$, $s_3 = (T, H)$ மற்றும் $s_4 = (T, T)$ ஆகும்.

சமவாய்ப்பு மாறி X : இருமுறை சுண்டும் பொழுது கிடைத்த "தலைகளின் எண்ணிக்கை"

எனவே $X(s_1) = 2$; $X(s_2) = 1$; $X(s_3) = 1$; $X(s_4) = 0$

$$R_X = \{0, 1, 2\}$$

s என்பது கூறுவெளியில் உள்ள ஒரு உறுப்பாகும். இவ்வாறாக $X(s)$ என்பது வெளிப்பாடு s –யை தொடர்பு கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறி X யை குறிக்கின்ற மெய் எண்ணாகும்.

X –ன் எல்லா மதிப்புகளையும் கொண்ட கணம் R_X, X –ன் **வீச்சுக் கணம்** என அழைக்கப்படுகிறது.

(ii) ஒரு சோடி பகடைகளை உருட்டுவதை சோதனையாகக் கொள்வோம். எனவே கூறுவெளி

$$S = \{(1, 1)\ (1, 2) \ldots (1, 6)$$
$$\begin{matrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{matrix}$$
$$(6, 1)\ (6, 2) \ldots (6, 6)\}$$

சமவா–ப்பு மாறி X : இரு பகடைகளின் மீது காணும் எண்களின் கூடுதல் என்பது ஆகும். எனவே $R_X = \{2, 3, 4, ..., 12\}$.

(iii) ஒரே நேரத்தில் 3 நாணயங்களை சுண்டுவதை சோதனையாக கொள்வோம்.

சமவா–ப்பு மாறி X: இச்சோதனையில் கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கையை குறிப்பதாயின், இங்கு 0, 1, 2, 3 என்கிற மதிப்புகளை X ஏற்கிறது.

$$S = \{HHH, HHT, HTT, TTT, TTH, THH, HTH, THT\}$$

$$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

(iv) ஒரே நேரத்தில் 4 நாணயங்களை சுண்டுகின்ற ஒரு சமவா–ப்பு சோதனையில், கிடைக்கப்பெறுகின்ற தலைகளின் எண்ணிக்கையை குறிப்பிடுகையில்

$R_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ என்பதாகும்.

ஒரு புத்தகத்தில் ஒவ்வொரு பக்கத்தில் காணப்படும் அச்சுப்பிழைகளின் எண்ணிக்கை, ஒரு நிறுவனத்தின் தொலைபேசி பணியாளரால் பெறப்படும் தொலைபேசி அழைப்புகளின் எண்ணிக்கை ஆகியவை தனித்த சமவா–ப்பு மாறிகளுக்கான சில உதாரணங்களாகும்.

8.1.2 தனித்த சமவா-ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு சார்பு மற்றும் நிகழ்தகவு பரவல்

X என்ற தனித்த சமவா–ப்பு மாறி பெறும் மதிப்புகள் $x_1, x_2, x_3 \ldots$ என்க. $p(x_i) = P[X = x_i]$ என்றவாறு உள்ள சார்பு p ஆனது

(i) $p(x_i) \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots$

(ii) $\sum_i p(x_i) = 1$

என்ற நிபந்தனைகளை நிறைவு செ–யுமாயின், p நிகழ்தகவு சார்பு அல்லது நிகழ்தகவு **திண்மச் சார்பு** என்று அழைக்கப்படுகிறது.

$(x_i, p(x_i))$என்கிற எல்லா சோடிகளின் தொகுப்பு X –ன் நிகழ்தகவு பரவல் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

இரு நாணயங்களை சுண்டுகிற சோதனையை கருதுவோம். X என்கிற சமவா-ப்புமாறி சோதனையில் பெறப்படும் தலைகளின் எண்ணிக்கையை குறிப்பதாக கொள்வோம்.

X :	**0**	**1**	**2**
$\mathbf{p}(x_i)$ **:**	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$\mathbf{p}(x_i)$ ஒரு நிகழ்தகவு திண்மச் சார்பா என அறிக.

தீர்வு :

(i) இங்கு ஒவ்வொரு $p(x_i) > 0$ மற்றும்

(ii) $\Sigma p(x_i) = p(0) + p(1) + p(2)$ என்பதனை எளிதில் காணலாம்.

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

எனவே $p(x_i)$ நிகழ்தகவு திண்மச்சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

இரு பகடைகளை உருட்டும் போது கிடைக்கும் எண்களின் கூடுதல் தொகையை X என்கிற சமவா-ப்பு மாறி குறிப்பதாக கொள்வோம். X -ன் நிகழ்தகவு பரவலானது

X :	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
$p(x_i)$ **:**	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$\mathbf{p}(x_i)$ ஒரு நிகழ்தகவு திண்மச் சார்பா என ஆரா-க?

தீர்வு :

(i) இங்கு ஒவ்வொரு $p(x_i) > 0$ மற்றும்

(ii) $\Sigma p(x_i) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{36} = 1$ எனவும் இருப்பது கவனிக்கத்தக்கது.

எனவே $p(x_i)$ நிகழ்தகவு திண்மச்சார்பாகும்.

8.1.3 குவிப்புப் பரவல் சார்பு (c.d.f.)

X ஒரு தனித்த சமவா–ப்பு மாறி என்க.

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$= \sum_i p(x_i)$, i -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $x_i \leq x$ என அமையுமாறு கூட்டுத்தொகை கணக்கிடப்படுகிறது, எனில் சார்பு $F(x)$ –யை, X –ன் குவிப்புப் பரவல் சார்பு என அழைக்கிறோம்.

குறிப்பு : $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

எடுத்துக்காட்டு 3

X என்கிற சமவா-ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு சார்பு பின்வருமாறு.

X ன் மதிப்பு, x :	**−2**	**−1**	**0**	**1**	**2**	**3**
$p(x)$:	**0.1**	**k**	**0.2**	**$2k$**	**0.3**	**k**

(i) k -ன் மதிப்பைக் காண்க

(ii) X -ன் குவிப்புப் பரவல் சார்பைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

(i) $\sum_i p(x_i) = 1$ ஆகையால்

$$p(-2) + p(-1) + p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = 1$$

$$0.1 + k + 0.2 + 2k + 0.3 + k = 1 \Rightarrow k = 0.1$$

எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவு சார்பு பின்வருமாறு மாறுகிறது.

x	:	-2	-1	0	1	2	3
$p(x)$	:	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1

(ii) குவிப்புப் பரவல் சார்பு $F(x) = P(X \leq x)$

x	$F(x) = P(X \leq x)$
-2	$F(-2) = P(X \leq -2) = 0.1$
-1	$F(-1) = P(X \leq -1) = P(X = -2) + P(X = -1)$
	$= 0.1 + 0.1 = 0.2$
0	$F(0) = P(X \leq 0) = P(X=-2) + P(X=-1) + P(X = 0)$
	$= 0.1 + 0.1 + 0.2 = 0.4$
1	$F(1) = P(X \leq 1) = 0.6$
2	$F(2) = P(X \leq 2) = 0.9$
3	$F(3) = P(X \leq 3) = 1$

எனவே $F(x) = 0$, $x < -2$ எனில்

$= 0.1$, $-2 \leq x < -1$ எனில்

$= 0.2$, $-1 \leq x < 0$ எனில்

$= 0.4$, $0 \leq x < 1$ எனில்

$= 0.6$, $1 \leq x < 2$ எனில்

$= 0.9$, $2 \leq x < 3$ எனில்

$= 1$, $x \geq 3$ எனில்.

எடுத்துக்காட்டு 4

X என்கிற சமவா-ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு சார்பு பின்வருமாறு.

X	**:**	**0**	**1**	**2**	**3**
$p(x)$	**:**	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

(i) $P(X \leq 1)$ (ii) $P(X \leq 2)$ (iii) $P(0 < X < 2)$

இவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) $P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = p(0) + p(1)$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

(ii) $P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{29}{30}$$

பிறிதொரு முறை

$$P(X \le 2) = 1 - P(X > 2)$$

$$= 1 - P(X = 3) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

(iii) $P(0 < X < 2) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$

8.1.4 தொடர் சமவா-ப்பு மாறி

தொடர்ச்சியான (continuous) மதிப்புகளை ஏற்கும், அதாவது வரையறுக்கப்பட்ட ஓர் இடைவெளியிலுள்ள எல்லா மதிப்புகளையும் பெறவல்ல சமவா–ப்பு மாறியே, **தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி** எனப்படும்.

உதாரணமாக,

(i) மழைநாளில் பொழியும் மழையின் அளவு

(ii) தனிநபர்களின் உயரங்கள் (iii) தனிநபர்களின் எடைகள்

8.1.5 நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (Probability density function)

சார்பு f ஆனது X என்கிற தொடர் சமவா–ப்பு மாறியின் **நிகழ்தகவு சார்பு** அல்லது **நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாக (p.d.f)** இருக்கவேண்டுமானால் கீழ்கண்ட நிபந்தனைகளை நிறைவு செ–யவேண்டும்.

(i) $f(x) \ge 0$ (x –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்)

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

குறிப்பு :

(i) சமவாய்ப்பு மாறி X, (a, b) என்ற இடைவெளியில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$.

(ii) $P(X = a) = \int_a^a f(x)\, dx = 0$

(iii) $P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b)$

8.1.6 தொடர் பரவல் சார்பு

X என்பது, $f(x)$ என்கிற நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பை உடைய ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி எனில் $F_X(x) = P(X \le x)$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$$

என்ற சார்பு X –ன் **பரவல் சார்பு** அல்லது **குவிப்புப் பரவல் சார்பு** என அழைக்கப்படுகிறது.

பண்புகள் :

குவிப்பு பரவல் சார்பு கீழ்கண்ட பண்புகளை பெற்றுள்ளது.

(i) $\underset{x \to -\infty}{Lt}\ F(x) = 0$ அதாவது $F(-\infty) = 0$

(ii) $\underset{x \to \infty}{Lt}\ F(x) = 1$ அதாவது $F(\infty) = 1$

(iii) தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி X –ன் குவிப்புப் பரவல் சார்பு F மற்றும் நிகழ்தகவு சார்பு f எனில் F வகையிடத்தக்க புள்ளிகளில்

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

எடுத்துக்காட்டு 5

தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி X -ன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} k(2-x) & ;\ 0 < x < 2 \text{ எனில்} \\ 0 & ;\ \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

எனில் k -ன் மதிப்பை காண்க.

கூறெடுப்பு உத்திகள் மற்றும் புள்ளியியல் உய்த்துணர்தல் 9

9.1 கூறெடுத்தல் மற்றும் பிழைகளின் வகைகள் (Sampling and types of errors)

கூறெடுத்தல் நம் அன்றாட வாழ்வில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. சமைக்கும் பொழுது ஒரு சில சோற்றை பதம் பார்த்து அவைகள் நன்றாக சமைக்கப்பட்டுள்ளனவா என ஒருவர் சோதிப்பதும் மற்றும் தானிய வகை ஒன்றினை வாங்க விரும்பும் வியாபாரி ஒருவர், சிறு அளவில் தானியத்தை சோதிப்பதும் கூறெடுத்தலுக்கான உதாரணங்களாகும். நமது பெரும்பான்மையான முடிவுகள் ஒரு சில உருபடிகளை சோதித்தறிந்து எடுக்கப்படுகின்றன.

குழு ஒன்றினைச் சார்ந்த உறுப்புக்களின் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சிறப்பியல்புகளின் மாறுபாட்டையோ, அவைகளின் அளவை மதிப்பிடுதலிலோ தான் புள்ளியியல் ஆ–வு ஒன்றின் மையக் கருத்தாக உள்ளது. புள்ளியியல் ஆ–விற்கு உட்படுத்தப்படும் இத்தகைய உறுப்புக்களின் அல்லது அலகுகளின் (units) தொகுதியை **முழுமைத் தொகுதி** (Population) என்போம். எனவே ஆரா–தலுக்குரிய இத்தகைய உறுப்புக்களின் சேர்ப்பு அல்லது தொகுப்பினை புள்ளியியலில் முழுமைத் தொகுதி எனப்படுகிறது. முழுமைத் தொகுதி ஆனது முடிவுறு அல்லது முடிவுறா தொகுதியாக இருக்கலாம்.

9.1.1 கூறெடுத்தல் மற்றும் கூறுகள்

புள்ளியியலில் ஆ–வுக்கான முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையில் அலகுகளை (உதாரணமாக குடும்பங்கள், நுகர்வோர், நிறுவனங்கள் போன்றவற்றை) ஆரா–வதற்கு எடுத்துக்கொள்ளும் முறையானது கூறெடுப்பு (sampling) முறையாகும். புள்ளியியல் முறைமை **(statistical regularity)** யைப் பின்பற்றியே கூறெடுப்பு முறைகள் கையாளப்படுகின்றன. இந்த கொள்கையின்படி ஒரு பெரிய தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் தேவையான எண்ணிக்கையில் அமைந்த ஒரு கூறிலுள்ள உறுப்புகள், சராசரியாக அந்த தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகளின் சிறப்பியல்புகளைப் பெற்றிருப்பது அநேகமாக உறுதி ஆகும்.

முழுமைத்தொகுதியின் பிரிக்க இயலாத மிகச்சிறியப் பகுதியை **அலகு** அல்லது **உறுப்பு** (unit) என்கிறோம். உறுப்பை சரியாகவும் தெளிவாகவும் வரையறுக்கப்படல் வேண்டும். உதாரணமாக குடும்பம் என்ற உறுப்பை வரையறுக்கும் பொழுது,ஒரு நபர் இரு குடும்பங்களைச் சேர்ந்தவராக இருத்தல் கூடாது. மேலும் ஒரு குடும்பத்தில் உள்ள எந்த நபரும் விடுபடாமலிருக்க வேண்டும்.

ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் முடிவுறு உபகணத்தை **கூறு** (sample) எனவும், கூறிலுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையை **கூறின்** அளவு (sample size) எனவும் வரையறுப்போம்.

கூறிலிருந்து பெறப்பட்ட விபரங்களை பகுத்தறிந்து அதன்மூலம் நாம் முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றி அறிந்து கொள்ளலாம்.

9.1.2 *முழுமைத்தொகுதி அளவை மற்றும் கூறு அளவை* (Parameter and Statistic)

முழுமைத்தொகுதியின் புள்ளியியல் மாறிகளான சராசரி (μ), பரவற்படி (σ^2), விகித சமம் (proportion) (P) என்பன முழுமைத்தொகுதியின் அளவைகளாகும். கூறெடுத்தலில் இருந்து கிடைக்கப்படும் புள்ளியியல் அளவுகளான சராசரி ($\overline{X}$), பரவற்படி (s^2), விகித சமம் (p) என்பன **கூறு அளவைகள்** எனப்படும்.

கூறெடுப்பு முறைகள் முழுமைத்தொகுதியின் அளவைகளைப் பற்றி அறிந்து கொள்ள உதவும் கருவியாக உள்ளன. முழுமைத்தொகுதி அளவைகளைப் பற்றி உயத்துணர, கூறெடுப்பு விவரங்கள் அடிப்படையில் மதிப்பிடுவதே கூறு அளவையாகும்.

9.1.3 *கூறெடுத்தலின் அவசியம்* (Need for sampling)

ஒரு கம்பெனியின் கச்சா பொருட்கள் துறையானது உருபடிகளை அதிக அளவில் தருவித்து அதை தன் உற்பத்தி துறைக்கு எப்பொழுது தேவையோ அப்பொழுது தருகிறது என்க. அந்த உருபடிகளை எடுத்துக் கொள்வதற்கு முன் ஆ–வுத் துறையானது அதனை ஆ–வு அல்லது சோதனை செ–து தங்களுடைய தேவைக்கேற்ற தரம் கொண்டுள்ளவைகளாக உள்ளனவா என சோதிக்கிறது. அப்பொழுது

(i) தருவிக்கப்பட்ட எல்லா உருபடிகளையும் சோதிக்கலாம் அல்லது

(ii) அதிலிருந்து கூறு ஒன்றை எடுத்து, அதிலுள்ள குறைபாடு களுடைய உருபடிகளை ஆ–வு செ–து கண்டறிவதின் மூலம்,

முழுமைத்தொகுதியில் குறைபாடுகள் உள்ள உருபடிகளின் எண்ணிக்கையை தோராயமாக கணக்கிடலாம்.

முதல் வகையானது **முழுக் கணக்கிடல்** முறை (census) எனப்படும். இந்த முறையில் உள்ள இரண்டு குறைபாடுகளாவன :

(i) நேரம் வீணாகுதல் (ii) செலவுகள் அதிகமாதல்

இரண்டாவது கூறெடுப்பு முறையில் இரண்டு நன்மைகள் உள்ளன. (i) குறைந்த செலவு (ii) குறைவான ஏற்புடைய நேரத்தில் நல்ல முடிவுகள்.

தேவையில்லாதவைகளை ஒதுக்க வேண்டிய சமயத்தில் கூறெடுப்பு முறை மிகவும் பயன்படக் கூடியதாக உள்ளது. நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட புள்ளியியல் கூறெடுப்பு முறையிலிருந்து, குறைந்த நேரத்தில், குறைந்த செலவில், மிக துல்லியமான முடிவுகளைப் பெறலாம். ஆகவே நல்ல முடிவுகளை எதிர்பார்க்கும் இடங்களில் மிகச்சிறந்த கருவியாக கூறெடுப்பு முறை உள்ளது எனில் அது மிகையாகாது.

9.1.4 கூறெடுப்பு முறை திட்டத்தில் உள்ள படிகள் (Elements of sampling plan)

கூறெடுத்தலை திட்டமிடுவதிலும் அதை நிறை வேற்றுவதிலும் உள்ள முக்கியமான படிகள் பின்வருமாறு:

(i) நோக்கங்கள் (Objectives)

புள்ளியியல் கணக்கெடுப்பிற்கான அடிப்படை நோக்கங்களை திட்டவட்டமாகவும் தெளிவாகவும் முதலில் முடிவு செ–ய வேண்டும். அவ்வாறு சரியாக வரையறுக்கப் படவில்லை எனில், புள்ளியியல் ஆ–வின் நோக்கம் வீணாகிவிடும். உதாரணமாக, தேசிய மயமாக்கப்பட்ட வங்கி ஒன்று, தன்னிடம் சேமிப்புக் கணக்கு வைத்துள்ள வாடிக்கையாளர்களுக்கு ஓராண்டு காலத்தில் அது வழங்கிய சேவையின் தரத்தை அறிய விரும்புகிறது எனக் கொள்க. வாடிக்கையாளர்களிடமிருந்து, தன்னுடைய சேவையின் தரத்தை அறிந்து ஆரா–தல் என்பதையே கூறெடுத்தலின் நோக்கமாகக் கொள்ள வேண்டும்.

(ii) கருத்தில் கொள்ள வேண்டிய முழுமைத் தொகுதி (Population to be covered)

புள்ளியியல் கணக்கெடுப்பின் அடிப்படை நோக்கங்களைப் பொறுத்து, முழுமைத் தொகுதி நன்றாக வரையறை செ–யப்படட வேண்டும். சோதிக்கப்படும் முழுமைத் தொகுதியின் சிறப்பியல்பு களையும் தெளிவாக வரையறுத்தல் வேண்டும். உதாரணமாக, தன் சேவையின் தரத்தைப் பற்றி சோதிக்க, ஒரு வங்கி தன் சேமிப்புக் கணக்கு வாடிக்கையாளர்களின் கருத்துணர்வுகளை ஆராயும்பொழுது, அவ்வங்கியிலுள்ள எல்லா சேமிப்புக் கணக்கு வாடிக்கையாளர்களையும் கருத்தில். கொள்ள வேண்டும். வங்கியிலுள்ள சேமிப்புக் கணக்கு வாடிக்கையாளர்கள் அனைவரையும் சோதிக்கப்படக்கூடிய முழுமைத் தொகுதியாக (population) கருத வேண்டும்.

(iii) கூறெடுப்பின் வடிவம் (Sampling frame)

தீர்மானித்த முழுமைத் தொகுதியைப் பெறுவதற்கு வழிகாட்டுதலாக பட்டியல், படம் அல்லது நாம் ஏற்கத் தக்க வடிவில் ஏதேனும் ஒன்று இருத்தல் அவசியம். இத்தகைய பட்டியல் அல்லது படம் போன்றவற்றையே நாம் கூறெடுப்பின் வடிவம் (frame) என்கிறோம். பட்டியல் அல்லது படம் ஆனது முடிந்த வரையில் குறைகளற்றதாக இருத்தல் வேண்டும். இந்த வடிவம், நமக்கு கூறின் உறுப்புக்களைத் தெரிவு செ–ய உதவும். ஒரு வங்கி தான் வழங்கிய சேவையைப் பற்றி சேமிப்புக் கணக்கு வாடிக்கையாளர்களின் கருத்துக்களை அறியும் சோதனையில், அனைத்து வாடிக்கையாளர்களின் சேமிப்புக் கணக்கு எண்களை கூறெடுப்பு வடிவமாகக் கொள்வோம்.

(iv) கூறெடுத்தலின் ஓர் அலகு அல்லது உறுப்பு (Sampling unit)

கூறு ஒன்றினை தெரிவு செ–வதற்கு ஏதுவாக முழுமைத் தொகுதியை அலுகுகளாகப் பிரிக்க வேண்டும். இத்தகைய பிரிப்பு தெளிவாக இருத்தல் அவசியம். முழுமைத் தொகுதியின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஏதேனும் ஒரேயொரு கூறில்தான் இருக்க வேண்டும். ஒரு வங்கியிலுள்ள அனைத்து சேமிப்புக் கணக்கு வாடிக்கையாளர்களையும் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறெடுத்தால், அக்கூறுள்ள ஒவ்வொரு சேமிப்புக் கணக்கு வாடிக்கையாளரும் ஓர் உறுப்பு அல்லது அலகு என அழைக்கப்படுவர்.

(v) கூறு தேர்வு செ-தல் (Sampling selection)

புள்ளியியல் சோதனைக்கான அடிப்படை நோக்கங்களைக் கருத்திற்கொண்டே, ஒரு கூறின் உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையையும் மற்றும் உறுப்புக்களைத் தேர்வு செ–யும் முறையையும் முடிவு செ–தல் வேண்டும். மதிப்பீடு செ–ய உள்ள முழுமைத் தொகுதியின் அளவைப் பொறுத்தே கூறினைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

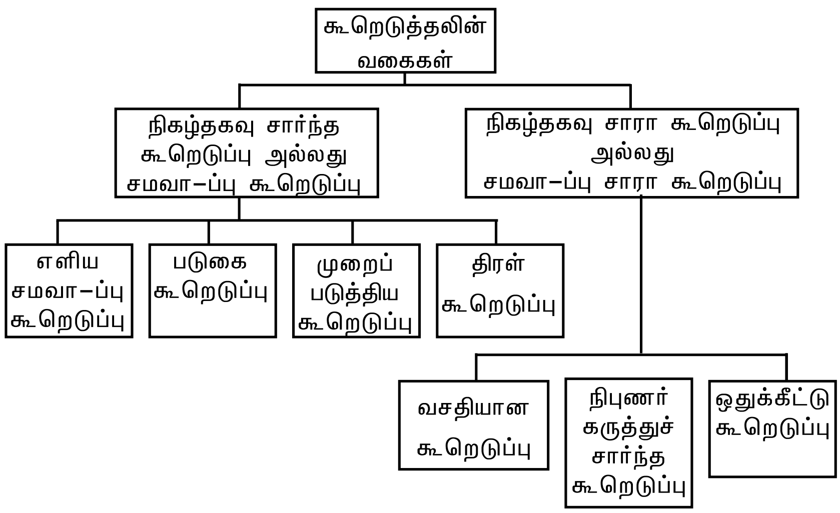
(vi) விவரங்களைச் சேகரித்தல் (Collection of data)

செலவினங்களைக் கருத்தில் கொண்டும், எதிர்பார்க்கும் மதிப்பீட்டின் துல்லியத்தைப் பொறுத்தும், விவரங்களை சேகரிக்கும் முறையை தீர்மானித்தல் வேண்டும். விவரங்களை நேரிடையாகக் கண்டறிதல், விடையளிப்பவரிடம் நேர்காணல் மற்றும் அஞ்சல் மூலம் விவரங்களைச் சேகரித்தல் போன்ற சில முறைகளில் விவரங்களை சேகரிக்கலாம்.

(vii) விவரங்களை பகுத்தா-தல் (Analysis of data)

சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களை முறையாக வகைப்படுத்திய பின்னர், உகந்த ஆ–வு முறைக்கு உட்படுத்த வேண்டும். பகுத்தா–வின் முடிவுகளைப் பொறுத்தே, முழுமைத் தொகுதியின் அளவைப் பற்றி இறுதி முடிவு காண வேண்டும்.

9.1.5 கூறெடுத்தலின் வகைகள்



விவரங்களின் தன்மை மற்றும் விசாரணையின் வகை ஆகியனவற்றைப் பொறுத்தே, முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து, கூறு ஒன்றினைத் தேர்ந்தெடுக்கும் முறை அமையும். கூறெடுத்தலை பின்வருமாறு இரண்டு தலைப்புகளில் வகைப்படுத்தலாம்.

(i) **நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பு அல்லது சமவாய்ப்புக் கூறெடுப்பு**

(ii) **நிகழ்தகவு சார்ந்திராத கூறெடுப்பு அல்லது சமவாய்ப்பு சார்ந்திராத கூறெடுப்பு.**

(i) ***நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பு*** (Probability sampling)

நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பு முறையில் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு கூறுக்குள் சேர்க்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு பூச்சியமற்றதாக **(non-zero chance)** இருக்க வேண்டும்.

நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பின் வகைகள் :

(a) ***எளிய சமவா-ப்பு கூறெடுப்பு*** (Simple Random Sampling)

நிதழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பின் அடிப்படை எளிய வா–ப்புக் கூறெடுப்பாகும். எளிய சமவா–ப்புக் கூறெடுப்பானது நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பின் வகைகளில் அடிப்டையானதாகும். எளிய சமவா–ப்பு கூறெடுப்பு முறையில், முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் கூறு ஒன்றில் சேர்க்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு சமமாக இருக்கும். இம்முறையில் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள தேவைப்படும் எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளின் சேர்ப்புக்களை கூறெடுத்தலுக்குப் பயன்படுத்தக் கூடிய வா–ப்பு சம அளவில் இருக்கும். உறுப்புக்களை, முழுமைத் தொகுதியில் மீள இடல் (replacement) அல்லது மீள இடாதிருத்தல் (without replacement) எனும் வகையில் கூறெடுப்பினை நிகழ்த்தலாம். கூறெடுப்பானது, மீள இடல் முறையில் இருப்பின், ஒரு உறுப்பினைத் தேர்வு செ–த பின்னர், அந்த உறுப்பினை வேறொரு உறுப்பினைத் தேர்வு செ–வதற்கு முன்பாகவே மீண்டும் முழுமைத் தொகுதியில் சேர்க்கப்படுதல் வேண்டும். எனவே கூறெடுப்பு மீள இடல் முறையில், முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள

உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை ஒரு மாறிலியாக இருக்கும். அதாவது முழுமைத் தொகுதியின் அளவு மாறாதிருக்கும்.

N உறுப்புகளைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n உறுப்புகளை மீள இடாதிருத்தல் முறையில் தெரிவு செ–ய ஒருவர் விரும்புகிறார் எனில் ஒவ்வொரு தெரிவு செ–யப்பட்ட n உறுப்புக ளாலான கூறுக்கும் சமமான நிதழ்ககவு இருந்தாக வேண்டும். ஆகவே N கூறுகள் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n உறுப்புக்கள் கொண்டு கூறினை எடுக்க ${}^{N}c_{n}$ வழிகள் உள்ளன. n உறுப்புக்களைக் கொண்ட கூறு ஒன்று N அளவுள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தெரிவு செ–யப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{{}^{N}c_{n}}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு வங்கியானது ஓராண்டு காலத்தில் தான் வழங்கிய சேவையின் தரம் பற்றிய கருத்தினை சேமிப்புக் கணக்கு வாடிக்கையாளர்களிடமிருந்து அறிய விரும்புகிறது எனக்கொள்வோம். சேமிப்புக் கணக்கு வாடிக்கையாளர்கள் பட்டியலிலுள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை 500 என்க. இந்த 500 லிருந்து 50 நபர்களைக் கொண்ட கூறு ஒன்றினை தெரிவு செ–து, நேர்காணலை நடத்துவதற்கு பல வழிமுறைகள் உள்ளன. அவைகளில் பொதுவான இரண்டு வழிகள் பின்வருமாறு :

(1) *குலுக்கல் முறை* (Lottery method) :

சேமிப்புக் கணக்கு வைத்திருப்பவர்களின் கணக்கு பதிவு எண்களை ஒவ்வொன்றாக 500 துண்டு காகிதத்தில் எழுதி அதை ஒரு பெட்டியில் இட்டு நன்றாக குலுக்கி அதிலிருந்து 50 துண்டு சீட்டுக்களைத் தெரிந்தெடுக்கலாம். முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை குறைவாகவும் அதை எடுத்தாள போதுமானதாகவும் இருந்தால் மட்டுமே இந்த முறையைப் பின்படுத்தலாம்.

(2) *சம வா-ப்பு எண்கள் முறை* (Random numbers method):

முழுமைத் தொகுதியின் அளவு பெரியதாக இருந்தால், மிகச்சிக்கனமாக நடைமுறைப் படுத்தக் கூடிய முறை வா–ப்பு

எண்கள் முறை ஆகும். வா–ப்பு அட்டவணையை இந்த முறைக்கு நாம் பயன்படுத்தி கூறு ஒன்றினைத் தெரிவு செ–யலாம்.

(b) *படுகை கூறெடுப்பு* (Stratified Random Sampling):

இம்முறையில், முழுமைத்தொகுதியானது பல பிரிவுகளாக அல்லது படுகைகளாகப் (**strata**) பிரிக்கப்படுகின்றது. ஒவ்வொரு படுகையிலுள்ள உறுப்புகள் ஒரே படித்தானவையாக (homogeneous) இருக்கும் (heterogeneous). வெவ்வேறு படுகைகளிலுள்ள உறுப்புகள் பல படித்தானவைகளாக இருக்கும். இதற்கு அடுத்தபடியாக ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் தேவையான அளவு கொண்ட எளிய சமவா–ப்பு கூறெடுப்பை தெரிந்தெடுக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் கூறு எடுக்கும்பொழுது அக்கூறிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை பின் வரும் இரண்டு வழிகளில் முடிவு செ–யலாம் (i) அனைத்துக் கூறுகளும் சம அளவு எண்ணிக்கையிலிருத்தல் (ii) படுகையிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைக்கு சம விகிதத்திலிருத்தல்.

உதாரணமாக, ஒரு நுகர்பொருள் தயாரிக்கும் நிறுவனத்தின் மேலாளர், விற்பனையை அதிகரிக்கும் நோக்கில், புதிய தயாரிப்புப் பொருளைப் பற்றிய நுகர்வோரின் நாட்டத்தினை அறிய விரும்புகின்றார். விற்பனையில் மாற்றத்தை ஏற்படுத்தக் கூடிய மூன்று நகரங்களை, மூன்று படுகைகளாகக் கருதுகின்றார். நுகர்வோர்கள் ஒரு நகரத்தில் ஒரே மாதிரியாகவும், நகரகங்களுக்கிடையே மாறுபட்டும் உள்ளனர். ஒவ்வொரு நகரத்திலிருந்தும் நுகர்வோர்களைத் தெரிவு செ–து, அவர்களைக் கொண்டு ஒரே சமவா–ப்புக் கூறெடுத்து ஆ–வு செ–யலாம். கூறெடுத்தலின் முடிவுகளைக் கொண்டு முழுமைத் தொகுதியான அனைத்து நுகர்வோர்களின் நாட்டத்தைத் தீர்மானிக்கலாம்.

(c) *முறைப்படுத்திய கூறெடுப்பு:*

முறைப்படுத்திய கூறெடுத்தல் ஆனது கூறு ஒன்றினை தெரிவு செ–வதற்கு ஏதுவான முறை ஆகும். எளிய சமவா–ப்பு கூறெடுத்தலுடன் ஒப்பிடுகையில், இம்முறைக்கு ஆகும் காலமும், செலவும் குறைவாக இருக்கும்.

இந்த முறையில் முழுமைத்தொகுதியலிருந்து உறுப்புகள் சீரான இடைவெளிகளில் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றன. இதற்கு ஏதுவாக, உறுப்புகளை எண்கள், அகரவரிசை, இடஞ்சார்ந்த போன்ற ஏதாவது ஒரு வரிசையில் அமைத்தல் வேண்டும். முழுமைத்தொகுதியின் பட்டியல் முழுமையாக கிடைக்கப் பெறின் இந்த முறை பயன்படுத்தப் படுகின்றது.

N அளவுள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n அளவுள்ள கூறு ஒன்றினை முறைப்படுத்திய கூறெடுத்தலில் தெரிவு செ–ய வேண்டுமானால், முதலில் $1 \le j \le k$ எனுமாறு j ஆவது உறுப்பினை வா–ப்பு முறையில் எடுக்கவும். இங்கு $k = \frac{N}{n+1}$ மற்றும் k ஐ முழு எண்ணாக மாற்ற வேண்டும். $j, j+k, \ldots, j+(n\text{-}1)\,k$ -ஆவது உறுப்புகள் முறைப்படுத்திய கூறு ஒன்றினை அமைக்கின்றன.

உதாரணமாக, 1, 2, ... , 105 என்றவாறு வரிசையாயுள்ள 105 மாணவர்களிலிருந்து 9 மாணவர்களை முறைப்படுத்திய கூறெடுத்தலில் முறையில் தெரிவு செ–வதாகக் கொள்வோம். எனவே $k = \frac{105}{10} = 10.5 \simeq 11$ ஆகும். முதலில் 1, 2, ..., 11 க்குள் உள்ள ஒரு மாணவனை தெரிவு செ–ய வேண்டும். இம்மாணவன் **3** ஆம் இடத்தில் உள்ளதாகக் கொள்வோம். 3, 14, 25, 36, 47, 58, 69, 80, 91 ஆகிய இடங்களிலுள்ள 9 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு கூறினை இம்முறையில், தெரிவு செ–யலாம்.

(d) ***திரள் கூறெடுப்பு*** **(Cluster sampling)**

ஒவ்வொரு திரளும் முழுமைத் தொகுதியின் பிரதிநிதியாக அமையும் வண்ணம், முழுமைத் தொகுதியை பல திரள்களாகப் பிரிக்கும்பொழுது, திரள்முறைக் கூறெடுத்தல் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

சென்னை மாநகரத்தில் ஒவ்வொரு குடும்பத்திலுள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையைக் காணும்பொருட்டு ஓர் ஆ–வு மேற்கொள்ளப்படுகிறது என்க. இந்நகரத்தினை பலத் திரள்களாகப் பிரித்து, அவைகளில் இருந்து வா–ப்பு முறையில் ஒரு சில திரள்களைத் தெரிவு செ–யலாம். இவ்வாறு தெரிவு செ–யப்பட்ட திரள்களிலுள்ள ஒவ்வொரு குடும்பமும் சேர்ந்து கிடைப்பது ஒரு கூறாகும்.

திரள் கூறெடுத்தலின்பொழுது பின்வருவனவற்றைக் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

i) துல்லியமான முடிவுகளைப் பெறுவதற்கு திரள்கள் சிறிய அளவுகளில் இருத்தல் வேண்டும்.

ii) ஒவ்வொருத் திரளிலும் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை கூடியவரை சமமாக இருக்க வேண்டும்.

(ii) *நிகழ்தகவு சாரா கூறெடுப்பு* (Non-Probability Sampling)

நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பு மற்றும் நிகழ்தகவு சாரா கூறெடுப்பு ஆகியவைகளுக்கிடையே உள்ள மிக முக்கியமான வேறுபாடு, நிகழ்தகவு சாரா கூறெடுப்பில், முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒரு உறுப்பு, கூறு ஒன்றில் சேர்க்கப்படுவதற்கான வா–ப்பினை கூற இயலாது என்பதாகும். இம்முறையில் நிகழ்தகவுக் கொள்கை (principle of probability)யைப் பயன்படுத்தாமல் கூறெடுத்தலுக்காக உறுப்புகள் தெரிவு செ–யப்படுகின்றன. குறைந்த செலவு, விரைவாக ஆரா–தல் செயலாக்கத்தில் வசதி போன்ற நிறைகள் நிகழ்தகவு சாராக் கூறெடுத்தலில் காணப்பட்டாலும், தெரிவு செ–வதிலுள்ள சாதகத்தன்மையால் துல்லியமான முடிவுகளைப் பெற இயலாது. முதலா–வில் (pilot studies) நிகழ்தகவு சாராக் கூறெடுத்தல் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

நிகழ்தகவு சாராக் கூறெடுப்பின் முறைகள் :

(a) நோக்கமுள்ள கூறெடுப்பு (Purposive sampling)

இவ்வகை கூறெடுத்தலில், வரையறுக்கப்பட்ட நோக்கத்தோடு கூறு தெரிவு செ–யப்படுகிறது. கூறிலுள்ள உறுப்புகள், ஆ–வு செ–பவரின் விருப்பத்திற்கேற்ப அமைகின்றன.

உதாரணமாக, மதுரை நகர மக்களிடையே வாழ்க்கைத் தரம் உயர்ந்துள்ளதாக தம் ஆ–வில் சொல்ல விரும்பும் ஒரு ஆ–வாளர், மதுரை நகரில் ஏழைகள் வசிக்கும் பகுதியை ஒதுக்கிவிட்டு, வசதி படைத்தோர் வாழும் பகுதியிலிருந்து நபர்களைத் தெரிவு செ–து கூறு அமைப்பார். இவ்வாறு கூறெடுத்தலை தம் வசதிக்கேற்ப செ–து கொள்ளும் நிலை, நோக்கமுள்ள கூறெடுத்தல் வகையில் ஏற்படும்.

(b) ஒதுக்கீட்டு கூறெடுப்பு (Quota sampling)

நோக்கமுள்ள கூறெடுத்தலின் கட்டுப்படுத்தப்பட்ட வகைக் கூறெடுப்பே, ஒதுக்கீட்டு கூறெடுப்பாகும். முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள

பல குழுக்களிலிருந்து எடுக்கப்படவிருக்கும் கூறுகளுக்கு ஒதுக்கீடு செ–த பின்னர், அக்குழுக்களிலிருந்து தேவையான கூறுகளை நோக்கமுள்ள கூறெடுப்பு முறையில் எடுக்கலாம். கருத்துக்கணிப்பு மற்றும் சந்தை ஆ–வு கணக்கெடுப்பு ஆகியவற்றில் ஒதுக்கீட்டு கூறெடுப்பு பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(c) ***நிபுணர் கருத்துச் சார்ந்த கூறெடுப்பு*** **(Expert opinion sampling or expert sampling)**

முடிவுகளை மேற்கொள்வதற்கு ஏதுவாக உள்ள துறையைச் சார்ந்த நிபுணர்களின் அனுபவங்கள் மற்றும் கருத்துக்களைக் கொண்டு கூறெடுத்தல் அமைந்தால், அது நிபுணர் கருத்தின் பேரில் ஏற்படுத்தப்பட்ட கூறெடுத்தலாகும். விவரங்கள் சரிவர அமையப் பெறாத சமயங்களில் இம்முறை பயனளிக்கும். நிபுணர்கள் பாரபட்சமாக இருந்தாலும், முடிவுகளை பாதிக்குமாறு அவர்களின் விருப்பு வெறுப்புக்கள் அமைந்தாலும் இவ்வகை கூறெடுத்தலில் குறை ஏற்படும்.

9.1.6 ***கூறெடுப்பு முறை சார்ந்த மற்றும் சாரா பிழைகள்*** **(Sampling and non-sampling errors)**

விவரங்களை சேகரித்தல், விவரங்களை முறைப்படுத்துதல், விவரங்களை பகுத்தா–தல் ஆகியனவற்றில் ஏற்படும் பிழைகளை (i) கூறெடுப்பு முறை சார்ந்த பிழைகள் (sampling errors) (ii) கூறெடுப்பு முறை சாரா பிழைகள் (non sampling errors) என இருவகைகளாக பிரிக்கலாம்.

(i) ***கூறெடுப்பு முறை சார்ந்த பிழைகள்*** **(Sampling errors)**

முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகளை மதிப்பீடு செ–யவும், அவைகளைப் பற்றி ஆ–ந்தறியவும், முழுமைத் தொகுதியின் ஒரு பகுதியை மட்டுமே கூறெடுத்து ஆ–வு செ–வதால் கூறெடுப்பு முறை சார்ந்த பிழைகள் ஏற்படுகின்றன. கூறின் அளவு அதிகரிக்கப் படுமானால், கூறெடுப்பு முறை சார்ந்த பிழைகள் குறையும்.

கூறெடுப்பு முறைசார்ந்த பிழைகள் ஏற்படுவதற்கான காரணங்களில் சிலவற்றைக் காண்போம் :

(a) ***குறைபாடு முறையில் கூறெடுத்தல்*** **(Faulty selection of the sample)**

குறைபாடுள்ள உத்தியைக் கையாண்டு, ஆ–வாளர் ஒருவர் சுயவிருப்பின் அடிப்படையில் கூறொன்றினைத் தெரிவு செ–யும்பொழுது பிழைகள் ஏற்படும்.

(b) ***பிரதியிடல்*** **(Substitution)**

சமவா–ப்புக் கூறில் உள்ள ஒரு உறுப்பினால் சிக்கல் ஏற்படும்பொழுது, அதற்கு மாற்றாக முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள வேறொரு சாதகமான உறுப்பினை கூறில் சேர்க்கலாம். இவ்வாறு ஒரு உறுப்பிற்கு பதிலாக வேறொரு சாதகப் பிரதியிடுவதால் கூறெடுப்பு முறை சார்ந்த பிழை ஏற்படும்.

(c) ***கூறெடுப்பு உறுப்புகளை குறைபாடு முறையில் பிரித்தல்*** **(Faulty demarcation of sampling units)**

கூறெடுப்பு உறுப்புகளைக் குறைபாடுகளுடன் பிரித்தல் காரணமாகக் குறிப்பாக விவசாயச் சோதனைகளில் பிழை ஏற்பட வா–ப்புள்ளது

(ii) ***கூறெடுப்பு முறை சாரா பிழைகள்*** **(Non-sampling errors)**

விவரங்களைக் கூர்ந்து நோக்குதல், வகைப்படுத்தல், பகுத்தா–தல் ஆகிய நிலைகளில் கூறெடுப்பு முறை சாரா பிழைகள் எழுகின்றன.

மாதிரி அளவிடல் (sample survey) அல்லது முழு கணக்கெடுப்பின் (census) திட்டமிடல் மற்றும் செயலாக்கம் ஆகியவற்றின் ஒவ்வொரு நிலைகளிலும் கூறெடுப்பு முறை சாரா பிழைகள் ஏற்பட வா–ப்பு உள்ளது.

கூறெடுப்பு முறை சாரா பிழைகள் ஏற்படுவதற்கான காரணங்கள்.

(a) ***குறைபாடுடன் திட்டமிடல் மற்றும் வரையறைகளினால் ஏற்படும் பிழைகள்*** **(Errors due to faulty planning and definitions)**

பயிற்சி பெற்ற ஆ–வாளர்கள் குறைந்த எண்ணிக்கையிலிருத்தல், உறுப்புகளை அளவிடலில் உள்ள பிழைகள், உறுப்புகளின்

இடஞ்சார்ந்த பிழைகள், விவரங்களை சரியற்ற முறையில் குறித்தல் போன்ற காரணங்களினால் இத்தகைய பிழைகள் ஏற்படுகின்றன.

(b) ***கேட்டறிதலால் பிழைகள்*** **(Response errors)**

விடையளிப்பவர்கள் தரும் விடைகளின் காரணமாக இவ்வகை பிழைகள் ஏற்படுகின்றன.

(c) ***முழுமை பெறா தகவல்களினால் ஏற்படும் பிழைகள்*** **(Non-response bias)**

கூறுகளின் அனைத்து உறுப்புகளைப் பற்றிய தகவல்கள் அல்லது விவரங்கள் முழுமையாக இல்லாதிருப்பின் இத்தகைய பிழைகள் ஏற்படுகின்றன.

(d) ***விடுபடுதலின் பிழைகள்*** **(Errors in coverage)**
கூறுகளிலுள்ள அனைத்து அலகுகளையும் அல்லது உறுப்புகளையும் கருத்தில் கொள்ளாமையால் உண்டாகும் பிழைகள், இவ்வகையை சார்ந்தவைகளாகும்.

(e) ***தொகுத்தலின் பிழைகள்*** **(Compiling errors)**
கேட்டுப்பெறும் விவரங்களை தொகுக்கும்பொழுது, இவ்வகை பிழைகள் ஏற்படுகின்றன.

பயிற்சி **9.1**

1) கூறெடுப்புப் பரவல் மற்றும் திட்டப்பிழை இவற்றை விளக்குக.

2) முழுமைத் தொகுதி அளவை மற்றும் கூறு அளவை இவைகளை வேறுபடுத்துக.

3) கூறெடுப்பு முறையின் திட்டத்திலுள்ள படிகளை சுருக்கமாக விளக்குக.

4) நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுத்தலை விவரிக்க.

5) நிகழ்தகவு சாரா கூறெடுத்தலை விவரிக்க.

6) கூறெடுப்பு முறை சார்ந்த பிழை மற்றும் கூறெடுப்பு முறை சாரா பிழை இவைகளை வேறுபடுத்துக.

9.2 கூறெடுத்தல் பரவல்கள்
(Sampling Distributions)

கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதி (population) ஒன்றிலிருந்து எடுக்கக்கூடிய அளவு (size) n உள்ள அனைத்து கூறு (samples) களையும் கருதுக. சராசரி, திட்டவிலக்கம் போன்ற கூறு அளவையை (sample statistic) ஒவ்வொரு கூறுக்கும் நாம் காண முடியும். அத்தகைய கூறு அளவைகளின் தொகுப்பினை ஒரு நிகழ்வெண் பரவலாக (frequency distribution) வகைப்படுத்தலாம். இந்தப் பரவல், சம்மந்தப்பட்ட கூறு அளவைக்கான **கூறெடுத்தல் பரவல்** எனப்படும். எனவே, ஒரு கூறு அளவை பெறும் அனைத்து மதிப்புகளின் நிகழ்தகவு பரவலை, அந்த கூறு அளவையின் கூறெடுத்தல் பரவல் என்கிறோம். கூறு சராசரி (sample mean) மற்றும் கூறு விகித அளவு (sample proportion) ஆகியவை கூறு அளவைகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

தமிழ்நாட்டில் உள்ள குடும்பங்களில் (50000 குடும்பங்கள் எனலாம்) அன்றாடம் பயன்படும் பொருட்களுக்கான ஆண்டு செலவினை மதிப்பிட ஒரு சந்தை ஆ–வு நிறுவனம் விரும்புவதாகக் கொள்வோம். ஒவ்வொன்றிலும் **50** குடும்பங்கள் உள்ள 50 கூறுகளை அந்நிறுவனம் தெரிவு செ–யலாம். அன்றாடம் பயன்படும் வசதிப் பொருட்களுக்கான ஆண்டு சராசரிச் செலவை ஒவ்வொரு கூறுக்கும் பின்வரும் அட்டவனையில் உள்ளவாறு காணலாம்.

கூறு எண்	50 குடும்பங்களுக்கான மொத்த செலவு ரூ	சராசரி ரூ.
1	100000	2000
2	300000	6000
3	200000	4000
4	150000	3000
.	.	.
.	.	.
.	.	.
49	600000	12000
50	400000	8000

கூறு சராசரிகளின் பரவல், சராசரிகளின் கூறெடுப்புப் பரவல் எனப்படும். ரூ. 2000, 6000 ... 8000 என்பன சராசரிகளின் கூறெடுத்த பரவல் ஆகும்.

இவ்வாறே கூறு பரவற்படி (sample variance) மற்றும் கூறு விகித அளவு ஆகியவற்றின் கூறெடுத்தல் பரவல்களைப் பெறலாம்.

ஒரு கூறில் உள்ள n உறுப்புகளில் n_1 உறுப்புகள் வகை-I ஆகவும், n-n_1 உறுப்புகள் வகை-II ஆகவும் இருப்பின் $p = \frac{n_1}{n}$ என்பது வகை-I இன் கூறு அளவு விகிதம் என வரையறுக்கப்படும். $q = (1\text{-}p) = \frac{n-n_1}{n}$ என்பது வகை -II இன் கூறு அளவு விகிதமாகும். இது போன்று k வகைகளை எடுத்துக் கொண்டு $p_1, p_2, \ldots , p_k$ என்ற கூறு அளவு விகிதங்களுக்கு இதை விரிவாக்கம் செ–யலாம்.

நாம், விகித அளவின் கூறெடுத்தல் பரவலையும் பெற முடியும். எடுத்தக்காட்டாக, ஒரு தொழிற்சாலையில் தயாரான ஆணிகளிலிருந்து ஒவ்வொன்றும் 1000 ஆணிகளைக் கொண்ட 15 வெவ்வேறு கூறுகளை எடுத்துக் கொண்டு ஒவ்வொறு கூறிலும் உள்ள குறைபாடுடைய ஆணிகளின் எண்ணிக்கையை கணக்கிடலாம். குறைபாடுடைய ஆணிகளின் விகித அளவின் நிகழ்தகவு பரவலைப் பெறலாம்

9.2.1 இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்படும் சராசரியின் கூறெடுத்த பரவல்

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்பன சராசரி μ மற்றும் திட்ட விலக்கம் σ உள்ள இயல்நிலை முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட n சாரா சமவா–ப்பு கூறுகள் எனில் கூறெடுத்தல் பரவலின் சராசரி (கூறு சராசரி) ஆனது சராசரி μ மற்றும் திட்டவிலக்கம் உள்ள ஓர் இயல்நிலைப் பரவலைப் பெற்றிருக்கும்.

பின்வருவனவற்றைக் கருத்தில் கொள்க:

(i) கூறு சராசரி = =

அதாவது n உறுப்புகளைக் கொண்ட புதிய கூறுகளை எடுக்கும் போதெல்லாம் வெவ்வேறாக மாறுபடும். எனவே ஆனது ஒரு சமவா–ப்பு மாறியாகும்.

(ii) முழுமைத்தொகுதியின் சராசரியின் (μ) பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீட்டளவை (unbiased estimator) ஆகும்.

i.e. E( ) = μ, இதை μ = μ என்று எழுதலாம்.

(iii) கூறு சராசரி ன் திட்ட விலக்கம் σ = ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, 10000 சிறுவர்கள் உள்ள ஒரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மீள இடல் முறையில் பெறப்படும் நான்கு சிறுவர்களின் எடைகளைக் கொணட ஒரு கூறினை எடுத்துக் கொள்வோம். அந்த நான்கு சிறுவர்களின் சராசரி எடையைக் காணலாம். மீண்டும் அதே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து நான்கு சிறுவர்களைக் கொண்ட மற்றொரு புதிய கூறினை எடுத்து சராசரி எடையைக் காணலாம். இம்முறையை எண்ணற்ற தடவைகள் மீண்டும் மீண்டும் செ–வோமானால் கிடைக்கப்பெறும் எண்ணற்ற கூறு சராசரிகள், சராசரியின் கூறெடுப்பு பரவலை அமைக்கும்.

9.2.2 ***மைய எல்லைத் தேற்றம்*** (Central limit theorem)

சராசரி μ மற்றும் திட்டவிலக்கம் σ உள்ள இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் கூறுகளின் சராசரிகளின் கூறெடுத்தல் பரவலும், சராசரி μ = μ மற்றும் திட்டவிலக்கம் σ =

உள்ள இயல்நிலை பரவல் ஆகும். எனினும் முழுமைத்தொகுதி இயல்நிலைத் தொகுதியாக இல்லாமலிருக்கும்போது பெறப்படும் சராசரியின் கூறெடுப்புப் பரவலும் $\bar{x}$ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ அதேயளவு முக்கியமானதாகும். மைய எல்லைத் தேற்றத்தின் படி, சராசரி μ மற்றும் திட்டவிலக்கம் σ எனக் கொண்ட எந்த ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்தும் n அளவு கொண்ட கூறுகளை எடுத்தால், சராசரியின் கூறெடுப்பு பரவலானது, கூறின் அளவு அதிகரித்து பெருங்கூறாகும்பொழுது, சராசரி μ மற்றும் திட்டவிலக்கம் எனக் கொண்ட இயல் நிலைப் பரவலை அணுகும்.

நடைமுறையில், கூறு அளவு **30** அல்லது அதற்கு மேல் இருப்பின் அந்தக்கூறு பெருங்கூறு (large sample) என கொள்ளப்படும்.

புள்ளியியல் உ–த்துணர்தலில் மைய எல்லைத்தேற்றம் மிக முக்கியமானதாகும். இயல்நிலைப் பரவலைக் கொண்டிராத முழுமைத் தொகுதியிலிருந்தும் சமவா–ப்புக் கூறுகளை எடுத்து அவைகளிலிருந்து பெறப்பட்ட முடிவுகளைக் கொண்டு முழுமைத் தொகுதியின் அளவைப் பற்றி அறிந்து கொள்ள மைய எல்லைத் தேற்றம் வழி வகுக்கின்றது.

9.2.3 *விகித அளவுகளின் கூறெடுத்த பரவல்* (Sampling distribution of proportions)

ஒரு முழுமைத் தொகுதி முடிவிலியாகவும் ஒரு நிகழ்வின் நிகழ்தகவு P என்றும் கொள்க. இதில் P என்பது நிகழ்வின் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு எனலாம். $Q = 1 - P$ என்பது அந்த நிகழ்வின் தோல்விக்கான நிகழ்தகவு ஆகும்.

ஒவ்வொரு கூறுக்கும் வெற்றியின் விகித அளவு p ஐக் காணலாம். கூறு அளவு n பெரியதாக இருப்பின் மைய எல்லைத் தேற்றப்படி, கூறிலிருந்து பெறப்பட்ட விகித அளவு p ஆனது சராசரி $\mu_p = \mathrm{P}$ மற்றும் S.D. $\sigma_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{\mathrm{PQ}}{n}}$ எனக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலைப் பெறும்.

9.2.4 *திட்டப் பிழை* (Standard error)

ஒரு கூறு அளவையின் கூறெடுப்புப் பரவலின் திட்டவிலக்கம் அந்தக் கூறு அளவையின் **திட்டப் பிழை** என்றழைக்கப்படுகிறது. கூறு சராசரிகளின் பரவலின் திட்ட விலக்கம், சராசரியின் திட்டப் பிழை ஆகும். அதேபோல் கூறு விகித அளவுகளின் பரவலின் திட்டவிலக்கம், **விகித அளவின் திட்டப்பிழை** ஆகும்.

திட்டப்பிழையை பெரும்பாலும் **கூறெடுத்தல் பிழை** என்கிறோம். கூறெடுத்தல் பிழை என்பது மதிப்பிட்டலின் துல்லியத் தன்மையை பிரதிபலிப்பதாக இருக்கும். திட்டப் பிழை ஆனது கூறு அளவிற்கு எதிர் விகிதத்தில் இருக்கும். அதாவது கூறு அளவு அதிகமானால் திட்டப்பிழை குறையும். கொடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் ஒரே அளவு கொண்ட கூறுகளின் திட்டப்பிழையானது சம்பந்தப்பட்ட கூறு அளவைப்பெறும் மதிப்புக்களின் சிதறல் அளவையை அளவிடுகிறது. **முக்கியத்துவச் சோதனை** அல்லது **சிறப்பு நிலை சோதனைகளில்** (Tests of significance), முழுமைத்தொகுதியின் அளவைகளுக்கான நம்பிக்கை எல்லைகளைக் (confidence limits) காண திட்டப்பிழை பயன்படும். கூறு சராசரி $\overline{\mathrm{X}}$ மற்றும் கூறு விகித அளவு ஆகியவைகளின் திட்டப்பிழைகள், முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி μ மற்றும் முழுமைத்தொகுதி விகித அளவு P ஆகியவற்றிற்கான நம்பிக்கை எல்லைகளைக் காண பயன்படுகின்றன.

கூறு அளவை	திட்டப்பிழை	குறிப்பு
கூறு சராசரி		முழுமைத்தொகுதி அளவு முடிவற்றதாக இருக்கும் பொழுது (அ) மீளஇடல் முறையில் கூறு எடுக்கப்படும்பொழுது. முழுமைத்தொகுதியின் அளவு N ஆக இருக்கும் பொழுது (அ) மீள இடாத முறையில் கூறுகள் எடுக்கப்படும் பொழுது.
கூறு விகித அளவு p	$\sqrt{\frac{PQ}{n}}$ Q = 1 - P $\sqrt{\frac{PQ}{n}}\ \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$	முழுமைத்தொகுதி அளவு முடிவற்றதாக இருக்கும் பொழுது (அ) மீளஇடல் முறையில் கூறு எடுக்கப்படும்பொழுது. முழுமைத்தொகுதியின் அளவு N ஆக இருக்கும் பொழுது (அ) மீள இடாத முறையில் கூறுகள் எடுக்கப்படும் பொழுது.

எடுத்துக்காட்டு 1

ஒரு முழுமைத்தொகுதி 2, 3, 6, 8, 11 என்ற ஐந்து எண்களைக் கொண்டுள்ளது. இதிலிருந்து மீள இடல் முறையில் எடுக்கக் கூடிய, அளவு 2 உள்ள அனைத்து கூறுகளையும் கருதுக. (i) முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி (ii) முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம்(iii) சராசரிகளின் கூறெடுத்தல் பரவலின் சராசரி (iv) சராசரிகளின் திட்டப்பிழை ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி $\mu = \frac{\Sigma x}{N} =$ $= 6$

(ii) முழுமைத் தொகுதியின் பரவற்படி $\sigma^2 =$ $\Sigma(x - \mu)^2$

$$= \frac{1}{5}\{(2-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (11-6)^2\}$$
$$= 10.8$$

$\therefore$ முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் $\sigma = 3.29$

(iii) மீள இடல் முறையில் (with replacement) பெறப்படும் அளவு 2 உள்ள 25 கூறுகளை பின்வருமாறு காணலாம் :

(2, 2)	(2, 3)	(2, 6)	(2, 8)	(2, 11)
(3, 2)	(3, 3)	(3, 6)	(3, 8)	(3, 11)
(6, 2)	(6, 3)	(6, 6)	(6, 8)	(6, 11)
(8, 2)	(8, 3)	(8, 6)	(8, 8)	(8, 11)
(11, 2)	(11, 3)	(11, 6)	(11, 8)	(11, 11)

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவைகளுக்கு நிகரான கூறு சராசரிகள்:

2.0	2.5	4.0	5.0	6.5
2.5	3.0	4.5	5.5	7.0
4.0	4.5	6.0	7.0	8.5
5.0	5.5	7.0	8.0	9.5
6.5	7.0	8.5	9.5	11.0

$\frac{2+3+6+8+11}{5}$ $\frac{\Sigma\bar{x}}{N}$ $\frac{\text{கூறு சராசரிகளின் கூடுதல்}}{25}$

சராசரிகளின் கூறெடுப்பு பரவலின் சராசரி

$$\mu_{\bar{x}} = \qquad = \frac{150}{25} = 6.0$$

(iv) சராசரிகளின் கூறெடுப்புப் பரவற்படி $\sigma^2_{\bar{x}}$ ஐ பின்வருமாறு பெறலாம்:

$$= \frac{1}{25}\{2-6)^2 + (2.5-6)^2 + \ldots + (6.5-6)^2 + \ldots$$
$$+ (9.5-6)^2 + (11-6)^2\}$$

$$= \frac{135}{25} = 5.4$$

$\therefore$ சராசரிகளின் திட்டப்பிழை $\sigma_{\overline{x}} = \qquad = 2.32$

எடுத்துக்காட்டு 2

தொழிற்சாலை ஒன்றில் பணியாற்றும் 1000 தொழிலாளர்களின் மாதாந்திர சேமிப்பானது, சராசரி ரூ.2000 மற்றும் திட்ட விலக்கம் ரூ. 50 எனக் கொண்ட ஒரு இயல் நிலைப் பரவலாக உள்ளது என்க. ஒவ்வொரு கூறிலும் 4 தொழிலாளர்களைக் கொண்டு 25 கூறுகள் எடுப்பதால் பெறப்படும் சராசரிகளின் கூறெடுப்புப் பரவலின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் ஆகியனவற்றை (i)மீள இடல் (ii) மீள இடாத முறைகளில் காண்க.

தீர்வு :

$N = 1000,\ \mu = 2000,\ \ \sigma = 50,\ \ n = 4$ என தரப்பட்டுள்ளது

(i) *மீள இடல் முறையில் (with replacement) கூறெடுத்தல்*

$\mu_{\overline{x}} = \mu = 2000$

$\sigma \ = \qquad = \qquad = 25 \qquad \frac{50}{\sqrt{4}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

(ii) *மீள இடாத முறையில் (without replacement) கூறெடுத்தல்*

சராசரிகளின் கூறெடுப்புப் பரவலின் சராசரி

$\mu_{\overline{x}} = \mu = 2000$

சராசரிகளின் கூறெடுப்புப் பரவலின் திட்ட விலக்கம்

$\sigma \ =$

$$= \frac{50}{\sqrt{4}} \sqrt{\frac{100-4}{1000-1}}$$

$$= (25)\ \sqrt{\frac{996}{999}} = 25\ \left(\sqrt{.996}\right)$$

$$= (25)\ (0.9984) = 24.96$$

எடுத்துக்காட்டு 3

41 உறுப்புக்களைக் (அலகுகள்) கொண்ட ஒரு முடிவுறு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து உறுப்புக்களை மீள இடாத முறையில் 5 உறுப்புக்களைக் கொண்டு கூறு ஒன்று எடுக்கப்படுகிறது. முழுமைத் தொகுதியின் S.D, 6.25 எனில் கூறு சராசரியின் திட்டப் பிழை (S.E) காண்க.

தீர்வு :

முழுமைத் தொகுதியின் அளவு $N = 41$

கூறின் அளவு $n = 5$

முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் $\sigma = 6.25$

கூறு சராசரியின் திட்டப்பிழை $= \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(N, ஒரு முடிவுறு எண்)

$$= \frac{6.25}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{41-5}{41-1}} = \frac{6.25 \text{ x } 6}{\sqrt{5}\ 2\sqrt{10}} = \frac{3 \text{ x } 6.25}{5\sqrt{2}} = 2.65$$

எடுத்துக்காட்டு 4

தேர்வு ஒன்றில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் ஆனது, சராசரி 60 மற்றும் 30 எனக்கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது. இந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 36 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு சமவா-ப்புக் கூறினை எடுத்தால்,

(i) கூறெடுப்பு சராசரியின் திட்டப்பிழையைக் காண்க.

(ii) 16 மாணவர்களைக் கொண்ட வேறொரு கூறின் சராசரி 50 ஐ விட குறைவாகவும் அல்லது 80 மதிப்பெண்களை விட அதிகமாகவும் அமைவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?

[P (0 < Z < 4) = 0.4999 ; P(0 < Z < 2) = 0.4772]

தீர்வு :

(i) கூறு சராசரி $\overline{X}$ -ன் திட்டப்பிழை

σ = = = 5 (N தரப்படவில்லை)

(ii) சமவா–ப்பு $\overline{X}$ ஆனது சராசரி μ மற்றும் திட்டவிலக்கம் எனக் கொண்டு ஒரு இயல்நிலைப் பரவலாக அமையும்.

P(<50 or >80) ஐ பின்வருமாறு காண்போம்.

$$P(\;<50 \text{ அல்லது } \;>80) = P(\;<50) + P(\;>80)$$

$$= P \qquad\qquad + P\left(\frac{\overline{X}-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} > \frac{80-60}{5}\right)$$

$$= P\,(Z < -2) + P(Z > 4)$$

$$= [0.5 - P(0 < Z < 2)] + [0.5 - P(0 < Z < 4)]$$

$$= (0.5 - 0.4772) + (0.5 - 0.4999)$$

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு = .02283

எடுத்துக்காட்டு 5

ஒரு இயந்திரம் தயாரித்த திருகாணிகளில் 2% குறைபாடுடையன. அத்தகைய 400 திருகாணிகளைக் கொண்ட தொகுப்பில் 3% அல்லது அதற்குமேல் குறைபாடு உள்ளவையாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்.

தீர்வு :

இங்கு N கொடுக்கப்படவில்லை, ஆனால் $n = 400$.

முழுமைத் தொகுதியின் விகித அளவு P = 2% = 0.02

$\therefore$ $\left(\frac{\overline{X}-\mu_{\overline{X}}}{\sqrt{n}\sigma_{\overline{X}}} < \frac{50-60}{5}\right)$ Q = 1 − P = 0.98

இங்கு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது ஒரு பெருங்கூறாகும்.

எனவே கூறின் விகித அளவு p ஆனது

$$\mu_p = 0.02 \text{ மற்றும் } S.D = \sqrt{\frac{PQ}{n}} = \sqrt{\frac{0.02 \times 0.98}{400}} = 0.007$$

எனக் கொண்டு இயல்நிலை பரவலாக அமையும்.

கூறு விகித அளவின் நிகழ்தகவு $p \geq 0.03$

= {Z = 1.43 ன் வலப்புறத்தில் அமைந்த திட்ட இயல்நிலை பரவலுக்கான பரப்பு}

$$\left(Z = \frac{p-P}{S.D} = \frac{0.03-0.02}{0.007} = 1.43\right)$$

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு = 0.5 − (Z = 0 விலிருந்து Z = 1.43 வரையிலான பரப்பு)

$$= 0.5 - 0.4236 = 0.0764$$

பயிற்சி 9.2

1) 3, 7, 11 மற்றும் 15 ஆகிய நான்கு எண்களைக் கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியைக் கருதுவோம். அளவு 2 உள்ள, மீள இடல் (with replacement) முறையில் எடுக்கப்படும் அனைத்து கூறுகளையும் கருதுக.

   (i) முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி

   (ii) முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம்

   (iii) சராசரிகளின் கூறெடுப்புப் பரவலின் சராசரி

   (iv) சராசரிகளின் கூறெடுப்புப் பரவலின் திட்ட விலக்கம்

   ஆகியனவற்றைக் காண்க.

2) 3, 7, 11 மற்றும் 15 ஆகிய நான்கு எண்களைக் கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியைக் கருதுவோம். அளவு 2 உள்ள மீள இடாத (without replacement) முறையில் எடுக்கப்படும் அனைத்து கூறுகளையும் கருதுக.

   (i) முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி

   (ii) முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம்

   (iii) சராசரிகளின் கூறெடுப்புப் பரவலின் சராசரி

   (iv) சராசரிகளின் கூறெடுப்புப் பரவலின் திட்ட விலக்கம்

   ஆகியனவற்றைக் காண்க.

3) 1500 இரும்புக் கம்பிகளின் எடைகள் ஆனது சராசரி எடை 22.4 கி.கிராம் மற்றும் திட்டவிலக்கம் 0.048 கி.கிராம் எனக் கொண்ட ஒரு இயல்நிலைப் பரவலாக உள்ளது. 36 அளவுள்ள, 300 சமவாய்ப்புக் கூறுகள் இந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படுகின்றன. சராசரிகளின் கூறெடுப்புப் பரவலின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் ஆகியனவற்றை (i) மீள இடல் (ii) மீள இடாத முறைகளில் காண்க.

4) ஓர் பள்ளியில் +2 முடித்த மாணவர்களில் 1% பேர்கள், சென்னையிலுள்ள இந்திய தொழில்நுட்ப கழகத்தில் சேருகின்றனர். அப்பள்ளி மாணவர்களில் 500 பேர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவில் 2% அல்லது அதற்கு அதிகமாக, இதே தொழில்நுட்ப கழகத்தில் சேருவதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

9.3 *மதிப்பிடுதல்* (Estimation)

புள்ளியியலின் முக்கிய பிரிவுகளில் ஒன்றான புள்ளியியல் உ–த்துணரல் (statistical inference) மூலமாக கூறுகளின் முடிவுகளை முழுமைத் தொகுதிக்கு பொதுமைப்படுத்தும் நுட்பம் கிடைக்கின்றது. புள்ளியியல் உ–த்துணரலியலில், (i) **மதிப்பிடுதல்** (estimation) (ii) **எடுகோள் சோதனை** (testing of hypothesis) ஆகிய இரண்டு முக்கியமான பிரிவுகள் இடம்பெற்றுள்ளன.

புள்ளியியலில் மதிப்பிடுதல் என்பது கூறுகள் வாயிலாகப் பெறும் விவரங்களிலிருந்து முழுமைத் தொகுதியின் அளவைகள் பற்றி உ–த்துணர்தல் ஆகும். முடிவுகள் எடுக்கும் முறைமைக்கு அளவை மதிப்பிடுதல் மிகவும் அவசியமாகிறது.

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி, பரவற்படி மற்றும் விகித அளவு ஆகியனவற்றை அவைகளுக்கு கூறுகளின் உரிய அளவைகளிலிருந்து மதிப்பிடுதல் புள்ளியியல் உ–த்துணருதலின் முக்கிய பங்கு ஆகும்.

9.3.1 *மதிப்பீட்டு அளவை* (Estimator)

முழுமைத்தொகுதியின் அளவை ஒன்றை மதிப்பிட பயன்படும் கூறு அளவையினை (statistic) **மதிப்பீட்டளவை** எனப்படும்.

முழுமைத் தொகுதி அளவையின் உண்மை மதிப்பிற்கு மிக அருகில் அமையும் மதிப்பீட்டு அளவையினை, சிறந்த மதிப்பீட்டளவை (good estimator) என்போம். சிறந்த மதிப்பீட்டு அளவைக்குரிய பண்புகளாவன :

(i) *பிறழ்ச்சியற்ற தன்மை* (Unbiasedness)

ஓர் அளவையின் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு (expected value), முழுமைத் தொகுதியின் அளவைக்கு சமமெனில் அந்த அளவையினை **பிறழ்ச்சியற்ற தன்மையுடைய** அளவை என்போம்.

உதாரணமாக = ΣX ஆனது முழுமைத் தொகுதி சராசரி μ க்கு பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீட்டளவை ஆகும்.

N அளவுள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n அளவுகொண்ட கூறு ஒன்றினை எடுத்தால், $s^2 = \frac{1}{n-1}\,\Sigma(x- \quad)^2$ ஆனது முழுமைத் தொகுதி பரவற்படியின் பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீட்டளவையாகும். எனவே தான் மதிப்பீடலிலும் மற்றும் எடுகோள் சோதனையிலும் s^2 ஐ பயன்படுத்துகின்றோம்.

(ii) ***ஒப்புமைத் தன்மை*** (Consistency)

ஓர் அளவையின் மதிப்பானது, கூறுகளின் அளவு அதிகரிக்கும்பொழுது முழுமைத் தொகுதியின் அளவையின் மதிப்பிற்கு நெருங்குமாயின், அந்த அளவை **ஒப்புமைத் தன்மை** உடையது என்போம்.

(iii) ***திறன் தன்மை*** (Efficiency)

முழுமைத் தொகுதி அளவை ஒன்றிற்குரிய இரு பிறழ்ச்சியற்ற மதிப்பீட்டு அளவைகளைக் கருதுவோம். முதல் மதிப்பீட்டு அளவையின் திட்டப்பிழையானது இரண்டாம் மதிப்பீட்டு அளவையின் திட்டப்பிழையை விடக் குறைவாக இருப்பின் முதல் மதிப்பீட்டளவை, இரண்டாவதைவிட திறன் மிக்கது என்போம்.

(iv) ***போதுமான தன்மை*** (Sufficiency)

முழுமைத் தொகுதி அளவைப் பற்றிய அனைத்து விவரங்களையும் மதிப்பீட்டளவை ஒன்று தன்னகத்தே கொண்டிருப்பின், அதனை ஒரு போதுமான தன்மையுடைய மதிப்பீட்டளவை எனக் கூறுவோம்.

9.3.2 ***புள்ளி மதிப்பீடு மற்றும் இடைவெளி மதிப்பீடு***

முழுமைத் தொகுதி அளவைக்கு இருவிதமான மதிப்பீடுகளைக் காணலாம். அவை **புள்ளி மதிப்பீடு** மற்றும் **இடைவெளி மதிப்பீடு** ஆகும்.

புள்ளி மதிப்பீடு (Point estimate)

முழுமைத் தொகுதியின் அளவைக்குரிய மதிப்பிடலை **ஓர் எண்ணால்** குறித்தால், அதனை முழுமைத் தொகுதி அளவையின் புள்ளி மதிப்பீடு என்போம். சராசரி ( ) மற்றும் கூறு பரவற்படி $[s^2 = \Sigma(x- \quad)^2]$ என்பன புள்ளி மதிப்பீடுகளுக்கு உதாரணங்காளகும்.

புள்ளி மதிப்பீடு ஆனது முழுமைத் தொகுதி அளவையின் உண்மை மதிப்பிற்கு சமமாகப் பொருந்துவது மிகவும் அரிது.

இடைவெளி மதிப்பீடு **(Interval Estimate)**

இரண்டு எண்களுக்கு இடையில் முழுமைத் தொகுதி அளவையின் மதிப்பு அமையலாம் என எதிர்பார்த்து, முழுமைத் தொகுதி அளவையின் மதிப்பீடாக அவ்விரு எண்களைத் தரப்படுவதை இடைவெளி மதிப்பீடு என்போம்.

இடைவெளி மதிப்பீடானது, மதிப்பீடலின் துல்லியத்தன்மையைக் குறிக்கிறது, எனவேதான் புள்ளி மதிப்பீடலை விட இடைவெளி மதிப்பீடல் விரும்பப்படுகிறது.

உதாரணமாக, ஒரு தொலைவு **5.28** மி.மீ என அளக்கப்படின், நாம் கொடுப்பது புள்ளி மதிப்பீடாகும். மாறாக **5.28** $\pm$ **0.03** மி. மீ. என தொலைவுத் தரப்பட்டால், அதாவது தொலைவானது **5.25** மற்றும் **5.31** மி.மீ.க்கு இடையேயுள்ளது எனத் தரப்பட்டால், தொலைவானது இடைவெளி மதிப்பீடலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்போம்.

9.3.3 ***முழுமைத்தொகுதியின் சராசரி மற்றும் விகித அளவிற்கான நம்பிக்கை இடைவெளி*** **(Confidence Interval for population mean and proportion)**

முழுமைத்தொகுதியின் அளவையின் மதிப்பு எந்த இடைவெளிக்குள் அமையுமென எதிர்பார்க்கலாமோ அந்த இடைவெளி, **நம்பிக்கை இடைவெளி** ஆகும். இவ்வாறு தீர்மானிக்கப்படும் **எல்லைகள் நம்பிக்கை** எல்லைகள் என்றழைக்கப்படும்.

முழுமைத்தொகுதியின் அளவை குறிப்பிட்ட வீச்சில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவை, நம்பிக்கை இடைவெளிகள் எடுத்துக் காட்டும்.

நம்பிக்கை இடைவெளியை காணுதல் **(Computation of confidence interval)**

நம்பிக்கை இடைவெளியைக் காண நமக்கு தேவையானவை.

(i) குறிப்பிட்ட கூறு அளவை

(ii) குறிப்பிட்ட கூறு அளவையின் கூறெடுப்புப் பரவலின் திட்டப்பிழை (S.E) மற்றும்

(iii) தேவைப்படும் துல்லியத்தன்மையின் அளவு

கூறு அளவு பெரியதாக இருக்குமானால் கூறெடுப்புப் பரவல் ஏறக்குறைய இயல்நிலை பரவலாக அமையும். எனவே திட்டப்பிழையின் மதிப்பீட்டைக் காண, முழுமைத்தொகுதி மதிப்பிற்கு பதிலாக கூறு அளவு மதிப்பையே பயன்படுத்தலாம். பெருங் கூறுகளைக் கையாளும்போது, நம்பிக்கை எல்லைகளைக் காண Z-பரவல் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

நம்பிக்கை எல்லைகள் சிலவற்றிற்கு உரிய Z மதிப்புகளாவன :

நம்பக மட்டம் (confidence level)	99%	98%	96%	95%	80%	50%
Z மதிப்புகள், Z_c	2.58	2.33	2.05	1.96	1.28	0.674

(i) *சராசரிக்கான நம்பிக்கை இடைவெளி* (Confidence interval for means)

μ மற்றும் σ என்பன முழுமைத்தொகுதியின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் என்க. மற்றும் s என்பன கூறு சராசரி மற்றும் கூறெடுப்புப் பரவலின் திட்ட விலக்கம் என்க.

Z_c என்பது நம்பிக்கை அளவுகளுக்கு உரிய Z மதிப்பு என்க.

μ க்கான நம்பிக்கை எல்லைகள்

முழுமைத்தொகுதியின் அளவு	கூறு அளவு $\frac{\overline{X}s}{\sqrt{n}}$	μ -ன் நம்பிக்கை எல்லைகள்
முடிவுறா எண்	n	$\pm (Z_C)$, z_c ஆனது நம்பிக்கை மட்டத்தில் Z ன் மதிப்பு
முடிவுறு எண் N	n	$\overline{X} \pm (Z_C) \quad \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

(ii) *விகித அளவின் நம்பிக்கை எல்லைகள்* (Confidence intervals for proportions)

வெற்றிகளின் விகித அளவு P உள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட n அளவு கொண்ட கூறில் வெற்றிகளின் விகித அளவு p எனில், P க்கான நம்பிக்கை இடைவெளியை பின்வரும் அட்டவணையில் காணலாம்.

முழுமைத்தொகுதியின் அளவு	கூறு அளவு	P -ன் நம்பிக்கை எல்லைகள்
முடிவுறா எண்	n	$p \pm (Z_C)\sqrt{\frac{pq}{n}}$
முடிவுறு எண் N	n	$p \pm (Z_C)\sqrt{\frac{pq}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

எடுத்துக்காட்டு 6

ஒரு தோல் பொருளுக்கான தேவையின் போக்கு குறைவதை உணர்ந்து நிதிமேலாளர் தன் நிறுவன ஆதாரங்களை புதியதோர் பொருளை உற்பத்தி செ-வதற்கு பயன்படுத்தலாமா எனக் கருதுகிறார். அவர் தோல் தொழில் நிறுவனங்கள் 10 கொண்ட கூறு ஒன்றைத் தெரிவு செ-து, அவைகளின் முதலீட்டுக்கான சதவீத வருவா-களைக் காண்கிறார்.

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து அந்த முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி மற்றும் பரவற்படி இவற்றின் புள்ளி மதிப்பீட்டைக் காண்க.

21.0 25.0 20.0 16.0 12.0 10.0 17.0 18.0 13.0 11.0

$\overline{X}$

தீர்வு :

X	$\overline{X}$	X-	$(X- \quad)^2$
21.0	16.3	4.7	22.09
25.0	16.3	8.7	75.69
20.0	16.3	3.7	13.69
16.0	16.3	-0.3	0.09
12.0	16.3	-4.3	18.49
10.0	16.3	-6.3	39.69
17.0	16.3	0.7	0.49
18.0	16.3	1.7	2.89
13.0	16.3	-3.3	10.89
11.0	16.3	-5.3	28.09
163.0			**212.10**

கூறு சராசரி = $= 16.3$

கூறு பரவற்படி $s^2 =$ $\Sigma(X- \ )^2$

$=$ $= 23.5$ (சிறுங்கூறு என்பதால்)

கூறு திட்டவிலக்கம் = $= 4.85$

எனவே 16.3 மற்றும் 23.5 என்பன முறையே முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி மற்றும் பரவற்படி இவைகளுக்கான புள்ளி மதிப்பீடுகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7

ஒரு பள்ளியின் மாணவர்களிலிருந்து 100 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு கூறு எடுக்கப்படுகிறது. கூறின் சராசரி எடை மற்றும் பரவற்படி முறையே 67.45 கி.கி. மற்றும் 9 கி.கி. ஆகும். அப்பள்ளி மாணவர்களின் சராசரி எடையின் மதிப்பீட்டினை (i) 95% (ii) 99% நிலைகளில் நம்பிக்கை எல்லைகளைக் காண்க.

தீர்வு :

கூறு அளவு $n = 100$

கூறு சராசரி $\overline{X} = 67.45$

கூறு பரவற்படி $s^2 = 9$

கூறு திட்டவிலக்கம் $s = 3$

μ என்பது முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி

(i) μ க்கான 95% நம்பிக்கை எல்லைகள்

$\pm (Z_c)$

$$\Rightarrow \quad 67.45 \pm (1.96)\ \frac{3}{\sqrt{100}}$$ (95% நம்பிக்கை மட்டத்தில் $Z_c = 1.96$)

$$\Rightarrow \quad 67.45 \pm 0.588$$

எனவே μ க்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளி (66.86, 68.04)

(ii) μ க்கான 99% நம்பிக்கை எல்லைகள்

$$\overline{X} \pm (Z_c)$$

$$\Rightarrow \; 67.45 \pm (2.58)\,\frac{3}{\sqrt{100}} \quad (99\% \text{ நம்பிக்கை மட்டத்தில் } z_c = 2.58)$$

$$\Rightarrow \quad 67.45 \pm 0.774$$

எனவே μ க்கான 99% நம்பிக்கை இடைவெளி $(66.67,\ 68.22)$

எடுத்துக்காட்டு 8

ஓர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட அளவு 50 கொண்ட கூறு ஒன்றின் சராசரி 67.9 ஆகும். கூறு சராசரியின் திட்டப்பிழை $\sqrt{0.7}$ எனத் தெரியவந்தால், முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக்கான 95% நம்பிக்கை இடைவெளியைக் காண்க.

தீர்வு :

$$n = 50, \qquad \text{கூறு சராசரி } \overline{X} = 67.9$$

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி μ க்கான 95% நம்பிக்கை எல்லைகள் :

$$\overline{X} \pm (Z_c)\{S.E(\overline{X})\}$$

$$\Rightarrow \quad 67.9 \pm (1.96)\left(\frac{\sqrt{0.7}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 67.9 \pm 1.64$$

எனவே μ ஐ மதிப்பீடு செ–வதற்குரிய 95% நம்பிக்கை எல்லைகள் $(66.2,\ 69.54)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9

ஆப்பிள் குவியலிலிருந்து 500 ஆப்பிள்களைக் கொண்ட ஒரு சமவா-ப்பு கூறு எடுத்ததில் 45 ஆப்பிள்கள் அழுகியிருந்தன. முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அழுகிய ஆப்பிள்களுக்குரிய எல்லைகளை 99% நம்பிக்கை மட்டத்தில் காண்க.

தீர்வு :

அழுகிய ஆப்பிள்களின் விகித அளவிற்குரிய நம்பிக்கை எல்லைகளைக் காண்போம்.

கூறு அளவு $n = 500$

கூறிலுள்ள அழுகிய ஆப்பிள்களின் விகித அளவு = $\frac{45}{500} = 0.09$

$$p = 0.09$$

$\therefore$ கூறிலுள்ள அழுகாத (நல்ல நிலையிலுள்ள) ஆப்பிள்களின் விகித அளவு $q = 1 - p = 0.91$.

முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அழுகிய ஆப்பிள்களின் விகித அளவு P ன் நம்பிக்கை எல்லைகள்

$$p \pm (Z_c)\left(\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \; 0.09 \pm (2.58)\sqrt{\frac{(.09)(0.91}{500}} \quad \Rightarrow \; 0.09 \pm 0.033$$

(0.057, 0.123) இதுவே தேவையான இடைவெளி ஆகும்.

எனவே மொத்தக் குவியலில் அழுகிய ஆப்பிள்களின் சதவிதம் 5.7% லிருந்து 12.3% வரையில் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 10

தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளைப் பார்ப்போர்களில் 1000 பேரில், 320 பேர்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சியைப் பார்த்தனர். தொலைக்காட்சி காண்போர் அனைவரையும் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து அந்த நிகழ்ச்சியைப் பார்த்தவர்களின் எண்ணிக்கைக்கான 95% நம்பிக்கை எல்லைகளைக் காண்க.

தீர்வு :

கூறு அளவு $n = 1000$

கூறு விகித அளவு $p = \frac{x}{n} = \frac{320}{1000}$

$$= 0.32$$

$\therefore \quad q = 1 - p = 0.68$

$$\text{S.E}\ (p) = \sqrt{\frac{pq}{n}} = 0.0147$$

முழுமைத் தொகுதியின் விகித அளவு P க்கான 95% நம்பிக்கை எல்லைகள்:

$$p \pm (1.96)\ \text{S.E}\ (p) = 0.32 \pm 0.028$$

$$\Rightarrow \quad 0.292 \text{ மற்றும் } 0.348$$

$\therefore$ இக்குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சியைப் பார்த்தவர்களின் சதவீதம் 29.2% லிருந்து 34.8% வரை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 11

பள்ளி மாணவர்கள் 1500 பேர்களிலிருந்து 150 பேர் கொண்ட கூறு ஒன்றினைத் தேர்ந்தெடுத்து வணிகக் கணிதத்திலுள்ள கணக்கு ஒன்றிற்குத் தீர்வு காணும் திறன் அறிய சோதனை செ-ததில் 10 மாணவர்கள் தவறிழைத்தனர். முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள 1500 மாணவர்களில் தவறிழைப்போரின் எண்ணிக்கைக்கான 99% நிலையில் நம்பிக்கை எல்லைகளைக் காண்க.

தீர்வு :

முழுமைத் தொகுதி , N = 1500

கூறு அளவு, $n = 150$

கூறு விகிதம் $p = \dfrac{10}{150} = 0.07$

$\therefore \quad q = 1-p = 0.93$

p ன் திட்டப்பிழை $\text{SE}\ (p) = \sqrt{\dfrac{pq}{n}} = 0.02$

முழுமைத் தொகுதி விகிதம் P ன் 99% நம்பிக்கை எல்லைகள்

$$p \pm (Z_c) \sqrt{\frac{pq}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$\Rightarrow \quad 0.07 \pm (2.58)\ (0.02) \sqrt{\frac{1500-150}{1500-1}}$$

$$\Rightarrow \quad 0.07 \pm 0.048$$

$\therefore$ P ன் நம்பிக்கை இடைவெளி (0.022 , 0.118) ஆகும்.

$\therefore$ 1500 மாணவர்களில் தவறாக கணக்கினைச் செ–தவர்களின் எண்ணிக்கையானது 0.022 x 1500 = 33 மற்றும் 0.118 x 1500 = 177 இவை இரண்டிற்குமிடையே அமையும்.

பயிற்சி 9.3

1) கோளம் ஒன்றின் விட்டத்தினை விஞ்ஞானியின் ஒருவரால் அளவிடப்பட்டு பதிவு செ–யப்படுகிறது. 6.33, 6.37, 6.36, 6.32 மற்றும் 6.37 மி.மீ. என்ற 5 பதிவுகளைக் கொண்டக் கூறு ஒன்றின் (i) சராசரி, (ii) பரவற்படி இவைகளுக்கான புள்ளி மதிப்பீடலைக் காண்க.

2) இயந்திரம் ஒன்றினால் ஒரு வாரத்தில் தயாரிக்கப்பட்ட இரும்பு உருண்டைகளிலிருந்து 200 உருண்டைகளைக் கொண்ட ஒரு கூறு எடுக்கப்படுகிறது. அக்கூறிலுள்ள உருண்டைகளின் சராசரி எடை 0.824 நியூட்டன் மற்றும் திட்டவிலக்கம் 0.042 நியூட்டன்கள் எனில் (i) 95% (ii) 99% ஆகிய நிலைகளில் உருண்டைகளின் சராசரி எடைக்கு நம்பிக்கை எல்லைகளைக் காண்க.

3) ஓர் மாவட்டத்திலுள்ள 200 பாரத ஸ்டேட் வங்கிக்கிளைகளில் 50 வங்கிக்கிளைகளை ஒரு சமவா–ப்பு கூறாகத் தேர்ந்தெடுத்து ஆ–வு செ–ததில், வருடாந்திர சராசரி இலாபம் ரூ.75 இலட்சம் மற்றும் திட்டவிலக்கம் ரூ.10 இலட்சம் என அறியப்பட்டது. 200 கிளைகளுக்குமான சராசரி இலாபம் அமையும் நம்பிக்கை எல்லைகளை 95% நிலையில் காண்க.

4) 200 மாணவர்கள் கணித பாடத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்களிலிருந்து 50 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களை, ஒரு சமவா–ப்புக் கூறாகத் தெரிவு செ–ததில், சராசரி மதிப்பெண்கள் 75 மற்றும் திட்டவிலக்கம் **10** என அறியப்பட்டது. முழுமைத் தொகுதியின் சராசரிக்கு நம்பிக்கை எல்லைகளை 95% நிலையில் காண்க.

5) 10000 வாடிக்கையாளர்களின் கணக்குப் பதிவேடுகளில் உள்ள வரவு செலவு பதிவுகளை சரி பார்க்கும் பொருட்டு. 200 வாடிக்கையாளர்களின் கணக்குப் பதிவேடுகளைக் கொண்ட ஒரு கூறினை சோதனை செ–ததில், 35 பதிவுகள் தவறானவை எனக் கண்டறியப்பட்டது. மொத்தப் பதிவேடுகளிலுள்ள தவறான பதிவுகளின் எண்ணிக்கை அமையும் நம்பிக்கை இடைவெளியை 95% நிலையில் காண்க.

6) ஓர் மாவட்டத்திலுள்ள அனைத்து வாக்காளர்களிலிருந்து 100 வாக்காளர்களைக் கொண்ட ஒரு கூறினை சமவா–ப்பு முறையில் தெரிவு செ–து சோதனை மேற்கொண்டதில், 55% பேர்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட வேட்பாளரை ஆதரித்தது தெரிய வந்தது. அனைத்து வாக்காளர்களில் அக்குறிப்பிட்ட வேட்பாளரை ஆதரிப்போரின் விகித எண்ணிக்கை அமையும் நம்பிக்கை எல்லைகளை (i) 95% , (ii) 99% ஆகிய நிலைகளில் காண்க.

9.4 எடுகோள் சோதனை (Hypothesis Testing)

ஓர் முழுமைத் தொகுதியின் அளவையை மதிப்பீடல் செ–வதோடு மட்டுமின்றி அளவையைப் பற்றியக் கூற்று உண்மையானதா என சோதிப்பதும் அவசியமாகிறது. அதாவது அளவையைப் பற்றிய எடுகோளை சோதிக்க வேண்டியுள்ளது.

சோதித்தறிந்த பின்னர் முடிவுகளை எடுக்க உதவும் கருத்துக்களை விளக்கும் வகையில் ஓர் உதாரணத்தினைக் காண்போம்.

மின் விளக்குகளை தயாரிக்கும் ஒருவர், அவர் தயாரிக்கும் பல்புகளின் சராசரி ஒளிரும் கால அளவு (life time) 200 மணி நேரம் எனக்கூறுகின்றார். நுகர்வோர் பாதுகாப்பு மன்றம் ஒன்று அவரின் கூற்றினை சோதனை செ–ய விரும்புகின்றது. சராசரி ஒளிரும் கால அளவு 180 மணி நேரத்திற்கு குறைவாகவிருப்பின் தயாரிப்பாளரின் கூற்றினை ஏற்பதில்லை எனவும், அவ்வாறின்றி சராசரி ஒளிரும் கால அளவு அதிகமானால், அவரின் கூற்றினை ஏற்பது எனவும் தீர்மானிக்கிறது. சமவா–ப்பு முறையில் தெரிவு செ–யப்பட்ட 50 மின் விளக்குகளின் ஒளிரும் கால அளவை தொடர்ச்சியாக சோதனை செ–யப்பட்டது. இந்த உதாரணத்தில், ஒளிரும் கால அளவு 200 மணி நேரம் என்ற கூற்றினை சோதனைக்கான எடுகோளாகக் கொள்வோம்.

எனவே எடுகோள் (Hypothesis) என்பது ஓர் முழுமைத் தொகுதியின் அளவையைப் பற்றியக் கூற்று ஆகும். ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறு ஒன்றினைச் சமவா–ப்பு முறையில் தெரிவு செ–து, கூறின் அளவைக் கணக்கிடுதலின் மூலம் முழுமைத்தொகையின் அளவையைப் பற்றிய எடுகோள் உண்மையானதா என அறியலாம்.

9.4.1 *மறுக்கத்தக்க எடுகோள் மற்றும் மாற்று எடுகோள்* (Null Hypothesis and Alternative Hypothesis)

எடுகோள் சோதனையறிதலில், எடுகோளுக்குரிய கூற்று அல்லது முழுமைத் தொகுதி அளவையின் தோராய மதிப்பினை (assumed value) கூறெடுத்தலுக்கு முன்பே குறிப்பிடல் வேண்டும்.

கூறு புள்ளிவிவரங்களைக் கொண்டு சோதனை அடிப்படையில் பெறப்படும் முடிவைக் கொண்டு, நிராகரிக்க ஏதுவாகக் கூறெடுத்தலுக்கு முன்பாகவே யூகிக்கப்படும் முழுமைத் தொகுதி அளவையைப் பற்றிய புள்ளியியல் சார்ந்த கூற்றினை **மறுக்கத்தக்க எடுகோள்** (null hypothesis) என்போம்.

கூறு அளவைக்கும், முழுமைத்தொகுதியின் அளவைக்கும் வேறுபாடில்லை என்பதையும், அவ்வாறின்றி வேறுபாடிருப்பின் அது கூறெடுத்தலின் பிழையினால் தான் என்பதையும் மறுக்கத்தக்க எடுகோள் உணர்த்துகின்றது.

மறுக்கத்தக்க எடுகோளுக்கு மாற்றான எடுகோளை **மாற்று எடுகோள்** (alternative hypothesis) என்போம்.

அதாவது மாற்று எடுகோளானது மறுக்கத்தக்க எடுகோளுக்கு நிரப்பு (complementary) ஆகும்.

மறுக்கத்தக்க எடுகோளை H_0 எனவும் மாற்று எடுகோளை H_1 எனவும் குறிப்போம்.

உதாரணமாக, இராணுவ வீரர்களின் சராசரி உயரம் 173 செ.மீ. எனும் மறுக்கத்தக்க எடுகோளைச் சோதிக்க வேண்டுமானால்,

$$H_0 : \mu = 173 = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq 173 \neq \mu_0$$ எனக்குறிப்போம்.

9.4.2 *பிழைகளின் வகைகள்* (Types of errors)

ஒரு எடுகோளைச் சோதிக்க முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறு ஒன்றினைக் கருதுவோம். அதிலிருந்து பெறப்படும் முடிவிற்கேற்ப, அந்த எடுகோளை ஏற்கவோ அல்லது நிராகரிக்கவோ செ–வோம்.

அப்பொழுது இரு வகையான பிழைகள் நிகழலாம். மறுக்கத்தக்க எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும் பொழுது அது நிராகரிக்கபடலாம். இத்தகைய பிழையை, **முதல்வகைப்பிழை** (Type I error) என்போம். முதல்வகை பிழை ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவினை α எனக்குறிப்போம்.

மாறாக, மறுக்கத்தக்க எடுகோள் உண்மையற்றதாக (false) இருக்கும்பொழுது, அதனை உண்மை என ஏற்றுக் கொள்வதால் பிழை நிகழலாம். இப்பிழையை **இரண்டாம் வகைப்** (Type II error) பிழை என்போம். இரண்டாம் வகைப் பிழை ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவினை β எனக்குறிப்போம்.

பிழைகள் ஏற்படுதலை பின்வரும் அட்டவனையில் விளக்கலாம்.

உண்மையான	கூறெடுத்தலால் கிடைக்கும் முடிவு	பிழைகள் மற்றும் அவைகளின் நிகழ்தகவுகள்
H_0 ஆனது உண்மை	H_0 ஐ நிராகரித்தல்	முதல்வகை பிழை ; $\alpha = P\{H_1 / H_0\}$
H_0 ஆனது தவறு	H_0 ஐ ஏற்றுக்கொள்ளுதல்	இரண்டாம் வகை பிழை ; $\beta = P\{H_0 / H_1\}$

9.4.3 *நிராகரிப்புப் பகுதி அல்லது தீர்வு காட்டும் பகுதி* (Critical region) *மற்றும் முக்கியத்துவ மட்டம்* (level of significance)

கூறுவெளியில் எப்பகுதியில் மறுக்கத்தக்க எடுகோள் நிராகரிக்கப்படுகின்றதோ, அப்பகுதியை நிராகரிப்புப் பகுதி (critical region) என்போம்.

முழுமைத் தொகுதியின் அளவையைப் பற்றிய மறுக்கத்தக்க மற்றும் மாற்று எடுகோள்களை அமைத்த பிறகு, முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறு ஒன்றினை எடுப்போம். கூறின் அளவையின் மதிப்பினைக் கணக்கிட்டு அம்மதிப்பினை, கருத்தில் கொள்ளப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் அளவையோடு ஒப்பிடுவோம்.

பின்னர், மறுக்கத்தக்க எடுகோளை ஏற்க அல்லது நிராகரிக்க வேண்டி, சில விதிகளை (criteria) தீர்மானிக்க வேண்டும். இந்த விதிகள் மதிப்புகளின் வீச்சாக (a, b) போன்ற இடைவெளி வாயிலாக குறிக்கப்படுகின்றது. கூறு அளவையின் மதிப்பு (a, b) எனும் இடைவெளிக்கு வெளியே அமைந்தால், மறுக்கத்தக்க எடுகோள் நிராகரிக்கப்படும்.

கூறு அளவையின் மதிப்பானது இடைவெளி (a, b) க்கு உள்ளே அமைந்தால் H_0 ஏற்கப்படுகிறது. அதாவது மறுக்கத்தக்க எடுகோள் ஏற்கப்படுகிறது. இத்தகைய கட்டுப்பாடுகளை முக்கியத்துவ மட்டத்திற்கேற்ப (Level of significance) முடிவு செ–யவேண்டும்.

5% முக்கியத்துவ நிலை ஆனது கூறுகளிலிருந்து பெறப்படும் அளவையின் மதிப்புகளில் 5% மதிப்புகள் (a, b) இடைவெளிக்கு வெளியேயும் 95% மதிப்புகள் (a, b) இடைவெளிக்கு உள்ளேயும் அமைகின்றன என்பதைக் குறிக்கும்.

எனவே முக்கியத்துவ நிலை ஆனது முதல்வகைப் பிழைக்கான நிகழ்தகவினைக் குறிக்கும். வழக்கமாக 5% மற்றும் 1% நிலைகளை, முக்கியத்துவ நிலைகளாக எடுகோள் சோதனையில் எடுத்துக் கொள்வோம்.

எடுகோள் சோதனையில் உயர் முக்கியத்துவ நிலையை எடுத்துக் கொள்வது, மறுக்கத்தக்க எடுகோள் உண்மையாக இருக்கும் பொழுது நிராகரிப்பதற்கான நிகழ்தகவு அதிகமாகும் என்பதைக் குறிக்கும்.

9.4.4 *முக்கியத்துவச் சோதனை* (Test of significance)

முக்கியத்துவச் சோதனைகளை (i) பெருங்கூறுகளுக்கான சோதனை (ii) சிறுங்கூறுகளுக்கான சோதனை என இரு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

கூறின் அளவு பெரியதாக (n>30) இருக்கும் பொழுது, ஈருறுப்பு, பா–சன் போன்ற பரவல்கள் இயல்நிலை பரவலுக்குத் தோராயமாக்கப்படுகின்றன. எனவே இயல்நிலைப் பரவலை எடுகோள் சோதனைக்குப் பயன்படுத்த இயலும்.

திட்ட இயல்நிலைப் பரவல் மாறி Z ன் 5% நிலையில் நிராகரிப்பு பகுதி $|Z| \geq 1.96$ மற்றும் ஏற்புப்பகுதி $|Z| < 1.96$ ஆகும். மேலும் Z க்கு 1% நிலையில் நிராகரிப்புப்பகுதி $|Z| \geq 2.58$ மற்றும் ஏற்புப் பகுதி $|Z| < 2.58$ ஆகும்.

எடுகோள் சோதனைக்கு மேற்கொள்ள வேண்டிய **5** படிகள் :

(i) மறுக்கத்தக்க எடுகோள் மற்றும் மாற்று எடுகோளை அமைத்தல்

(ii) ஏற்புடைய முக்கியத்துவ நிலை (level of significance) அமைத்தல்

(iii) புள்ளியியல் சோதனைக்கான கட்டுப்பாடுகளைக் கொண்டு சோதனை அளவையை (testing statistic) தீர்மானித்தல்

(iv) மறுக்கத்தக்க எடுகோளுக்குரிய நிராகரிப்புப் பகுதியை அமைத்தல்

(v) முடிவு காணல்

எடுத்துக்காட்டு 12

தொழிற்சாலை ஒன்றினால் தயாரிக்கப்பட்ட 50 மின் விளக்குகளின் சராசரி ஒளிரும் கால அளவு (life time) 825 மணி நேரம் மற்றும் திட்ட விலக்கம் 110 மணி நேரம் என மதிப்பிடப் படுகிறது. தொழிற்சாலையில் தயாரிக்கப்படும் அனைத்து மின் விளக்குகளுக்கும் சராசரி ஒளிரும் கால அளவு μ எனில் $\mu = 900$ மணி நேரம் என்ற எடுகோளை 5% முக்கியத்துவ மட்டத்தில் சோதிக்க.

தீர்வு :

$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

மறுக்கத்தக்க எடுகோள் $H_0 : \mu = 900$

மாற்று எடுகோள் $H_1 : \mu \neq 900$

சோதனை அளவை Z ஆனது திட்ட இயல்நிலை மாறியாகும்.

H_0-க்கு $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ இங்கு கூறு சராசரி $\overline{X}$ ஆகும் σ ஆனது முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம்.

= பெறுங்கூறுக்கு $\sigma = s$ எனக் கருதலாம்

$$= \frac{825-900}{\frac{110}{\sqrt{50}}} = -4.82.$$

$$\therefore\ |Z| = 4.82$$

முக்கியத்துவ மட்டம், $\alpha = 0.05$ அல்லது 5%

நிராகரிப்புப் பகுதி $|Z| \geq 1.96$

ஏற்புப் பகுதி $|Z| < 1.96$

கணக்கிடப்பட்ட Z ன் மதிப்பு 1.96 ஐ விட பெரிய எண்ணாகும்.

முடிவு : கணக்கிடப்பட்ட Z ன் மதிப்பு 4.82 ஆனது நிராகரிப்புப் பகுதியில் உள்ளது. எனவே மறுக்கத்தக்க எடுகோள் நிராகரிப்படுகிறது.

$\therefore$ ஆகவே முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள மின் விளக்குகளின் சராசரி ஒளிரும் கால அளவு 900 மணி நேரம் என்ற கூற்றினை ஏற்க இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 13

ஓர் நிறுவனம் கார் டயர்களை தயாரித்து, விற்பனை செ-கிறது. டயர்களின் ஆயுட்காலம் சராசரி 50000 கி.மீ. மற்றும் திட்ட விலக்கம் 2000 கி.மீ. எனக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாக உள்ளது. டயர்களை புதிய முறையில் தயாரித்தால் விற்பனை பெருக வா-ப்புள்ளதாக அந்நிறுவனம் கருதுகிறது. சோதனை முறையில் 64 புதிய டயர்களின் சராசரி ஆயுட்காலம் 51250 கி.மீ. எனக் கண்டறியப்படுகிறது. கூறு சராசரியானது முழுமைத் தொகுதி சராசரியிலிருந்து குறிப்பிடத்தக்க வகையில் மாறுபட்டுள்ளதா என 5% நிலையில் சோதிக்க.

தீர்வு :

கூறு அளவு, $n = 64$

கூறு சராசரி $= 51250$

H_0 : முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி $\mu = 50000$

$H_1 : \mu \neq 50000$

H_0 க்கு சோதனை அளவை $Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

$$Z = \frac{51250 - 50000}{\frac{2000}{\sqrt{64}}} = 5$$

கணக்கிடப்பட்ட Z -ன் மதிப்பு 1.96 ஐ விட பெரிய எண்ணாக இருப்பதால் Z -ன் மதிப்பு முக்கியமாகிறது.

$\therefore \quad H_0 : \mu = 50000$ நிராகரிக்கப்படுகிறது.

அதாவது கூறு சராசரியானது முழுமைத் தொகுதியின் சராசரியிலிருந்து குறிப்பிடத்தக்க அளவில் மாறுபடுகிறது.

$\therefore$ நிறுவனத்தின் கூற்றான புதிய தயாரிப்புகள் தற்போதைய தயாரிப்புகளைவிட சிறந்தது என்பதை ஏற்றுக்கொள்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 14

400 மாணவர்களைக் கொண்ட கூறிலிருந்து, அவர்களின் சராசரி உயரம் 171.38 செ.மீ. என அறியப்பட்டது. சராசரி உயரம் 171.17 செ.மீ. மற்றும் திட்ட விலக்கம் 3.3 செ.மீ. எனக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து அக்கூறு எடுக்கப்பட்டதாகக் கருதலாமா என ஆரா-க (5% முக்கியத்துவ மட்டத்தில் சோதிக்க)

தீர்வு :

கூறின் அளவு, $n = 400$

கூறு சராசரி $= 171.38$

முழுமைத் தொகுதி சராசரி $\mu = 171.17$

கூறின் திட்ட விலக்கம் = s. $\dfrac{\overline{\mathbf{X}} - \mu}{\sqrt{n}}$

முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் $\sigma = 3.3$

$H_0 : \mu = 171.38$ எனக் கொள்வோம்.

சோதனை அளவை $Z = \quad \sim N(0, 1)$

$$= \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{171.38 - 171.17}{\frac{3.3}{\sqrt{400}}} = 1.273$$

$| Z | = 1.273 < 1.96$

எனவே 5% முக்கியத்துவ நிலையில் மறுக்கத்தக்க எடுகோளை ஏற்றுக்கொள்கிறோம்.

ஆகவே சராசரி உயரம் 171.17 செ.மீ. உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 400 உறுப்புகளைக் கொண்ட கொடுக்கப்பட்டக் கூறு எடுக்கப்பட்டதாகக் கருதலாம்.

பயிற்சி 9.4

1) 1600 சிறுவர்களைக் கொண்ட கூறு ஒன்றிலிருந்து அவர்களின் சராசரி நுண்ணறிவு ஈவு (I.Q) 99 ஆகும். சராசரி நுண்ணறிவு ஈவு 100 மற்றும் திட்ட விலக்கம் 15 எனவும் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து அக்கூறு எடுக்கப்பட்டதா என சோதிக்கவும். (5% முக்கியத்துவ மட்டத்தில்)

2) ஒரு குறிப்பிட்ட கிராமத்தில் உள்ளவர்களின் சராசரி வருமானம் ரூ.6000 மற்றும் பரவற்படி ரூ.32400 ஆகும். சராசரி வருமானம் ரூ.5950 எனக் கொண்ட 64 நபர்கள் அடங்கிய கூறு ஒன்று அந்த முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்டதா என 5% மற்றும் 1% முக்கியத்துவ நிலைகளில் சோதிக்கவும்.

3) ஒரு குறிப்பிட்ட பிரிவைச் சார்ந்த நபர்களிலிருந்து 36 நபர்களைக் கொண்டு சமவா–ப்புக் கூறு எடுக்கப்பட்டது. அவர்களின் வருட மொத்த வருமானம் பின்வருமாறு:

வருமானம் (ரூபா– ஆயிரங்களில்)

6.5	10.5	12.7	13.8	13.2	11.4
5.5	8.0	9.6	9.1	9.0	8.5
4.8	7.3	8.4	8.7	7.3	7.4
5.6	6.8	6.9	6.8	6.1	6.5
4.0	6.4	6.4	8.0	6.6	6.2
4.7	7.4	8.0	8.3	7.6	6.7

கூறின் விவரங்களின் அடிப்படையில் வருடாந்திர சராசரி வருமானம் ரூ. 10,000 கொண்ட அப்பிரிவைச் சார்ந்த நபர்களடங்கிய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இக்கூறு எடுக்கப்பட்டதா என 5% முக்கியத்துவ நிலையில் சோதிக்க.

4) புதிய போனஸ் திட்டத்தை 60% தொழிலாளர்கள் ஆதரிக்கின்றனர் என்ற நிர்வாகத்தின் கூற்றினை சோதித்தறியும் பொருட்டு 150 பேர்களடங்கிய சமவா–ப்புக் கூறு ஒன்றினைத் தெரிவு செ–து, அவர்களின் கருத்துக் கேட்கப்பட்டது. 150 பேர்களில் 55 தொழிலாளர்கள் மட்டுமே புதிய போனஸ் திட்டத்தை ஆதரிப்பது தெரிய வந்தது எனில் நிர்வாகத்தின் கூற்றை 1% முக்கியத்துவ மட்டத்தில் சோதிக்க.

பயிற்சி 9.5

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செ-க

1) கூறு சராசரியின் திட்டப்பிழை
   (a) முதல்வகைப் பிழை (b) இரண்டாம் வகைப் பிழை
   (c) சராசரியின் கூறெடுப்புப் பரவலின் திட்டவிலக்கம்
   (d) சராசரிகளின் கூறெடுப்புப் பரவலின் பரவற்படி

2) திட்டவிலக்கம் 32 எனக்கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 64 அளவுள்ள ஒரு சமவா–ப்புக் கூறெடுத்தால், சராசரியின் திட்டப்பிழை
   (a) 0.5 (b) 2 (c) 4 (d) 32

3) மைய எல்லைத் தேற்றப்படி, சராசரிகளின் கூறெடுப்புப் பரவல் ஆனது ஒரு இயல்நிலை பரவலைப் பெற பின்வருவனவற்றில் எது உண்மையாக இருக்க வேண்டும்.
   (a) முழுமைத் தொகுதியின் அளவு அதிகரிக்கும்பொழுது
   (b) கூறின் அளவு அதிகரித்து பெருங்கூறாக மாறும்பொழுது
   (c) கூறுகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும்பொழுது
   (d) கூறு அளவு குறையும்பொழுது

4) முழுமைத் தொகுதி அளவையை மதிப்பீடு செ–யும்பொழுது 95% நம்பக இடைவெளியைப் பெற பயன்படுத்தப்படும் Z ன் மதிப்பு
   (a) 1.28 (b) 1.65 (c) 1.96 (d) 2.58

5) மறுக்கத்தக்க எடுகோள் உண்மையாக இருந்து, நிராகரிக்கப்படுவதற்குரிய நிகழ்தகவு
   (a) முதல்வகைப் பிழை (b) இரண்டாம் வகைப்பிழை
   (c) கூறெடுப்புப் பிழை (d) திட்டப் பிழை

6) பின்வருவனவற்றுள் எது உண்மை?
   (a) புள்ளி மதிப்பீடு ஆனது, பல மதிப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு வீச்சசாக தரப்படுகிறது.
   (b) கூறு அளவையை மதிப்பிடவே கூறெடுத்தல் செ–யப்படுகிறது.
   (c) முழுமைத் தொகுதி அளவையை மதிப்பிட கூறெடுப்பு செ–யப் படுகிறது.
   (d) முடிவுறா தொகுதியில் கூறெடுத்தல் இயலாது.

7) 10 நுகர்வோர்களிலிருந்து 2 நுகர்வோர்களைத் தெரிவு செ–யும் வழிகளின் எண்ணிக்கை
   (a) 90 (b) 60 (c) 45 (d) 50

பயன்பாட்டுப் புள்ளியியல் 10

10.1 *நேரிய திட்டமிடல்* (Linear Programming)

தொழிலாளர்கள், மூலப்பொருள்கள், இயந்திரங்கள், மூலதனம் போன்ற ஓர் அளவுக்கு உட்பட்ட வள ஆதாரங்களைக் கொண்டு பொருள்களின் உற்பத்தி, சேவைகள், குறிப்பிட்ட வேலைகள், திட்ட செயல்பாடுகளுக்கு அவற்றின் ஆதாய முக்கியத்துவ அடிப்படையில் அதிகப்படியான ஆதாயம் பெறும் வகையில் பகிர்ந்தளிக்கும் பொதுவான உத்தி **நேரிய திட்டமிடல்** ஆகும். திட்டமிடும் காலத்தில் ஆதாரங்கள் கிடைப்பது அரிதாக இருப்பதை ஓர் அளவுக்கு உட்பட்ட ஆதாரங்கள் என்று குறிப்பிடுகிறோம். ஆதாய முக்கியத்துவ அடிப்படை என்பது செயல் ஆக்கம், முதலீட்டின் பலன், பயன்பாடு, நேரம், தூரம் போன்றவற்றைக் குறிக்கும். நேரியல் என்ற சொல் ஓர் வடிவமைப்பில் உள்ள இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளின் சரிசமவீத தொடர்பைக் குறிக்கும். பல்வேறு செயல்திட்டங்களிலிருந்து ஒன்றைத் தெரிவு செ–யும் முறையைத் திட்டமிடல் என்கிறோம். மேலாண்மை செயல்பாடுகளில் சிறந்த தீர்மானங்கள் எடுக்க நேரியல் திட்டமிடல் பெரிதும் பயனுள்ள உத்தியாகும்.

10.1.1 *நேரிய திட்டமிடல் கணக்கின்* (LPP) *கட்டமைப்பு*

'நேரிய திட்டமிடல்' என்ற வடிவமைப்பு கீழ்வரும் மூன்று அடிப்படைக் கூறுகளை கொண்டுள்ளது :

(i) தேவையான தீர்மான மாறிகள் (Decision variables)

(ii) உகம (பெரும அல்லது சிறும) மதிப்புப் பெறும் குறிக்கோள் (objective)

(iii) நிறைவு செ–யப்பட வேண்டிய கட்டுப்பாடுகள் (constraints)

10.1.2 *நேரிய திட்டமிடல் கணக்கை உருவாக்குதல்*

நேரிய திட்டமிடல் கணக்கை ஒரு கணித மாதிரியாக அமைப்பதற்கு கீழ்வரும் வழிமுறைகளைக் கையாளுவோம்.

படி 1 : தேவையான முக்கிய தீர்மானங்கள் கிடைத்திட கொடுக்கப்பட்ட சூழ்நிலையை ஆ–ந்தறிய வேண்டும்.

படி 2 : அதிலுள்ள மாறிகளை கண்டறிந்து அவைகளை $x_j (j = 1, 2 ...)$ எனக் குறித்தல் வேண்டும்.

படி 3 : கணக்கியல் வாயிலாக ஏற்புடையத் தீர்வுகளைக் குறிக்க, பொதுவாக இந்த மாறிகளை $x_j \geq 0$ (எல்லா j க்களுக்கும்) என குறிப்பது வழக்கம்.

படி 4 : கணக்கில் உள்ள கட்டுப்பாடுகளுக்கு ஏற்றாற்போல் தீர்மான மாறிகளைக் கொண்டு அசமன்பாடுகளை அல்லது சமன்பாடுகளை அமைக்க வேண்டும்.

படி 5 : குறிக்கோள் சார்பை இனம் கண்டு அதை தீர்மான மாறிகளின் நேரியச் சார்பாக எழுத வேண்டும்.

10.1.3 *நேரிய திட்டமிடலின் பயன்பாடுகள்*

நேரிய திட்டமிடல் பல துறைகளில் பயன்படுகிறது. அவைகளில் சிலவற்றைக் காண்போம்.

(i) *போக்குவரத்து :* உற்பத்தி செ–யப்பட்ட இடத்திலிருந்து உற்பத்தி செ–யப்பட்ட பொருளை தேவையான வெவ்வேறு இடங்களுக்கு பகிர்ந்து அளிப்பதற்காக திட்டம் வகுத்தல்

(ii) *ஒப்படைப்பு :* அதிகபட்ச அளவு திறன் வெளிப்படுமாறு, நபர்களிடையே வேலையைப் பகிர்தல்.

(iii) *விற்பனைச் செலவு :* மொத்தச் செலவை சிறுமமாக இருக்கும் வகையில் பல்வேறு இடங்களுக்கு செல்ல வேண்டிய விற்பனையாளருக்கு மீச்சிறு தொலைவு கொண்ட வழித்தடத்தைக் காணல்.

(iv) *முதலீடு :* இடர்பாடுகளைக் குறைத்து ஆதாயத்தை அதிபடுத்த மூலதனைத்தை வெவ்வேறு செயல்பாடுகளுக்குப் பகிர்தல்.

(v) *விவசாயம் :* உற்பத்தியின் அளவை பெருமமாக்க நிலங்களை வெவ்வேறு பகுதிகளாகப் பிரித்து கொடுத்தல்.

10.1.4 *சில முக்கிய வரையறைகள்*

ஏற்புடைய தீர்வு (feasible solution) என்பது கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள எல்லா கட்டுப்பாடுகளையும் நிறைவு செ–யும் தீர்வாகும்.

ஏற்புடைய தீர்வுகளைக் கொண்ட பகுதியே **ஏற்புடைய பகுதியாகும்.**

குறிக்கோள் சார்பின் உகம (பெரும அல்லது சிறும) மதிப்பைத் தரும் ஏற்புடைய தீர்வு **உகமத் தீர்வு** என்றழைக்கப்படும்.

குறிப்பு

உகமத் தீர்வு தனித் தன்மை உடையது அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 1

மரப்பொருட்கள் தயாரிக்கும் ஒரு நிறுவனம் தங்களிடம் உள்ள ஒரு வகை மரத்தாலான 400 அடி பலகையையும் மற்றும் 450 மணி மனித உழைப்பு நேரத்தையும் கொண்டு நாற்காலிகள் மற்றும் மேசைகளைத் தயாரிக்க திட்டமிடுகிறது. ஒரு நாற்காலி செ-வதற்கு 5 அடி பலகையும் 10 மணி மனித உழைப்பு நேரம் தேவை மற்றும் அதன்மூலம் கிடைக்கும் இலாபம் ரூ.45, ஒரு மேசை செ-ய 20 அடி பலகையும் 15 மணி மனித நேரம் தேவை மற்றும் அதன்மூலம் கிடைக்கும் இலாபம் ரூ.80 என்பதை அந்த நிறுவனம் அறிகிறது. தன்னிடம் உள்ள சரக்கைக் கொண்டும் கட்டுப்பாடுகளைக் கொண்டும் பெரும இலாபம் கிடைக்க எத்தனை நாற்காலிகள், மேசைகளை உற்பத்தி செ-ய வேண்டும்? மேற்கண்டவைகளை நேரிய திட்டமிடல் முறையில் வடிவாக்குக.

தீர்வு :

கணிதமுறை வடிவாக்கம் :

கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் சுருக்கமாகக் கீழே கொடுக்கப்படுகின்றன.

உற்பத்தி	கச்சா பொருட்கள் (ஓர் அலகுக்கு)	உழைப்பு (ஓர் அலகுக்கு)	இலாபம் (ஓர் அலகுக்கு)
நாற்காலி	5	10	ரூ. 45
மேசை	20	15	ரூ. 80
மொத்த இருப்பு	400	450	

படி 1 : நாற்காலிகளின் உற்பத்தி எண்ணிக்கையையும் மேசையின் உற்பத்தி எண்ணிக்கையையும் தீர்மானிக்க வேண்டும்.

படி 2 : x_1 , x_2 முறையே நாற்காலிகளின் எண்ணிக்கையையும், மேசைகளின் எண்ணிக்கைகயையும் குறிக்கட்டும்.

படி 3 : குறை எண்களில் உற்பத்தி செ–ய முடியாது ஆகையால் $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

படி 4 : கச்சாப் பொருட்கள், உழைப்பு இவற்றிற்கு ஏற்றார்போல் கட்டுப்பாடுகள் ஓர் எல்லைக்குள் அமையும். ஒரு நாற்காலிக்கு 5 அடி மர பலகையும், ஒருமேசைக்கு 20 அடி மர பலகையும் தேவைப்படுகிறது. x_1 , x_2 என்பன நாற்காலி மற்றும் மேசையின் அளவுகள் எனில் மொத்த கச்சாப் பொருட்களின் தேவையானது $5x_1$ + $20x_2$, இது கை இருப்பு கச்சா பொருளான 400 அடி மரப்பலகைக்கு அதிகமாகாமல் இருக்க வேண்டும். எனவே கச்சாப் பொருளின் கட்டுப்பாடானது :

$$5x_1 + 20x_2 \leq 400$$

இதேபோல், உழைப்பின் கட்டுப்பாடானாது :

$$10x_1 + 15x_2 \leq 450$$

படி 5 : குறிக்கோளானது, அந்த நிறுவனம் நாற்காலி மற்றும் மேசை இவைகளை விற்பதால் கிடைக்கும் இலாபத்தை பெரும மதிப்பை அடையச் செ–வதாகும். இதை நேரிய சார்பாக எழுத கிடைப்பது :

$$Z = 45x_1 + 80x_2.$$

இந்த நேரிய திட்டமிடல் கணக்கை நாம் கணித வடிவில் அமைப்போம்.

$$5x_1 + 20x_2 \leq 400$$
$$10x_1 + 15x_2 \leq 450$$
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க, குறிக்கோள் சார்பு

$Z = 45x_1 + 80x_2$ -ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 2

ஒரு நிறுவனம் A மற்றும் B என்ற இரு அளவில் தலைவலி மாத்திரைகளை தயார் செ-கிறது A-இல் 2 மில்லிகிராம் ஆஸ்பிரினும் 5 மில்லிகிராம் பை-கார்பனேட்டும் மற்றும் 1 மில்லி கிராம் கொடைனும் உள்ளது. B-இல் 1 மில்லிகிராம் ஆஸ்பிரினும், 8 மில்லிகிராம் பை-கார்பனேட் மற்றும் 6 மில்லிகிராம் கொடைனும் உள்ளது. உடனடி வலி நிவாரணத்திற்கு குறைந்த பட்சம் 12 மில்லிகிராம் ஆஸ்பிரினும், 74 மில்லிகிராம் பைகார்பனேட்டும் மற்றும் 24 மில்லி கிராம் கொடைனும் தேவை என உணரப்படுகிறது. ஒரு நோயாளி உடனடி நிவாரணம் பெற குறைந்தது எத்தனை மாத்திரைகளை உட்கொள்ள வேண்டும் என்பதைத் தீர்மானிக்க. இந்த கணக்கை நேரிய திட்டமிடல் முறையில் எழுதுக.

தீர்வு :

விவரங்கள் பின்வருமாறு சுருக்கி எழுதப்பட்டுகின்றது.

தலைவலி மாத்திரைகள்	ஒரு மாத்திரைக்கு ஆஸ்பிரின்	பைகார்பனேட்	கொடைன்
A அளவு	2	5	1
B அளவு	1	8	6
குறைந்தபட்ச தேவை	12	74	24

தீர்மான மாறிகள் :

A அளவு மாத்திரையின் எண்ணிக்கை x_1

B அளவு மாத்திரையின் எண்ணிக்கை x_2

நேரிய திட்டமிடல் கணக்கானது கீழ்க்கண்ட கணித வடிவத்தைப் பெறுகிறது.

$$2x_1 + x_2 \geq 12$$
$$5x_1 + 8x_2 \geq 74$$
$$x_1 + 6x_2 \geq 24$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க, குறிக்கோள் சார்பு

$Z = x_1 + x_2$ -ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க.

10.1.5 வரைபடம் மூலம் தீர்வு காணல்

இரு மாறிகளைக் கொண்ட நேரிய திட்டமிடல் கணக்கிற்கு வரைபடம் மூலம் எளிதாகத் தீர்வு காணலாம். வரைபடம் மூலம் தீர்வு காணும் முறை :

படி 1 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்கை கணித முறையில் கூறுதல்

படி 2 : கணக்கில் உள்ள கட்டுப்பாடுகளை வரைபடமாக்குதல் மற்றும் ஏற்புடைய பகுதியை (தீர்வுப் பகுதி) தெரிந்து கொள்ளுதல். கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்கின் கட்டுப்பாடுகளைக் குறிக்கும் கோடுகள் வெட்டிக் கொள்வதால் உண்டாகும் பொதுவான பகுதி தீர்வுப் பகுதியாகும். நமக்கு தேவையான தீர்வுப் பகுதி முதல் கால் பகுதியிலேயே $(x_1 , x_2 \geq 0)$ அமையும் என அறியலாம்.

படி 3 : தீர்வுப் பகுதியின் மூலைப் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைவு தூரங்களை நிர்ணயம் செ–க.

படி 4 : படி 3-ல் கண்டறிந்த ஒவ்வொரு மூலைப் புள்ளியிலும் குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பைக் காண்க.

படி 5 : குறிக்கோள் சார்பின் இறுதித் தீர்வை (பெருமம் அல்லது சிறுமம்) நிர்ணயம் செ–யும் மூலைப் புள்ளியைக் காண்க. அந்த புள்ளியில்தான் ஏற்புடைய தீர்வு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 3

ஒரு நிறுவனம் P_1 மற்றும் P_2 என்ற இரு பொருட்களைத் தயாரிக்கிறது. இந்த இரண்டு பொருட்களை தயாரிக்க அந்த நிறுவனத்திடம் A, B என்ற இரண்டு இயந்திரங்கள் உள்ளன. P_1 என்ற பொருளை தயாரிக்க A இயந்திரம் 2 மணி நேரத்தையும் B இயந்திரம் 4 மணி நேரத்தையும் எடுத்துக்கொள்கிறது. P_2 என்ற பொருளை தயாரிக்க A இயந்திரம் 5 மணி நேரத்தையும் B இயந்திரம் 2 மணி நேரத்தையும் எடுத்துக்கொள்கிறது. P_1 பொருளை ஓர் அலகு விற்பதால் இலாபம் ரூ.3 மற்றும் P_2 பொருளை ஓர்அலகு விற்பதால் இலாபம் ரூ.4 கிடைக்கும்

என எதிர்பார்க்கப்படுகிறது. A , B இயந்திரங்கள் முறையே 24 மணி நேரம் மற்றும் 16 மணிநேரம் செயல்பட்டால், வரைபடத்தின் மூலம் பெரும இலாபம் கிடைக்க ஒவ்வொரு பொருளின் வராந்திர உற்பத்தியின் அளவைக் காண்க.

தீர்வு :

கணக்கில் உள்ள விவரங்கள் சுருக்கி கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன

பொருட்கள்	நேரம் இயந்திரம் A	நேரம் இயந்திரம் B	இலாபம் (ஓர் அலகுக்கு)
P_1	2	4	3
P_2	5	2	4
பெரும நேரம் / வாரம்	120	80	

x_1 , x_2 முறையே உற்பத்தியான P_1 மற்றும் P_2-ன் அலகுகளின் எண்ணிக்கை என்க.

கணிதமுறை வடிவாக்கமானது :

$$2x_1 + 5x_2 \leq 120$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 80$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

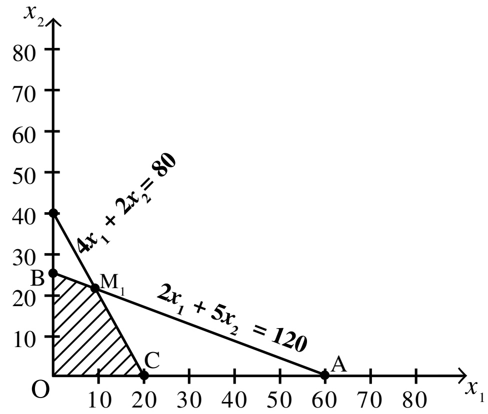
என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க குறிக்கோள் சார்பு

$Z = 3x_1 + 4x_2$ -ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க.

வரைபடத்தின் மூலம் தீர்வு

$2x_1 + 5x_2 = 120$ மற்றும் $4x_1 + 2x_2 = 80$ என்ற சமன்பாடுகளைக் கருதுக. நேர்க்கோடு $2x_1 + 5x_2 = 120$ -ல் (0, 24) மற்றும் (60, 0) என்பன இரு புள்ளிகள். இவ்விரு புள்ளிகளையும் இணைக்க $2x_1 + 5x_2 = 120$ என்ற கோட்டினைப் பெறலாம். இதேபோன்று $4x_1 + 2x_2 = 80$ என்ற நேர்கோட்டை (20, 0) மற்றும் (0, 40) ஆகியவற்றை இணைப்பதன் மூலம் பெறலாம் (படம். 10.1).

வரைபடத்தின் மூலம் எல்லா கட்டுப்பாடுகளும் உருவமைக்கப்படுகிறது.



(படம் 10.1)

தீர்வு பகுதி என்றழைக்கப்படும், கட்டுப்பாடுகள் அனைத்தும் உள்ளடக்கிய பரப்பு வரைபடத்தில் (படம் 10.1) OCM_1 B பகுதியாக நிழலிட்டு காட்டப்பட்டுள்ளது.

குறிக்கோள் சார்பின் உகம மதிப்பானது தீர்வு பகுதியில் உள்ள ஒரு மூலையில் அமைகிறது.

மூலைப்புள்ளிகள் முறையே

O = (0, 0), C = (20, 0), M_1 = (10, 20), B = (0, 24)

Z-ன் மதிப்பை மூலைப்புள்ளிகளில் காண்போம் :

மூலைப் புள்ளி	(x_1, x_2)	$Z = 3x_1 + 4x_2$
O	(0, 0)	0
C	(20, 0)	60
M_1	(10, 20)	110
B	(0, 24)	96

குறிக்கோள் சார்பு அடையும் பெரும மதிப்பு புள்ளியே உகம தீர்வுப் புள்ளி ஆகும். எனவே உகம தீர்வுப் பெறும் புள்ளி M_1 ஆகும். அதாவது $x_1 = 10$ மற்றும் $x_2 = 20$.

P_1 மற்றும் P_2 முறையே வாரத்திற்கு 10 அலகுகள் மற்றும் 20 அலகுகள் உற்பத்தி செ–து பெரும இலாபம் ரூ.110 -யை பெறலாம்.

குறிப்பு

குறிக்கோள் சார்பின் மூலைப்புள்ளி ஒன்றிலிருந்து கிடைக்கும் பெரும மதிப்பே, பெருமதிப்பைக் காணல் என்ற கணக்கின் உகம தீர்வாக அமையும் குறிக்கோள் சார்பின் மூலைப்புள்ளி ஒன்றிலிருந்து கிடைக்கும் சிறும மதிப்பே, சிறும மதிப்பைக் காணல் என்ற கணக்கின் உகம தீர்வாக அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 4

வரைபடம் மூலம் தீர்க்க :

$$36x_1 + 6x_2 \geq 108$$
$$3x_1 + 12x_2 \geq 36$$
$$20x_1 + 10x_2 \geq 100$$
$$x_1, \ x_2 \geq 0$$

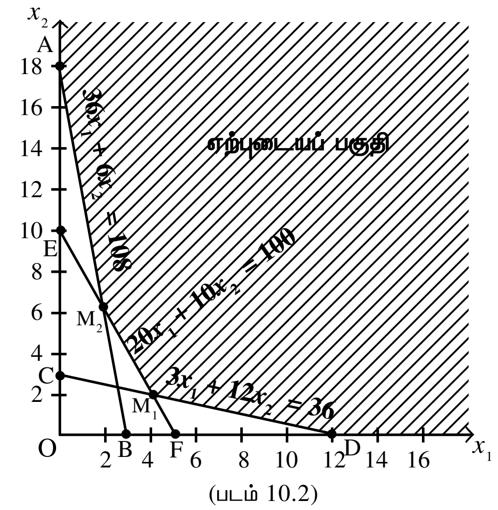
என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கிணங்க,

$Z = 20x_1 + 40x_2$ன் சிறும மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

வரைபடத்தில் தீர்வுப் பகுதியைக் குறித்தல்

A(0, 18) மற்றும் B(3, 0) ; C(0, 3) மற்றம் D(12, 0) ; E(0, 10) மற்றும் F(5, 0) என்பன முறையே $36x_1 + 6x_2 = 108$, $3x_1 + 12x_2 = 36$ மற்றும் $20x_1 + 10x_2 = 100$ என்ற கோடுகளைத் தீர்மானிக்கிறது. (படம் 10.2.)



(படம் 10.2)

கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கட்டுப்பாடுகளுக்குக்கிணங்க வரைபடமானது வரையப்பட்டுள்ளது. நிழலிட்ட பகுதியே தீர்வுப் பகுதி நிழலிட்ட பகுதியில் உள்ள எந்த ஒரு புள்ளியும் கொடுக்கப்பட்ட கட்டுப்பாடுகளை நிறைவேற்றும். தீர்வுப் பகுதியின் மூலைப் புள்ளிகள் முறையே, A = (0, 18), M_2 = (2, 6), M_1 = (4, 2), D = (12, 0)

இந்த புள்ளிகளில் Z-ன் மதிப்பைக் காண்போம்

மூலைப்புள்ளி	(x_1, x_2)	$Z = 20x_1 + 40x_2$
A	(0, 18)	720
M_1	(4, 2)	160
M_2	(2, 6)	280
D	(12, 0)	240

குறிக்கோள் சார்பின் சிறும மதிப்பானது எந்த புள்ளியில் கிடைக்கிறதோ அந்த புள்ளியே உகமத் தீர்வைப் பெற்று தரும். ஆகவே, M_1 -ல் உகமத் தீர்வு கிடைக்கிறது. (அ–து) $x_1 = 4$ மற்றும் $x_2 = 2$ குறிக்கோள் சார்பு Z-ன் மதிப்பு 160

$\therefore$ $x_1 = 4$ மற்றும் $x_2 = 2$ -ல் குறும மதிப்பு z = 160 ஆகும்.

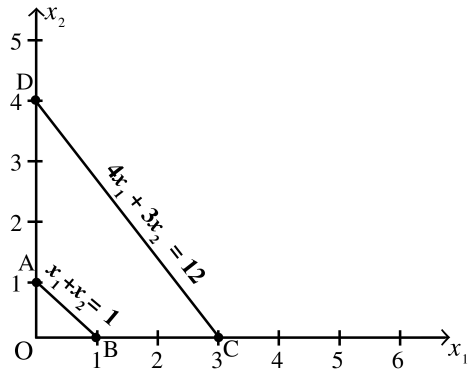
எடுத்துக்காட்டு 5

$$x_1 + x_2 \le 1$$
$$4x_1 + 3x_2 \ge 12$$

$x_1, \ x_2 \ge 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கிணங்க,

$Z = x_1 + x_2$ -ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க

தீர்வு :



(படம் 10.3)

மேற்கண்ட வரைபடத்தில் தீர்வுப் பகுதி இல்லை ஆதலால், கொடுக்கப்பட்ட கணக்கிற்கு தீர்வுகள் இல்லை.

பயிற்சி 10.1

1) A மற்றும் B என்ற இருவகையான பொருட்களை ஒரு நிறுவனம் உற்பத்தி செ–கிறது. இந்த இருவகையான பொருட்களின் மூலம் இலாபம் ரூ.30/- மற்றும் ரூ.40/- ஒவ்வொரு கி.கிராமுக்கும் கிடைக்கிறது. மூலப் பொருட்களின் விவரங்களும் அதன் இருப்புத் தன்மை பற்றியும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

	தேவைகள்		இருப்பின் அளவு மாதத்திற்கு
	பொருள் A	பொருள் B	
கச்சா பொருட்கள் (கி.கி.)	60	120	12000
இயந்திர இயங்கும் நேரம்/அலகு	8	5	600
உருப்படி செ–தல் (மனிதநேரம்)	3	4	500

பெரும இலாபத்தை ஈட்ட இந்த கணக்கை நேரிய திட்டமிடல் அமைப்பில் எழுதுக.

2) ஒரு நிறுவனம் A மற்றும் B என்ற இருவகைப் பொருட்களைத் தயார் செ–து, முறையே ரூ.3 மற்றும் ரூ.4 என இலாபம் ஈட்டுகிறது. M_1 மற்றும் M_2 என்ற இயந்திரங்கள் இந்த இரண்டு பொருட்களைத் தயார் செ–கின்றன. A என்ற பொருளைத் தயாரிக்க M_1 -க்கு ஒரு நிமிடமும் மற்றும் M_2 -க்கு இரண்டு நிமிடங்களும் ஆகின்றன. B என்ற பொருளைத் தயாரிக்க M_1 க்கு ஒரு நிமிடமும் மற்றும் M_2 க்கு ஒரு நிமிடமும் ஆகின்றன. ஒரு வேலை நாளில் M_1 7 மணி 30 நிமிடங்களுக்கு மேல் வேலை செ–வதில்லை. M_2 இயந்திரம் 10 மணி நேரம் தான் வேலை செ–கிறது. பெரும இலாபம் கிடைக்க இந்த கணக்கை நேரிய திட்டமிடல் அமைப்பில் எழுதுக.

3)
$$5x_1 + 20x_2 \le 400$$
$$10x_1 + 15x_2 \le 450$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கிணங்க $Z = 45x_1 + 80x_2$ –ன் பெரும மதிப்பை வரைபடத்தின் மூலம் காண்க.

4) $2x_1 + x_2 \le 40$

$2x_1 + 5x_2 \le 180$

$x_1,\ x_2 \ge 0$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கிணங்க $Z = 3x_1 + 4x_2$ -ன் பெரும மதிப்பை வரைபடத்தின் மூலம் காண்க.

5) $5x_1 + x_2 \ge 10$

$2x_1 + 2x_2 \ge 12$

$x_1 + 4x_2 \ge 12$

$x_1, x_2 \ge 0$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கிணங்க $Z = 3x_1 + 2x_2$ -ன் சிறும மதிப்பை வரைபடத்தின் மூலம் காண்க.

10.2 ஒட்டுறவு மற்றும் தொடர்புப் போக்கு

10.2.1 ஒட்டுறவின் பொருள்

ஒட்டுறவு என்பது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பின் அளவைக் குறிக்கின்றது. ஒரு மாறியின் மாற்றம் மற்ற மாறியைப் பாதித்து அதையும் மாற்றினால் அவ்விரு மாறிகளையும் ஒட்டுறவு மாறிகள் (தொடர்புள்ள மாறிகள்) என்கிறோம். அடிப்படையில் நேரிடை ஒட்டுறவு, எதிரிடை ஒட்டுறவு மற்றும் சார்பற்ற ஒட்டுறவு என்று மூன்று வகையான ஒட்டுறவுகள் உள்ளன.

நேரிடை ஒட்டுறவு (Positive correlation)

இரு மாறிகளின் மதிப்புகளும் ஒரே திசையில் மாறுபட்டால், அதாவது, ஒரு மாறியின் மதிப்பு அதிகரிக்கும்பொழுது (அல்லது குறையும் பொழுது) மற்ற மாறியின் மதிப்பு அதிகரித்தாலோ (அல்லது குறைந்தாலோ) அவ்விரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை **நேரிடை ஒட்டுறவு** என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) தனி மனிதர்களின் உயரம் மற்றும் எடை

(ii) வருவாா– மற்றும் செலவு

(iii) அனுபவம் மற்றும் ஊதியம்

எதிரிடை ஒட்டுறவு (Negative Correlation)

இரு மாறிகளின் மதிப்புக்கள் எதிர்த்திசையில் மாறுபட்டால், அதாவது ஒரு மாறியின் மதிப்பு அதிகரிக்கும் பொழுது (அல்லது குறையும் பொழுது) மற்ற மாறியின் மதிப்பு குறைந்தாலோ (அல்லது அதிகரித்தாலோ), அவ்விரு மாறிகளுக்கிடையே **எதிரிடை ஒட்டுறவு** உள்ளது என்கிறோம்.

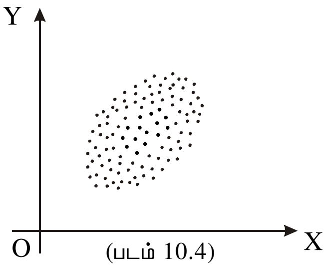
எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) விலை மற்றும் தேவை

(ii) திருப்பிச் செலுத்தும் காலம் மற்றும் சம மாதத் தவணை

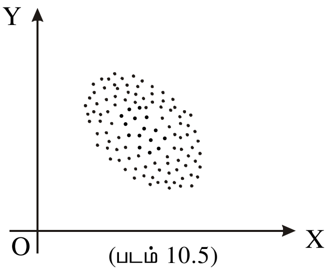
10.2.2 சிதறல் விளக்கப்படம் (Scatter Diagram)

(x_1, y_1), (x_2, y_2) ... (x_n, y_n) என்பவை x மற்றும் y மாறிகளின் n சோடி மதிப்புகள் என்க. x ன் மதிப்புக்களை x-அச்சுத் திசையிலும், y-ன் மதிப்புக்களை y-அச்சுத் திசையிலும் குறிக்கும்பொழுது கிடைக்கப்பெறும் வரைபடம் **சிதறல் விளக்கப்படம்** என அழைக்கப்படுகிறது. x மற்றும் y மாறிகளின் மதிப்புக்களுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவை இவ்விளக்கப் படம் அளிக்கிறது. நேர்கோட்டு ஒட்டுறவிற்கான சிதறல் விளக்கப்படங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:



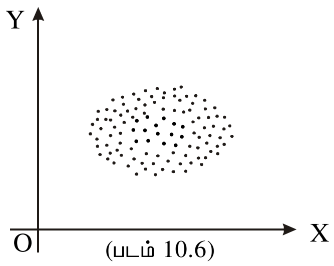
(படம் 10.4)

நேரிடை ஒட்டுறவு



(படம் 10.5)

எதிரிடை ஒட்டுறவு



(படம் 10.6)

சார்பற்ற ஒட்டுறவு

(i) குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் மேல்நோக்கிய போக்கை காண்பித்தால், மாறிகளுக்கிடையே நேரிடை ஒட்டுறவு உள்ளது (படம் 10.4).

(ii) குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் கீழ்நோக்கிய போக்கை காண்பித்தால், மாறிகளுக்கிடையே எதிரிடை ஒட்டுறவு உள்ளது (படம் 10.5).

(iii) குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் எவ்வித போக்கையும் காண்பிக்கவில்லை யெனில் ஒட்டுறவு இல்லை எனக் கூறப்படுகிறது (படம் 10.6).

10.2.3 ஒட்டுறவுக்கெழு (Co-efficient of Correlation)

பிரிட்டன் நாட்டைச் சார்ந்த ஒரு உயிர்நுட்பவியலார் கார்ல் பியர்சன் (1867-1936) என்பவர் இருமாறிகளுக்கிடையே உள்ள நேர்க்கோட்டு தொடர்பின் அளவை விவரிக்க கூடிய, "ஒட்டுறவுக் கெழுவை" உருவாக்கினார். $r(X, Y)$ என்று குறிக்கப்படும், இரு சமவா-ப்பு மாறிகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவுக்கெழு

$$r(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{SD}(X)\ \text{SD}(Y)}$$ என்று தரப்படுகின்றது.

இங்கு, $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_i (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$

(X மற்றும் Yக்கான உடன் மாறுபாடு)

$$\text{SD}(X) = \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_i (X_i - \overline{X})^2}$$ (X -ன் திட்ட விலக்கம்)

$$\text{SD}(Y) = \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_i (Y_i - \overline{Y})^2}$$ (Y -ன் திட்ட விலக்கம்)

எனவே, கார்ல்பியர்சனின் ஒட்டுறவுக்கெழுவை காணும் சூத்திரம்:

$$r(X, Y) = \frac{\frac{1}{n}\sum_i (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_i (X_i - \overline{X})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_i (Y_i - \overline{Y})^2}}$$

$$= \frac{\sum_i (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_i (X_i - \overline{X})^2}\sqrt{\sum_i (Y_i - \overline{Y})^2}} = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2}\sqrt{\Sigma y^2}}$$

குறிப்பு

X மற்றும் Y மாறிகளுக்கிடையிலான ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண, கீழ்காணும் சூத்திரங்களையும் பயன்படுத்தலாம் :

(i) $r(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) =$

(ii) $$r(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \frac{N\Sigma dxdy - \Sigma dx\,\Sigma dy}{\sqrt{N\Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2}\sqrt{N\Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2}}$$

இங்கு $dx = x - \mathrm{A}$; $dy = y - \mathrm{B}$ முறையே A மற்றும் B என்ற ஏதேனும் இரு மதிப்புகளிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கங்கள்.

10.2.4 ஒட்டுறவுக் கெழுவின் எல்லைகள்

ஒட்டுறவுக் கெழு -1 லிருந்து $+1$ க்கு இடையே ஓர் மதிப்பை பெற்றிருக்கும். (அ–து) $-1 \le r\,(x, y) \le 1$.

(i) $r(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = +1$ எனில், X மற்றும் Y என்ற இரு மாறிகளுக்கிடையே நேரிடை நிறைவு ஒட்டுறவு உள்ளது என்கிறோம்.

(ii) $r(\mathrm{X}\,, \mathrm{Y}) = -1$ எனில் X மற்றும் Y என்ற இரு மாறிகளுக்கிடையே எதிரிடை நிறைவு ஒட்டுறவு உள்ளது என்கிறோம்.

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{\Sigma \mathrm{X}}{\mathrm{n}} = \frac{544}{8}$$

$$\frac{\mathrm{N}\Sigma\mathrm{XY} - \Sigma\mathrm{X}\,\Sigma\mathrm{Y}}{\sqrt{\mathrm{N}\Sigma\mathrm{X}^2 - (\Sigma\mathrm{X})^2}\sqrt{N\Sigma\mathrm{Y}^2 - (\Sigma\mathrm{Y})^2}}$$

(iii) $r(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$ எனில், X மற்றும் Y என்ற இரு மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு இல்லை என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 6

தந்தையர் (X) மற்றும் அவர்களின் மகன்கள் (Y) ஆகியோரின் உயரத்திற்கான (அங்குலங்களின்) ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

X	**:**	**65**	**66**	**67**	**67**	**68**	**69**	**70**	**72**
Y	**:**	**67**	**68**	**65**	**68**	**72**	**72**	**69**	**71**

தீர்வு :

$$= 68 \quad ; \quad \overline{\mathrm{Y}} = \frac{\Sigma \mathrm{Y}}{\mathrm{n}} = \frac{552}{8} = 69$$

X	Y	$x=X-\overline{X}$	$y=Y-\overline{Y}$	x^2	y^2	xy
65	67	-3	-2	9	4	6
66	68	-2	-1	4	1	2
67	65	-1	-4	1	16	4
67	68	-1	-1	1	1	1
68	72	0	3	0	9	0
69	72	1	3	1	9	3
70	69	2	0	4	0	0
72	71	4	2	16	4	8
544	**552**	**0**	**0**	**36**	**44**	**24**

கார்ல் பியர்சன் ஒட்டுறவுக் கெழு,

$$r(x, y) = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2}\sqrt{\sum y^2}} = \frac{24}{\sqrt{36}\sqrt{44}} = 0.603$$

எனவே X, Y மாறிகள் நேரிடை ஒட்டுறவு கொண்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 7

பின்வரும் விவரங்களுக்கான ஒட்டுறவுக் கெழுவை கணக்கிடுக:

X	**:**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Y	**:**	**9**	**8**	**10**	**12**	**11**	**13**	**14**	**16**	**15**

தீர்வு :

X	Y	X^2	Y^2	XY
1	9	1	81	9
2	8	4	64	16
3	10	9	100	30
4	12	16	144	48
5	11	25	121	55
6	13	36	169	78
7	14	49	196	98
8	16	64	256	128
9	15	81	225	135
45	**108**	**285**	**1356**	**597**

$$r\,(X,Y) = \frac{N\Sigma XY - \Sigma X\,\Sigma Y}{\sqrt{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}\sqrt{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}}$$

$$= \frac{9(597) - (45)\,(108)}{\sqrt{9(285) - (45)^2}\sqrt{9(1356) - (108)^2}} = 0.95$$

$\therefore$ X , Y மிகுதியாக நேரிடை ஒட்டுறவு கொண்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 8

கணவர் (X) மற்றும் மனைவி (Y) ஆகியோரின் வயதிற்கான ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

X :	**23**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**33**	**35**	**36**	**39**
Y :	**18**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**28**	**29**	**30**	**32**

தீர்வு :

A = 30 மற்றும் எனில் B = 26 எனில் $dx = X - A \quad dy = Y - B$

X	Y	d_x	d_y	d^2_x	d^2_y	$d_x d_y$
23	18	-7	-8	49	64	56
27	22	-3	-4	9	16	12
28	23	-2	-3	4	9	6
29	24	-1	-2	1	4	2
30	25	0	-1	0	1	0
31	26	1	0	1	0	0
33	28	3	2	9	4	6
35	29	5	3	25	9	15
36	30	6	4	36	16	24
39	32	9	6	81	36	54
		11	**–3**	**215**	**159**	**175**

$$r\,(x,\,y) = \frac{N\Sigma dxdy - \Sigma dx\,\Sigma dy}{\sqrt{N\Sigma d_x^2 - (\Sigma dx)^2}\sqrt{N\Sigma d_y^2 - (\Sigma dy)^2}}$$

$$=$$

$$= \quad = 0.99$$

$\therefore$ X மற்றும் Y மிகுதியாக நேரிடை ஒட்டுறவு கொண்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 9

பின்வரும் விவரங்களுக்கான ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக:

$N = 25, \qquad \Sigma X = 125, \qquad \Sigma Y = 100$

$\Sigma X^2 = 650 \qquad \Sigma Y^2 = 436, \qquad \Sigma XY = 520$

தீர்வு :

ஒட்டுறவுக்கெழு,

$$r = \frac{N\Sigma XY - \Sigma X\,\Sigma Y}{\sqrt{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}\sqrt{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}}$$

$$= \frac{25(520) - (125)(100)}{\sqrt{25(650)-(125)^2}\sqrt{25(436)-(100)^2}}$$

$$\frac{1783 \quad 10(175)-(11)(-3)}{1750.3 \quad \sqrt{10(215)-(11)^2}\sqrt{10(159)-(-3)^2}} \quad 0.667$$

10.2.5 தொடர்புப் போக்கு (Regression)

சர் பிரான்ஸிஸ் கால்டன் (1822 - 1911) என்ற ஒரு பிரிட்டன் உயிர்நுட்பவியலார், மரபுவழித் தொடர்கிற குணாதிசயங்களை ஆராயும்பொழுது தொடர்புப் போக்கு என்பதை வரையறை செ–தார். தொடர்புப் போக்கு என்பதன் உண்மையான பொருள் யாதெனில் 'சராசரியை நோக்கி பின்செல்தல்' என்பதாகும்.

தொடர்புப் போக்கு என்பது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள சராசரி தொடர்பை அறியும் ஓர் கணக்கியல் அளவு ஆகும்.

தொடர்புப் போக்கு பகுப்பா–வில் சார்புள்ளமாறி மற்றும் சார்பற்ற மாறி எனப்படும் இருவகை மாறிகள் உள்ளன.

10.2.6 *சார்புள்ள மாறி* (Dependent Variable)

கொடுக்கப்பட்ட சார்பற்ற மாறிகளைக் கொண்டு மற்ற ஒரு மாறியின் மதிப்பு கணக்கிடப்பட வேண்டுமெனில் அந்த மாறியை சார்புள்ள மாறி என்று கூறி Y எனக் குறிக்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, விளம்பரச் செலவும் (X) விற்பனை அளவும் (Y) ஒட்டுறவில் உள்ளன எனில் கொடுக்கப்பட்ட விளம்பரச் செலவிற்கு (X) எதிர்பார்க்கப்படும் விற்பனையின் அளவை (Y) கணிக்கலாம். ஆகையால் Y சார்புள்ள மாறியாகும்.

10.2.7 *சார்பற்ற மாறி* (Independent Variable)

ஒரு மாறியின் மதிப்பைக் கணிப்பதற்ககாக பயன்படுத்தப்படும் மாறி **சார்பற்ற மாறி** என்று அழைக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, X மற்றும் Y ஒட்டுறவு கொண்டுள்ளது எனில் கொடுக்கப்பட்ட விற்பனையை (Y) அடைவதற்கு தேவையான செலவை (X) கணிக்க முடியும். இங்கு Y ஒரு சார்பற்ற மாறி ஆகும். தொடர்புப் போக்கில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சார்பற்ற மாறிகள் இருக்கலாம்.

ஒரு மாறியின் குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கு மற்றொரு மாறியின் மதிப்பை மிகச் சிறப்பாக கணித்துத் தரும் நேர்கோட்டை **தொடர்புப் போக்கு நேர்க்கோடு** என்கிறோம்.

இவ்வாறாக, தொடர்புப் போக்கு நேர்கோடு என்பது, **மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடு** (line of best fit) ஆகும். அது மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கை மூலமாக பெறப்படுகின்றது (பாடம் 7 பக்கங்கள் 65 மற்றும் 66).

10.2.8 இரு தொடர்புப் போக்கு கோடுகள்

சார்பற்ற மாறி X மற்றும் சார்புள்ள மாறி Y ஆகியவற்றைக் கொண்ட, (X, Y) என்ற சோடியின் மதிப்புகளுக்கு,

X -ன் மீது X -ன் மீது Y -ன் தொடர்புப் போக்கு கோடு

$$\mathbf{Y} - \overline{\mathrm{Y}} = \boldsymbol{b}_{yx}\,(\mathbf{X} - \quad)$$

இங்கு b_{yx} = X -ன் மீது Y -ன் தொடர்புப் போக்குக் கெழு,

$= r$ (r என்பது X, Y க்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழு)

r, σ_y மற்றும் σ_x ஆகியவற்றை b_{yx} -ல் பதிலீடு செ–தால்,

$$b_{yx} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \qquad (x = X - \quad ;\ y = Y - \quad)$$

இதைப்போலவே, Y சார்பற்ற மாறியாகவும், X சார்புள்ள மாறியாகவும் எடுத்துக்கொண்டால்,

Y -ன் மீது X -ன் தொடர்புப் போக்கு கோடு :

$$(\mathbf{X} - \quad) = \boldsymbol{b_{xy}}\,(\mathbf{Y} - \quad)$$

இங்கு $b_{xy} = r \qquad = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}$

குறிப்பு

ஒரு தொடர்புப் போக்குக் கோட்டை மாற்றி எழுதி மற்றொரு தொடர்பு போக்குக் கோட்டை பெற இயலாது. ஏனெனில் அவை வெவ்வேறு அடிப்படைகளில் பெறப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 10

பின்வரும் விவரங்களுக்கு Y -ன் மீதான X உடன் தொடர்புப் போக்குக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க:

X	**:**	**10**	**12**	**13**	**12**	**16**	**15**
Y	**:**	**40**	**38**	**43**	**45**	**37**	**43**

தீர்வு :

X	Y	x=X−	y=Y−	x^2	y^2	xy
10	40	-3	-1	9	1	3
12	38	-1	-3	1	9	3
13	43	0	2	0	4	0
12	45	-1	4	1	16	-4
16	37	3	-4	9	16	-12
15	43	2	2	4	4	4
78	**246**	**0**	**0**	**24**	**50**	**−6**

$$= \quad = \quad = 13 \qquad \overline{Y} = \quad = \quad = 41$$

$$b_{xy} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} = \frac{-6}{50} = -0.12$$

$\therefore$ Y ன் மீது X இன் தொடர்புப் போக்குக் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$(X - \overline{X}) = b_{xy}\,(Y - \quad)$$

(அ–து) $X - 13 = -0.12\,(Y - 41) \Rightarrow X = 17.92 - 0.12Y$

எடுத்துக்காட்டு 11

பொருளியியல் மற்றும் புள்ளியியலில் 10 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பொருளியியல்
மதிப்பெண்கள் X : 25 28 35 32 31 36 29 38 34 32

புள்ளியியல்
மதிப்பெண்கள் Y : 43 46 49 41 36 32 31 30 33 39

(i) X -ன் மீதான Y -ன் தொடர்புப் போக்குக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்க.

(ii) பொருளியியலில் 30 மதிப்பெண்கள் பெற்றிருந்தால் புள்ளியியலில் பெறும் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

X	Y	x=X−	y=Y−	x^2	y^2	xy
25	43	-7	5	49	25	-35
28	46	-4	8	16	64	-32
35	49	3	11	9	121	33
32	41	0	3	0	9	0
31	36	-1	-2	1	4	2
36	32	4	-6	16	36	-24
29	31	-3	-7	9	49	21
38	30	6	-8	36	64	-48
34	33	2	-5	4	25	-10
32	39	0	1	0	1	0
320	**380**	**0**	**0**	**140**	**398**	**-93**

$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{320}{10} = 32$ $\qquad$ $\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{n} = \frac{380}{10} = 38$

$b_{yx} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{-93}{140} = -0.664$

(i) X -ன் மீதான Y -ன் தொடர்புப் போக்குக் கோட்டுச் சமன்பாடு

$$\mathrm{Y} - \overline{\mathrm{Y}} = b_{yx}(\mathrm{X} - \quad)$$

$$\mathrm{Y} - 38 = -0.664\,(\mathrm{X} - 32)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Y} = 59.25 - 0.664\mathrm{X}$$

(ii) கொடுக்கப்பட்டுள்ள பொருளியியலின் மதிப்பெண்ணிற்கு, புள்ளியியல் மதிப்பெண்கள் காண, X = 30 என்பதை மேலுள்ள சமன்பாட்டில் பதிலீடு செ–ய,

$$Y = 59.25 - 0.664(30) = 39.33 \text{ (அல்லது) } 39$$

எடுத்துக்காட்டு 12

பின்வரும் விவரங்களுக்கான தொடர்புப் போக்கு நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் இரண்டையும் காண்க.

X :	**4**	**5**	**6**	**8**	**11**
Y :	**12**	**10**	**8**	**7**	**5**

தீர்வு :

மேற்கண்ட மதிப்புகள் சிறிய அளவுகளில் இருப்பதால் தொடர்பு போக்குக் கெழுக்களை கணக்கிட பின்வரும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$b_{xy} = \qquad ; \quad b_{yx} = \frac{N\Sigma XY - \Sigma X\,\Sigma Y}{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

X	Y	X^2	Y^2	XY
4	12	16	144	48
5	10	25	100	50
6	8	36	64	48
8	7	64	49	56
11	5	121	25	55
34	**42**	**262**	**382**	**257**

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{34}{5} = 6.8 \qquad\qquad = 8.4$$

$$b_{xy} = \qquad = -0.98$$

$$b_{yx} = \frac{5(257) - (34)(42)}{5(262) - (34)^2} = -0.93$$

Y இன் மீது X இன் தொடர்புப் போக்குக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$(X - \overline{X}) = b_{xy}(Y - \quad)$$

$$\Rightarrow \quad X - 6.8 = -0.98(Y - 8.4)$$

$$X = 15.03 - 0.98Y$$

X இன் மீது Y இன் தொடர்புப் போக்குக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$Y - \quad = b_{yx} (X - \quad)$$

$$Y - 8.4 = -0.93 (X - 6.8)$$

$$\Rightarrow \qquad Y = 14.72 - 0.93X$$

***பயிற்சி* 10.2**

1) பின்வரும் விவரங்களுக்கான ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

X :	12	9	8	10	11	13	7
Y :	14	8	6	9	11	12	3

2) பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

X :	10	12	18	24	23	27
Y :	13	18	12	25	30	10

3) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கண்டுபிடி

X :	46	54	56	56	58	60	62
Y :	36	40	44	54	42	58	54

4) ஒரு பொருளின் விலை (ரூபாயில்) மற்றும் தேவை (டன்னில்)க்கான விவரங்களிலிருந்து, ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

விலை (X) :	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
தேவை (Y) :	60	58	58	50	48	48	48	42	36	32

5) கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.
$N = 11, \quad \Sigma X = 117, \quad \Sigma Y = 260, \quad \Sigma X^2 = 1313$
$\Sigma Y^2 = 6580, \quad \Sigma XY = 2827$

6) கீழ்க் கண்டவற்றிலிருந்து இரு தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள் காண்க.

X :	6	2	10	4	8
Y :	9	11	5	8	7

7) கீழ் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு தொடர்புப் போக்குக் கோட்டின் உதவியுடன் Y = 20 என்கிற பொழுது X ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

X :	10	12	13	17	18
Y :	5	6	7	9	13

8) ஒரு வருடத்தின் 12 மாதங்களுக்கான பருத்தி (X) மற்றும் கம்பளி (Y) ஆகியவற்றிற்கான விலைக் குறியீடுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. குறியீடுகளிடையிலான தொடர்புப் போக்கு கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

X :	78	77	85	88	87	82	81	77	76	83	97	93
Y :	84	82	82	85	89	90	88	92	83	89	98	99

9) கீழ் காணும் விவரங்களுக்கு தொடர்புப் போக்குக் கோடுகள் காண்க.

X :	40	38	35	42	30
Y :	30	35	40	36	29

10.3 காலம்சார் தொடர் வரிசையின் பகுப்பா-வு

தொடர் இடைவெளிக் காலங்கள் அல்லது காலப் புள்ளிகளோடு (time points) தொடர்புடைய புள்ளியியல் விவரங்களை, **காலம்சார் தொடர்வரிசை** (time series) என்போம்.

காலம்சார் தொடர் வரிசையின் சில உதாரணங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் காலாண்டு உற்பத்தி, அரையாண்டு உற்பத்தி மற்றும் ஆண்டு உற்பத்தி.

(ii) 10 வருடங்களில் பொழிந்த மழையின் அளவுகள்

(iii) பலவேறு நேரங்களில் காணப்படுகின்ற ஒரு பொருளின் விலை.

காலம்சார் தொடர் வரிசை, பொதுவாக பொருளியியல் விவரங்களை மட்டும் குறிப்பதாக பெரிதும் நம்பப்படுகிறது. ஆனால் காலம்சார் தொடர் வரிசை, ஏனைய இயற்கையாகவும் மற்றும் சமூக அறிவியலில் எழும் விவரங்களுக்கும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இங்கு காலம்சார் தொடர்கள் மிக முக்கிய பங்கு வகிப்பதோடு மட்டுமல்லாமல், அதன் பகுப்பா–விற்கு சிறப்பான உத்திகள் தேவைப்படுகிறது. காலம்சார் தொடர் பகுப்பா–வின் மூலம், கடந்த காலத்தை பகுப்பா–வு செ–து வருங்காலத்தைப் பற்றி சிறப்பாக புரிந்து கொள்ளமுடிகிறது.

10.3.1 காலம்சார் தொடர் வரிசை பகுப்பா-வின் பயன்கள்

(i) கடந்த கால நிலையைப் பற்றி அறியவும், நிகழ்கால சாதனைகளை மதிப்பீடு செ–யவும், மற்றும் வருங்காலத்திற்கான திட்டங்களை வகுக்கவும் காலம்சார் தொடர் வரிசை பயன்படுகிறது.

(ii) நம்பத்தகுந்த முன்கணிப்புகளை (forcasts) அளிக்கின்றது.

(iii) ஒப்புமை செ–வதற்கான வசதியை அளிக்கின்றது.

எனவே, பொருளியியல், வணிகம், ஆரா–ச்சி மற்றும் திட்டமிடல் ஆகியவற்றில் தரப்பட்ட காலம் கார்ந்த விவரங்களை, சரியான நோக்கில் ஆராய, காலம்சார் தொடர் வரிசை பகுப்பா–வு பயன்படுகின்றது.

10.3.2 காலம்சார் தொடர்வரிசையின் கூறுகள் (Components of time series)

காலம்சார் தொடர் வரிசை விவரங்களைக் குறிக்கும் ஒரு வரைபடம், காலப்போக்கில் ஏற்படுகின்ற மாற்றங்களை (மாறுபாடுகளை) காட்டுகிறது. இம்மாற்றங்கள், காலம்சார் தொடர் வரிசையின் முதன்மைக் கூறுகள் என வழங்கப்படுகிறது. அவைகளாவன,

(i) நீள் காலப் போக்கு (Secular trend)

(ii) பருவகால மாறுபாடுகள் (Seasonal variation)

(iii) சுழல் மாறுபாடுகள் (Cyclical variation)

(iv) ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள் (Irregular variation)

நீள் காலப் போக்கு

போதுனமான நீண்ட காலத்தில் விவரங்களின் மாற்றங்களைக் கருத்தில் கொள்ளும்பொழுது, அவைகள் சுமூகமாகவும் ஒழுங்கு முறையாகவும் இருப்பதையே நீள்காலப் போக்கு உணர்த்துகின்றது. மாற்றங்களின் போக்கு ஏற்றமாகவோ அல்லது இறங்குமுகமாகவோ இருக்கும். காலப்போக்கில் விவரங்களில் ஏற்படும் மாற்றங்கள் கூடிக் கொண்டோ அல்லது குறைந்து கொண்டோ இருக்கும். உதாரணமாக, மக்கள் தொகை, விலைவாசி, உற்பத்தி, கல்வியறிவு ஆகியவற்றோடு தொடர்புடைய காலம்சார் தொடர் வரிசை அதிகரிக்கக்கூடிய போக்கையும், பிறப்பு விகிதம், இறப்பு விகிதம், வறுமை ஆகியவற்றோடு தொடர்புடைய காலம்சார் தொடர்வரிசை குறையக்கூடிய போக்கையும் கொண்டிருக்கும்.

பருவகால மாறுபாடு

இது ஒரு குறுகிய கால மாறுபாடு ஆகும். ஓராண்டிற்கு குறைவாக கால அளவு உள்ளபொழுது காலம்சார் தொடர் வரிசையில்

உள்ள காலவட்ட அசைவுகளை (periodic movement), பருவகால மாறுபாடு குறிக்கின்றது. பருவகால மாறுபாடுகளுக்கான உதாரணங்கள் பின்வருமாறு:

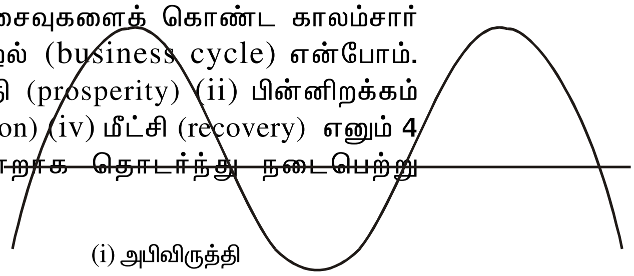
(i) ஒரு நாளின் 24 மணிநேரத்தில் ஏற்படுகின்ற பயணிகளின் போக்குவரத்து

(ii) ஒரு வாரத்தின் 7 நாட்களில், பல்பொருள் அங்காடியில் நடைபெறுகின்ற விற்பனை.

வேறுபட்ட பருவங்களில் ஏற்படும் தட்பவெட்ப மாறுதல்கள் மற்றும் மக்களின் பழக்க வழக்கங்கள் ஆகியவற்றால், பருவ கால மாறுபாடுகள் நிகழ்கின்றன. கோடையில் அதிகஅளவில் ஐஸ்கிரீம் விற்பனையாவதும் மழைக்காலத்தில் அதிக எண்ணிக்கையில் குடைகள் விற்கப்படுவதும் பருவகால மாறுபாடுகளுக்கு உதாரணமாகக் கொள்ளலாம்.

சுழல் மாறுபாடு

இதுவும் ஒரு குறுகிய கால மாறுபாடாகும். அளவு காலம் ஓராண்டிற்கு அதிகமாக உள்ளபொழுது, காலம்சார் தொடர் வரிசையிலுள்ள ஊசல் தன்மை கொண்ட அசைவினைக் குறிப்பதே சுழற்சி மாறுபாடாகும். ஒரு முழுமையானக் கால அளவே சுழல் (cycle) எனப்படும். அலை போன்று அசைவுகளைக் கொண்ட காலம்சார் தொடர் வரிசையை வணிகச் சுழல் (business cycle) என்போம். வணிகச் சுழலில் (i) அபிவிருத்தி (prosperity) (ii) பின்னிறக்கம் (recession) (iii) வீழ்ச்சி (depression) (iv) மீட்சி (recovery) எனும் 4 கட்டங்களும் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக தொடர்ந்து நடைபெற்று வருகின்றன.



(படம் 10.7)

சீரற்ற மாறுபாடு

இவ்வித மாறுபாடுகள் எவ்வித ஒழுங்கையும் பின்பற்றுவதில்லை. இவ்வகை மாறுபாடுகள் முழுவதும் கணக்கிட முடியாத அல்லது எதிர்பாராத நிகழ்வுகளான போர், வெள்ளப் பெருக்கு, தீ, வேலை நிறுத்தம் ஆகியவற்றால் ஏற்படுகின்றது. சீரற்ற மாறுபாடு (erratic variation) ஆனது எதிர்பாரா மாறுபாடு என்றும் அழைக்கப்படுகின்றது.

10.3.3 வடிவமைப்பு (Models)

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு காலம்சார் தொடர்வரிசையில் அதன் கூறுகளான நீள் காலப்போக்கு, பருவகால மாறுபாடு, சுழற்சி மாறுபாடு மற்றும் சீரற்ற மாறுபாடு ஆகிய அனைத்து கூறுகளும் அல்லது இவற்றுள் ஏதேனும் சில கூறுகளும் இருக்கும். காலம்சார் தொடர் வரிசையில் காணப்படுகின்றன வேறுப்பட்ட கூறுகளை பிரிப்பது முக்கியமானது. ஏனெனில், நம்முடைய ஆர்வம் ஒரு குறிப்பிட்ட கூறின் மீதோ அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட கூறின் விளைவை நீக்கியபின் அத்தொடரை பற்றி அறியவோ இருக்கலாம். பல வடிவமைப்புகள் உருப் பெற்றிருந்தாலும், இங்கு இரு மாதிரிகளை மட்டும் கருத்தில் கொள்வோம்.

பெருக்கல் வடிவமைப்பு (Multiplicative Model)

காலம்சார் தொடர் வரிசையின் நான்கு கூறுகளுக்குமிடையே ஒரு பெருக்குத் தொடர்பு அமையும் வடிவமைப்பை பெருக்கல் வடிவமைப்பு என்கிறோம்.

எனவே $y_t = T_t \times S_t \times C_t \times I_t$ ஆகும்.

இங்கு y_t ஆனது t நேரத்தில் கண்டறியப்பட்ட விவரத்தின் மதிப்பு அல்லது மாறியின் மதிப்பு. T_t ஆனது நீள்காலப்போக்கு, S_t என்பது பருவகால மாறுபாடு, C_t என்பது சுழற்சி மாறுபாடு மற்றும் I_t என்பது சீரற்ற மாறுபாடாகும்.

கூட்டு வடிவமைப்பு (Additive Model)

கூட்டு வடிவமைப்பின்படி y_t ஆனது நான்கு கூறுகளின் கூட்டற்பலனாக அமையும்

(அ-து) $y_t = T_t + S_t + C_t + I_t$,

10.3.4 நீள்காலப் போக்கினை அளவிடுதல் (Measurement secular trend)

நீள்காலம் போக்கை மதிப்பீடு செ–வதற்கு கீழ்கண்ட நான்கு முறைகள் உள்ளன.

(i) வரைபட முறை அல்லது

(ii) பகுதி சராசரி முறை (Method of Semi - Averages)

(iii) நகரும் சராசரி முறை (Method of Moving Averages)

(iv) மீச்சிறு வர்க்க முறை (Method of least squares.)

(i) வரைபட முறை

காலம்சார் தொடர் வரிசையின் விவரங்களின் போக்கினை வரைபட முறையின் மூலம் எளிதாக அறியலாம். நேரம் அல்லது காலத்தைக் குறிக்க x - அச்சையும் கண்டறிந்த விவரங்களைக் குறிக்க y-அச்சையும் கருதுவோம். காலம் மற்றும் அப்பொழுது கண்டறிந்த விவரம் ஆகியனவற்றைக் கொண்டு ஒருபுள்ளியை வரைபடத்தில் குறிக்கலாம். இவ்வாறு பெறப்பட்ட அனைத்து புள்ளிகளுக்கும் மிகப் பொருத்தமான நோர்க்கோடு ஒன்றினை வரையலாம்.

தோராயமாக ஒரு திசையில் காணப்படுகின்ற ஏற்ற இறக்கங்கள் (fluctuations) மற்றோரு திசையில் காணப்படுகின்ற ஏற்ற இறக்கங்களுக்கு சமமாக இருக்கும்படி நேர்கோட்டை குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளுக்கு இடையே செல்லுமாறு வரைய வேண்டும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

வரைபட முறை மூலமாக போக்குக் கோட்டை பொருத்தும் பொழுது கீழ் வருவனவற்றைக் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

(i) முடிந்த வரையில் கோட்டிற்கு மேல் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை, கோட்டிற்கு கீழ் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கைக்கு சமமாக இருக்க வேண்டும்.

(ii) ஆண்டு விவரங்களின் போக்கிலிருந்து பெறப்பட்ட செங்குத்து விலக்கங்களின் மொத்தம் போக்கிற்கு மேலேயும், கீழேயும் சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.

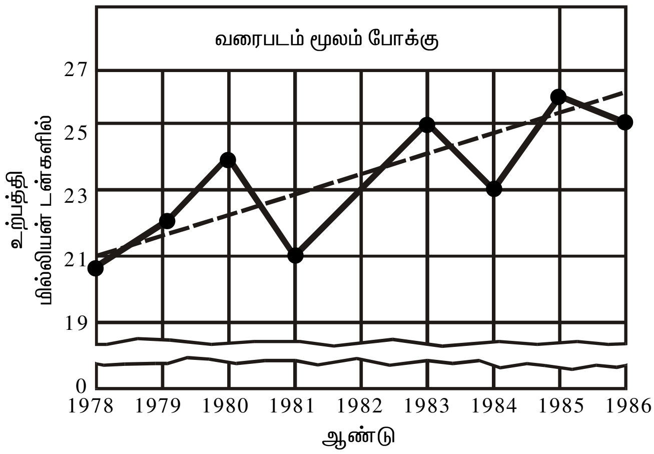
(iii) விவரங்களின் போக்கிலிருந்து பெறப்பட்ட செங்குத்து விலக்கங்களுடைய வர்க்கங்களின் கூடுதல் இயன்றவரை சிறியதாக இருத்தல் வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 13

கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு வரைபட முறையில் போக்குகோடு பொருத்துக.

ஆண்டு	1978	1979	1980	1981	1982
ஸ்டீல் உற்பத்தி	20	22	24	21	23
ஆண்டு	1983	1984	1985	1986	
ஸ்டீல் உற்பத்தி	25	23	26	25	

தீர்வு :



(படம் 10.8)

குறிப்பு

(i) வரைபடம் மூலம் வரையக் கூடிய போக்குக் கோட்டினை நீட்டி எதிர்கால மதிப்புகளை கணக்க இயலும். எனினும் வரைபட முறையின் மூலம் பொருத்தப்படும் கோடு வரைபவரின் அணுகு முறைக்கு ஏற்ப மாறுபடும் தன்மை உடையதால், பொதுவாக இதனை எதிர்கால கணிப்பிற்கு பயன்படுத்தப்படுவதில்லை.

(ii) மேலுள்ள வரைபடத்தில் **உண்மையற்ற அடிப்படை கோடு** (false base line) பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

(a) விவரங்களில் உள்ள மாறுபாடுகளை துல்லியமாக காண்பிக்கவும்,

(b) வரைபடத்தின் பெரும்பகுதி வீணாகாமல் இருக்கவும்,

(c) படத்தின் மூலம் தெளிவாக தகவல்களை அறியவும்

பொதுவாக மேற்கண்ட நோக்கங்களுக்காக உண்மையற்ற அடிப்படை கோடு பயன்படுத்தப்படுகிறது :

(ii) *பகுதிச் சராசரி முறை*

இம்முறை எளிய கணக்கீடுகளை கொண்டதாகவும், எளிதில் ஏற்றுக் கொள்ளக் கூடிய வகையிலும் உள்ளது. இம்முறை பயன்படுத்தப்படும் பொழுது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களை சமமாக இரு பகுதிகளாக பிரித்துக் கொள்ள வேண்டும். உதாரணமாக 1980 ஆம் ஆண்டிலிருந்து 1999 வரையிலான, அதாவது 20 வருடங்களுக்கான விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், 1980 லிருந்து 1989 வரையுள்ள முதல் 10 ஆண்டுகள், 1990 லிருந்து 1999 வரையுள்ள அடுத்த 10 ஆண்டுகள் ஆகியவை இரு சம பகுதிகளாகும். 7, 11, 13 ஆகிய ஒற்றைப்படை எண்ணிக்கையில் ஆண்டுகள் கொடுக்கப்பட்டால், மத்தியில் வரும் ஆண்டை நீக்கிவிட்டு இரு பகுதிகளாக அமைத்துக் கொள்ளலாம். உதாரணமாக 1980 லிருந்து 1986 வரையிலான 7 ஆண்டுகளின் விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், 1980 லிருந்து 1982 வரை மற்றும் 1984 லிருந்து 1986 வரை இரண்டு சமபகுதிகளாக அமையும். மத்திய ஆண்டு 1983 நீக்கப்பட்டுவிடும்.

விவரங்களை இரு பகுதிகளாகப் பிரித்தப்பிறகு, ஒவ்வொரு பகுதிக்கான கூட்டு சராசரியை கணக்கிட வேண்டும். இவ்வாறு பெறப்படும் பகுதிச் சராசரிகளிலிருந்து, போக்கில் ஏற்படும் ஏற்ற, இறக்கங்களைக் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 14

பகுதிச் சராசரி முறை மூலம் கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு போக்கு மதிப்புகளை கண்டு பிடிக்கவும்.

ஆண்டு	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
விற்பனை	102	105	114	110	108	116	112

தீர்வு :

ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படை (7) என்பதால் மத்திய ஆண்டு 1983 ன் விவரத்தை கருத்தில் கொள்ளாமல், நாம் பெறுவது,

ஆண்டு	விற்பனை	பகுதி மொத்தம்	பகுதி சராசரி
1980	102		
1981	105	321	107
1982	114		
1983	**110**		
1984	108		
1985	116	336	112
1986	112		

மத்திய காலஅளவுகளில் உள்ள வித்தியாசம் $= 1985 - 1981 = 4$

பகுதி சராசரிகளின் வித்தியாசம் $= 112 - 107 = 5$

போக்கில் ஆண்டுதோறும் ஏற்படும் அதிகரிப்பு $= \dfrac{5}{4} = 1.25$

ஆண்டு	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
போக்கு	105.75	107	108.25	109.50	110.75	112	113.25

எடுத்துக்காட்டு 15

1994 ஆண்டிலிருந்து 2001 ஆண்டு வரையிலான ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் விற்பனை (டன்னில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன

ஆண்டு	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**
விற்பனை	**270**	**240**	**230**	**230**
ஆண்டு	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**
விற்பனை	**220**	**200**	**210**	**200**

பகுதிச் சராசரி முறை மூலம் போக்கு மதிப்புகளை கணக்கிடுக. 2005 ஆம் ஆண்டிற்கான விற்பனை அளவை மதிப்பிடுக.

தீர்வு :

ஆண்டு	விற்பனை		பகுதி மொத்தம்		பகுதிச் சராசரி
1994	270				
1995	240	⟶	970	⟶	242.5
1996	230				
1997	230				
1998	220				
1999	200	⟶	830	⟶	207.5
2000	210				
2001	200				

மத்திய காலஅளவுகளில் உள்ள வித்தியாசம் = 1999.5 - 1995.5 = 4

பகுதி சராசரிகளின் வித்தியாசம் = 242.5 - 207.5 = 35

போக்கின் ஆண்டுதோறும் ஏற்படும் குறைவு $= \frac{35}{4} = 8.75$

போக்கின் அரையாண்டுதோறும் ஏற்படும் குறைவு = 4.375

ஆண்டு	1994	1995	1996	1997
விற்பனை போக்கு	255.625	246.875	238.125	229.375
ஆண்டு	1998	1999	2000	2001
விற்பனை போக்கு	220.625	211.875	203.125	194.375

2005 ஆம் ஆண்டிற்கான போக்கின் மதிப்பு = 194.375 – (8.75 x 4)

= 159.375

(iii) *நகரும் சராசரிகள் முறை*

இம்முறை, போக்கினை அளவிட ஓர் எளிய மற்றும் இயற்கணித முறையாகும். நகரும் சராசரி முறையானது ஏற்ற இறக்கங்களை நீக்கவும் மற்றும் போக்கு மதிப்புகளை துல்லியமாக கூறவும் பயன்படுகின்ற ஒரு எளிய முறையாகும். நகரும் சராசரி முறையில் கையாளப்படுகின்ற உத்திகள் (techniques) சில மாறுதல்களுடன் கூடிய கூட்டுச் சராசரி முறையின் அடிப்படையில் அமைந்துள்ளது. கூட்டுச் சராசரி முறையில், நாம் அனைத்து உறுப்புகளையும் கூட்டி, வரும் மதிப்பை மொத்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுக்குகிறோம். ஆனால் நகரும் சராசரி முறையில், எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட

ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்து, பல்வேறு சராசரிகள் ஒரு தொடரில் அமைகின்றன. இம்முறையை பயன்படுத்தும் பொழுது, 3 ஆண்டுகளுக்கான நகரும் சராசரி, 4 ஆண்டுகளுக்கான நகரும் சராசரி என்பதைப் போன்று நகரும் சராசரிக்கான **கால அளவை** (period) வரையறுக்கப்பட வேண்டும்.

ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படையிலிருப்பின் நகரும் சராசரிகள் காணல் (3 ஆண்டுகள் என்க).

3 ஆண்டு நகரும் சராசரி முறையில் போக்கு மதிப்புகளைக் காண கீழ் கண்ட வழி முறைகளை பின்பற்ற வேண்டும்.

1) முதல் மூன்று ஆண்டுகளின் விவரங்களைக் கூட்டி வரும் தொகையை, அம்மூன்று ஆண்டுகளின் இடையில் காணும் ஆண்டிற்கு அதாவது 2 ம் ஆண்டிற்கு எதிரே எழுத வேண்டும்.
2) முதல் ஆண்டு மதிப்பை தவிர்த்து அடுத்த மூன்று ஆண்டுகளுக்கான மதிப்பை அதாவது 2 வது ஆண்டிலிருந்து 4 வது ஆண்டு வரையுள்ள மதிப்பை கூட்டி (நகரும் மொத்தம்) வரும் தொகையை 3வது ஆண்டிற்கு எதிரே எழுதவேண்டும்.
3) முதல் இரண்டு ஆண்டுகளுக்கான மதிப்பை தவிர்த்து அடுத்த மூன்று ஆண்டுகளுக்கான அதாவது 3வது ஆண்டிலிருந்து 5வது ஆண்டு வரையுள்ள மதிப்பை கூட்டி வரும் தொகையை 4வது ஆண்டிற்கு எதிரே எழுத வேண்டும்.
4) நகரும் சராசரியை கணக்கிட கடைசி விவரத்தை எடுத்துக் கொள்ளும் வரை, இம் முறையை தொடர்ந்து செ–துவரவேண்டும்.
5) ஒவ்வொரு 3 ஆண்டு நகரும் மொத்தத்தையும் 3 ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கப்பெறுவது நகரும் சராசரிகளாகும். இவைகள் தான் நமக்குத் தேவையான போக்கு மதிப்புகளாகும்

குறிப்பு

5 ஆண்டுகள், 7 ஆண்டுகள் மற்றும் ஆண்டுகளுக்குரிய நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிட மேலேக் குறிப்பிட்ட 5 வழிகளையும் பின்பற்றலாம்.

ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை இரட்டைப்படையிலிருப்பின் நகரும் சராசரிகள் காணல் (4 ஆண்டுகள் என்க).

1) முதல் நான்கு ஆண்டுகளுக்கான மதிப்பை கூட்டி வரும் தொகையை 2 மற்றும் 3 ஆம் ஆண்டின் மையத்திற்கு (நடுவே) எதிராக எழுத வேண்டும்.

2) முதல் ஆண்டின் மதிப்பை தவிர்த்து 2 ஆம் ஆண்டிலிருந்து 5 ஆம் ஆண்டு வரையிலான மதிப்புகளை கூட்டி பெறும் தொகையை (நகரும் மொத்தம்) 3 மற்றும் 4 ஆம் ஆண்டு மதிப்புகளின் மையதிதிற்கு எதிராக எழுதவேண்டும்.

3) முதல் இரண்டு ஆண்டிற்கான மதிப்புகளை தவிர்த்து அடுத்த 4 ஆண்டுகளில் அதாவது 3 ஆம் ஆண்டிலிருந்து 6 ஆம் ஆண்டு வரையிலான மதிப்புகளை கூட்ட வேண்டும். பின்பு அக்கூடுதல் தொகையை 4 மற்றும் 5 ஆம் ஆண்டு மதிப்புகளின் மையத்திற்கு எதிராக எழுத வேண்டும்.

4) இம்முறையை இறுதி விவரத்தை கணக்கில் எடுத்துக் கொள்ளும் வரை தொடர்ந்து செ—து வரவேண்டும்.

5) முதல் இரண்டு 4 ஆண்டுகளுக்கான நகரும் மொத்தத்தை (Moving total) கூட்டி வரும் தொகையை 3 வது ஆண்டிற்கு எதிராக எழுத வேண்டும்.

6) முதல் 4 ஆண்டுகளுக்கான நகரும் கூடுதலை தவிர்த்து அடுத்த இரு 4 ஆண்டுகளுக்கான நகரும் மொத்தங்களைக் கூட்ட வேண்டும். இக்கூடுதல் தொகையை 4வது ஆண்டிற்கு எதிராக எழுதவேண்டும்.

7) அனைத்து நகரும் மொத்தங்களை கூட்டி மையப்படுத்தும் (centered) வரையிலும் இம்முறையை தொடர்ந்து செ—ய வேண்டும்.

8) இவ்வாறு மையப்படுத்தப்பட்ட 4 வருடங்களுக்கான நகரும் கூடுதலை 8 ஆல் வகுத்து கிடைக்கப்பெறும் ஈவுத்தொகையை புதிய நிறையில் எழுத வேண்டும். இவைகளே நமக்குத் தேவையான போக்கு மதிப்புகளாகும்.

குறிப்பு

6—வருடங்கள், 8 – வருடங்கள் 10 – வருடங்கள் ஆகியவற்றிற்கான நகரும் சராசரியைக் காண மேற்கண்ட வழி முறைகள் பின்பற்றப்பட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 16

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள உற்பத்தி அளவுகளுக்கு (மெட்ரிக் டன்களில்) 3 ஆண்டு காலத்தைக் கொண்டு நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிடுக.

ஆண்டு	**1973**	**1974**	**1975**	**1976**	**1977**	**1978**	**1979**	**1980**
உற்பத்தி	**15**	**21**	**30**	**36**	**42**	**46**	**50**	**56**
ஆண்டு	**1981**	**1982**	**1983**	**1984**	**1985**	**1986**	**1987**	
உற்பத்தி	**63**	**70**	**74**	**82**	**90**	**05**	**102**	

தீர்வு :

3 ஆண்டு காலத்திற்கான நகரும் சராசரிகள்

ஆண்டு	உற்பத்தி y	3-ஆண்டு நகரும் மொத்தம்	3-ஆண்டு நகரும் சராசரி
1973	15	---	---
1974	21	66	22.00
1975	30	87	29.00
1976	36	108	36.00
1977	42	124	41.33
1978	46	138	46.00
1979	50	152	50.67
1980	56	169	56.33
1981	63	189	63.00
1982	70	207	69.00
1983	74	226	75.33
1984	82	246	82.00
1985	90	267	89.00
1986	95	287	95.67
1987	102	---	---

எடுத்துக்காட்டு 17

4 ஆண்டு காலத்தை கொண்ட நகரும் சராசரி முறையை பயன்படுத்தி கீழ் கண்ட விவரங்களுக்கான போக்கு மதிப்புக்களை காண்க.

ஆண்டு	**1974**	**1975**	**1976**	**1977**	**1978**	**1979**	**1980**
மதிப்பு	**12**	**25**	**39**	**54**	**70**	**37**	**105**
ஆண்டு	**1981**	**1982**	**1983**	**1984**	**1985**	**1986**	**1987**
மதிப்பு	**100**	**82**	**65**	**49**	**34**	**20**	**7**

தீர்வு :

ஆண்டு	மதிப்பு	4 ஆண்டு நகரும் மொத்தம்	4 ஆண்டு நகரும் மொத்தம் (மையமாக்கப்பட்ட மதிப்பு)	இரு 4ஆண்டு நகரும் சராசரி (போக்கு மதிப்பு)
1974	12	---	---	---
1975	25	→ 130	---	---
1976	39	→ 188	318	39.75
1977	54	→ 200	388	48.50
1978	70	→ 266	466	58.25
1979	37	→ 312	578	72.25
1980	105	→ 324	636	79.50
1981	100	→ 352	676	84.50
1982	82	→ 296	648	81.00
1983	65	→ 230	526	65.75
1984	49	→ 168	398	49.75
1985	34	→ 110	278	34.75
1986	20		---	---
1987	7		---	---

(iv) *மீச்சிறு வர்க்க முறை*

மீச்சிறு வர்க்க முறையானது நடைமுறையில் வெகுவாக பயன்படுத்தக் கூடியதாகும். மீச்சிறு வர்க்க முறையைப் பயன்படுத்தி நேர்க்கோட்டினைப் பொருத்தலாம்.

நேர்கோட்டு போக்கு பொதுவாக

$y_t = a + bx$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் கொடுக்கப்படுகின்றது. இங்கு, y_t என்பது போக்கு மதிப்புகளை குறிக்கிறது. a என்பது வெட்டுத்துண்டு மற்றும் b என்பது நேர்கோட்டின் சா—வாகும். மேலும்

ஓரலகு நேரத்தில் வளர்ச்சி விகிதத்தை b குறிக்கின்றது. மாறி x என்பது கால அளவினை குறிக்கின்றது.

a மற்றும் b மாறிலிகளை கணக்கிடுவதற்கு கீழ்கண்ட இயல் நிலைச் சமன்பாடுகள் (normal equations) பயன்படுகின்றன.

$$\Sigma y = na + b\Sigma x$$
$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2,$$

இதில் n என்பது கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் எண்ணிக்கையை (ஆண்டுகள், மாதங்கள் மற்றும் வேறு ஏதாவது காலம்) குறிக்கிறது. இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளை வருவித்தல் 7 வது பாடத்தில் **65** மற்றும் **66**ம் பக்கங்களில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இயல் நிலைச் சமன்பாடுகளை தீர்த்து போக்கு மதிப்புகளை பெறுவதற்கு கீழ்கண்ட வழிமுறைகளை பின்பற்றவேண்டும்.

வகை (i)

ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படை எனில்

1) ஆண்டுகள் x என்கிற மாறியை கொண்டும் அதனோடு தொடர்புள்ள மதிப்புகளை y என்கிற மாறியைக் கொண்டும் குறித்துக் கொள்ளவும். $\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}$

2) மைய ஆண்டை ஆதியாக கொண்டு அவற்றிலிருந்து விலக்கங்களை பெற வேண்டும். எனவே $\Sigma X = 0$.

3) ΣX^2, ΣY மற்றும் ΣXY ஆகியவற்றை கண்டு பிடிக்கவும்.

4) ΣX, ΣX^2, ΣY மற்றும் ΣXY ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை மேற்கண்ட இயல் சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு அவைகளை தீர்க்க வேண்டும்.

   எனவே, $a = \frac{\Sigma Y}{n}$ $b =$

5) a மற்றும் b ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை சமன்பாட்டில் பிரதியிட வேண்டும். பின்பு அச்சமன்பாட்டை x –ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் தீர்வு செ–தால் போக்கு மதிப்புகளை பெறலாம்.

வகை (ii)

ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படை எனில் இங்கு

X =

என எடுத்துக் கொண்டு, ஏனைய வழிமுறைகளை முதல் வகையில் உள்ளது போல் பின்பற்ற வேண்டும்

எடுத்துக்காட்டு 18

ஒரு சர்க்கரை ஆலையின் உற்பத்தி விவரங்கள் (ஆயிரம் டன்களில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

ஆண்டு	**1980**	**1981**	**1982**	**1983**	**1984**	**1985**	**1986**
உற்பத்தி	**80**	**90**	**92**	**83**	**94**	**99**	**92**

இவ்விவரங்களுக்கு பொருத்தமான நேர்க்கோட்டு போக்கை மீச்சிறு வர்க்க முறையில் பொருத்தி 1990 ஆண்டிற்கான உற்பத்தியை மதிப்பீடு செ-க.

தீர்வு :

ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை $n = 7$ (ஒற்றைப்படை எண்)

ஆண்டு x	உற்பத்தி ('000 டன்களில்) $y = \mathrm{Y}$	$\mathrm{X} = x - 1983$	X^2	XY
1980	80	-3	9	-240
1981	90	-2	4	-180
1982	92	-1	1	-92
1983	83	0	0	0
1984	94	1	1	94
1985	99	2	4	198
1986	92	3	9	276
	630	**0**	**28**	**56**

$Y_t = a + bX$ நேர்க்கோடு போக்கின் சமன்பாடு.

ΣX, ΣX^2, ΣXY ஆகியவற்றை இயல்நிலைச் சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$$630 = 7a + b(0) \qquad \Rightarrow a = 90$$
$$56 = a(0) + b(28) \qquad \Rightarrow b = 2$$

எனவே, நேர்க்கோட்டு போக்கின் சமன்பாடானது,

$$Y_t = 90 + 2X$$

போக்கு மதிப்புகள்

$$X = -3 \quad \Rightarrow \quad Y_t = 90 + 2(-3) = 84$$
$$X = -2 \quad \Rightarrow \quad Y_t = 90 + 2(-2) = 86$$
$$X = -2 \quad \Rightarrow \quad Y_t = 90 + 2(-1) = 88$$
$$X = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_t = 90 + 2(0) = 90$$
$$X = 1 \quad \Rightarrow \quad Y_t = 90 + 2(1) = 92$$
$$X = 2 \quad \Rightarrow \quad Y_t = 90 + 2(2) = 94$$
$$X = 3 \quad \Rightarrow \quad Y_t = 90 + 2(3) = 96$$

1990 ஆம் ஆண்டிற்கான உற்பத்தியை மதிப்பிட $X = 7$ ஐ போக்கு சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$\therefore Y_{1990} = 90 + 2(7) = 104000$ டன்கள்

எடுத்துக்காட்டு 19

கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்க முறையில் நேர்க்கோட்டு போக்கினை பொருத்துக. 1988 ஆம் ஆண்டிற்கான வருவாயைக் கணிக்கவும்.

ஆண்டு	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
வருவா-	38	40	65	72	69	60	87	95

தீர்வு :

ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை $n = 8$ (இரட்டைப்படை)

ஆண்டு x	வருவாய் (இலட்சங்களில்) $y = Y$	$X = \frac{x-1982.5}{.5}$	X^2	XY
1979	38	-7	49	-266
1980	40	-5	25	-200
1981	65	-3	9	-195
1982	72	-1	1	-72
1983	69	1	1	69
1984	60	3	9	180
1985	87	5	25	435
1986	95	7	49	665
	526	**0**	**168**	**616**

போக்கு கோட்டின் சமன்பாடு $Y_t = a + bX$

ΣX, ΣX^2, ΣXY, n இம் மதிப்புகள் இயல்நிலைச் சமன்பாட்டில் பிரதியிட நமக்கு கிடைப்பது

$526 = 8a + b(0)$ -----------(1)

$616 = a(0) + b(168)$ -----------(2)

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றை தீர்க்க $a = 65.75$ and $b = 3.667$

எனவே நேர்க்கோட்டு போக்கின் சமன்பாடு

$$Y_7 = 65.75 + 3.667X$$

ஆண்டு	1979	1980	1981	1982
போக்கு மதிப்பு	40.08	47.415	54.749	62.083
ஆண்டு	1983	1984	1985	1986
போக்கு மதிப்பு	69.417	76.751	84.085	91.419

1988 ஆம் ஆண்டின் வருவாயை மதிப்பீடு செய்ய, $X = 11$ ஐ பிரதியிட

$$Y_t = 65.75 + 3.667(11) = 106.087$$

எனவே 1988 ஆம் வருடத்தின் வருவாய் மதிப்பு ரூ.106.087 இலட்சம் ஆகும்.

பருவகால மாறுபாட்டினை அளவிடுதல் (Measurement of seasonal variation)

பருவகால மாறுபாட்டினை சாதாரண சராசரி (simple average) முறையைக் கொண்டு அளவிடலாம்.

சாதாரண சராசரி முறை

இம்முறை, பருவகால குறியீடுகள் பெறுவதற்கான ஒரு எளிய முறையாகும். இம்முறையில் கீழ்கண்ட வழிமுறைகளை பின்பற்றி பருவகால குறியீட்டெண்ணை கண்டுபிக்கலாம்.

(i) கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை ஆண்டுகள், மாதங்கள் அல்லது காலாண்டுகள் ஆகிய ஏதாவது ஒன்றின் அமைத்துக் கொள்ளவும்.

(ii) ஒவ்வொரு மாதத்திற்கான அல்லது காலாண்டிற்கான கூடுதலைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(iii) ஒவ்வொரு கூடுதலையும், விவரங்கள் கொடுக்கப் பட்டிருக்கும் ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கையில் வகுத்தால் பருவகால (மாதங்கள் அல்லது காலாண்டுகள்) சராசரிகளைப் பெறலாம்.

(iv) பருவகால சராசரிகளின் சராசரியை கணக்கிட வேண்டும். இது மொத்த சராசரி (grand average) எனப்படும்.

(v) ஒவ்வொரு பருவத்திற்கான (மாதங்கள் அல்லது காலாண்டுகள்) பருவகால குறியீடுகள் கீழ்கண்டவாறு கணக்கிடப்படுகிறது.

$$\text{பருவகால குறியீடு (S.I)} = \frac{\text{பருவகால சராசரி}}{\text{மொத் த சராசரி}} \times 100$$

குறிப்பு

(i) விவரங்கள் மாதந்தோறும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

$$\text{பருவகால குறியீடு} = \frac{\text{மாதாந்திர சராசரி}}{\text{மொத் த சராசரி}} \times 100$$

(ii) விவரங்கள் காலாண்டுதோறும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

$$\text{பருவகால குறியீடு} = \frac{\text{காலாண் டு சராசரி}}{\text{மொத் த சராசரி}} \times 100$$

எடுத்துக்காட்டு 20

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து பருவகால குறியீடுகளைக் காண்க.

	வருடம்				
காலண்டு	**1984**	**1985**	**1986**	**1987**	**1988**
I	**40**	**42**	**41**	**45**	**44**
II	**35**	**37**	**35**	**36**	**38**
III	**38**	**39**	**38**	**36**	**38**
IV	**40**	**38**	**40**	**41**	**42**

தீர்வு :

	காலாண்டு			
ஆண்டு	**I**	**II**	**III**	**IV**
1984	40	35	38	40
1985	42	37	39	38
1986	41	35	38	40
1987	45	36	36	41
1988	44	38	38	42
மொத்தம்	**212**	**181**	**189**	**201**
சராசரி	**42.4**	**36.2**	**37.8**	**40.2**

மொத்த சராசரி $= \dfrac{42.4+36.2+37.8+40.2}{4} = 39.15$

பருவகால குறியீடு (S. I) $= \dfrac{\text{காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$

எனவே, முதல் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு

$$= \frac{42.4}{39.15} \times 100 = 108.30$$

இரண்டாம் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு

$$= \frac{36.2}{39.15} \times 100 = 92.54$$

மூன்றாம் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு

$$= \frac{37.8}{39.15} \times 100 \quad = 96.55$$

நான்காம் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு

$$= \frac{40.2}{39.15} \times 100 \quad = 102.68$$

பயிற்சி 10.3

1) வரைபட முறையின் மூலம் போக்குக் கோட்டினை வரைக.

ஆண்டு	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
உற்பத்தி	20	22	25	26	25	27	30

2) வரைபட முறையின் மூலம் போக்குக் கோட்டினை வரைக.

ஆண்டு	1997	1998	1999	2000	2001
உற்பத்தி	20	24	25	38	60

3) பகுதிச்சராசரி முறையின் மூலம் போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

ஆண்டு	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
உற்பத்தி (டன்னில்)	90	110	130	150	100	150	200

4) பகுதிச்சராசரி முறையின் மூலம் போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

ஆண்டு	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
நிகரலாபம் (இலட்சத்தில்)	38	39	41	43	40	39	35	25

5) மூன்று ஆண்டு காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரி முறையை பயன்படுத்தி கீழ்வரும் விவரங்களுக்கு போக்கு மதிப்புக் காண்க.

ஆண்டு	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
உற்பத்தி (டன்னில்)	21	22	23	25	24	22	25

ஆண்டு	1990	1991	1992
உற்பத்தி (டன்னில்)	26	27	26

6) ஒரு சர்க்கரை ஆலையின் உற்பத்தி (டன்களில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. 3 வருட காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரி முறையின் மூலம் போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க

ஆண்டு	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
உற்பத்தி	80	90	92	83	94	99	92

7) நான்கு ஆண்டு காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரிகளின் மூலம் போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

ஆண்டு	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
உற்பத்தி	464	515	518	467	502	540	557

ஆண்டு	1988	1989	1990
உற்பத்தி	571	586	612

8) நான்கு ஆண்டு காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரிகள் மூலம் போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

ஆண்டு	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
உற்பத்தி	614	615	652	678	681	655	717

ஆண்டு	1985	1986	1987	1988
உற்பத்தி	719	708	779	757

9) ஒரு சர்க்கரை ஆலையின் உற்பத்தி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டு	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
உற்பத்தி (டன்னில்)	77	88	94	85	91	98	90

இவ்விவரங்களுக்கு நேர்கோட்டு போக்கினை மீச்சிறு வர்க்க முறை மூலம் பொருத்தி போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க. மேலும் 2000 ஆம் ஆண்டிற்கான உற்பத்தி அளவை மதிப்பீடு செ–க.

10) நேர்கோட்டு போக்கினை பொருத்தி போக்கு மதிப்புகளையும் 2002 ஆம் ஆண்டிற்கான நிகரலாபத்தையும் மதிப்பீடு செ–க.

ஆண்டு	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
லாபம்	65	68	59	55	50	52	54

ஆண்டு	1999	2000
லாபம்	50	42

11) கீழ்கண்ட விவரங்கள் ஒரு பொதுத்துறை நிறுவனம் **1984** ஆம் ஆண்டிலிருந்து **1989** ஆம் ஆண்டு வரை ஈட்டிய லாபத்தோடு தொடர்புடையவை ஆகும்.

ஆண்டு	1984	1985	1986	1987	1988	1989
இலாபம் ('000)	10	12	15	16	18	19

மீச்சிறு வர்க்க முறை மூலம் போக்குக் கோட்டினை பொருத்தி, போக்கின் மதிப்புகளை பட்டியலிடுக.

12) போக்கு கோட்டினை பொருத்தி போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க

ஆண்டு	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
இலாபம்	47	53	50	46	41	39	40	36

13) சாதாரண சராசரி முறையின் மூலம் கீழ் கண்ட விவரங்களுக்கு பருவகால குறியீடுகளை காண்க.

ஆண்டு	காலாண்டு I	II	III	IV
1985	68	62	61	63
1986	65	58	66	61
1987	68	63	63	67

14) சாதாரண சராசரி முறையின் மூலம் கீழ் கண்ட விவரங்களுக்கு பருவகால குறியீடுகளை காண்க.

ஆண்டு	காலாண்டு I	II	III	IV
1994	78	66	84	80
1995	76	74	82	78
1996	72	68	80	70
1997	74	70	84	74
1998	76	74	86	82

15) சாதாரண சராசரி முறையின் மூலம் கீழ் கண்ட விவரங்களுக்கு பருவகால குறியீடுகளை காண்க.

ஆண்டு	காலாண்டு I	II	III	IV
1982	72	68	80	70
1983	76	70	82	74
1984	74	66	84	80
1985	76	74	84	78
1986	78	74	86	82

10.4 *குறியீட்டெண்கள்* (Index numbers)

"குறியீட்டெண் என்பது, வேறுபட்ட இரண்டு காலங்கள், இடங்கள் மற்றும் சூழ்நிலைகளுக்கு இடையில் பல மாறிகளில் ஏற்படக்கூடிய மாறுதலை அளப்பதற்கு பயன்படும் ஒரு விகிதம் (பொதுவாக விழுக்காடுகளில்) ஆகும்" - Alva. M. Tuttle.

இரண்டு வெவ்வேறான சூழ்நிலைகளில், தொடர்புடைய மாறிகளின் தொகுப்பில் காணப்படும் அலகுகளின் வித்தியாசத்தை அளப்பதற்கு உகந்த கருவியாக குறியீட்டெண் அமைகிறது. அல்லது இரண்டு வெவ்வேறான சூழ்நிலைகளில், தொடர்புடைய மாறிகளின் தொகுப்பில் காணப்படும் சராசரி மாறுதலின் வித்தியாசத்தை அளப்பதே குறியீட்டெண் என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. உதாரணமாக ஒரே இடத்தின் இரு மையங்களில் அல்லது இரு காலங்களில் நிலவும் பண்டங்களின் விலைகளில் ஏற்படும் மாறுதலை அளவிட குறியீட்டெண் பயன்படுகிறது. இரு வெவ்வேறு காலங்களின் அல்லது இரு வெவ்வேறு இடங்களின் வாழ்க்கை தர செலவை ஒப்பீடு செ–வதற்கு, நமக்கு குறியீட்டெண்கள் தேவைப்படுகிறது.

10.4.1 *குறியீட்டு எண்களின் வகைகள்*

எவற்றை அளவிடுகின்றோமோ அதற்கு ஏற்றவாறு குறியீட்டெண்களை வகைப்படுத்தலாம்.

(i) விலை குறியீட்டு எண் (ii) எண்ணளவை குறியீட்டு எண் (iii) மதிப்பு குறியீட்டு எண் (iv) சிறப்பு நோக்கம் கொண்ட குறியீட்டு எண்.

இங்கு நாம் (i) மற்றும் (ii) ஆகியனவற்றை மட்டும் கற்றறிவோம்.

10.4.2 *குறியீட்டு எண்களின் பயன்கள்*

(i) வியாபாரக் கொள்கைகளை உருவாக்க குறியீட்டு எண்கள் பயன்படுகின்றன.

(ii) பொருளாதாரத்தில் பணவீக்கம் மற்றும் பண தளர்வு இவற்றை அளவிட குறியீட்டெண் பயன்படுகிறது.

(iii) வெவ்வேறு இடங்கள் அல்லது வருடங்களில், மாணவர்களின் நுண்ணறிவுத் திறனை ஒப்பிடுவதற்காக குறியீட்டெண்கள் பயன்படுகின்றன.

(iv) பொருளாதாரத்தின் தன்மையை அளக்க உதவும் கருவியாக குறியீட்டெண்கள் உள்ளது.

10.4.3 குறியீட்டு எண் அமைக்கும் விதம்

(i) நிறையிடா குறியீடு (unweighted index)

(ii) நிறையிட்ட குறியீடு (weighted index)

நிறையிட்ட குறியீட்டு எண்களைப் பற்றி நாம் காணலாம்.

10.4.4 நிறையிட்ட குறியீட்டு எண்கள்

நிறையிட்ட குறியீட்டு எண்களை அமைக்கும் முறைகள்

(a) நிறையிட்ட மொத்தக் குறியீட்டெண் காணும் முறை

(b) சார்புகளின் நிறையிட்ட சராசரிகளைக் கொண்டு குறியீட்டெண் காணல்.

நிறையிட்ட மொத்தக் குறியீட்டெண்கள்

p_1 மற்றும் p_0 என்பன முறையே நடப்பு ஆண்டின் விலை மற்றும் அடிப்படை ஆண்டின் (base year) விலையைக் குறிக்கின்றன. q_1 மற்றும் q_0 என்பன முறையே நடப்பு ஆண்டின் அளவு மற்றும் அடிப்படை ஆண்டின் அளவைக் குறிக்கின்றன. குறியீட்டெண்கள் கணக்கிடுவதற்கு பயன்படுத்தப்படும் சில சூத்திரங்கள் வருமாறு:

(i) *லாஸ்பியரின் விலை குறியீட்டு எண்* (Laspeyre's price index)

$$P_{01}^{L} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100,$$ இங்கு $w = p_0 q_0$ என்பது உருப்படிகளுக்குரிய நிறைகள் மற்றும் P_{01} என்பது விலைக் குறியீட்டெண்.

(ii) *பாசியின் விலைக் குறியீட்டு எண்* (Paasche's price index)

$$= \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$$

$w = p_0 q_1$ என்பது நடப்பு ஆண்டுக்குரிய அளவுகள்.

(iii) பிஷரின் விலைக் குறியீட்டு எண் (Fisher's price index)

$$= \sqrt{P_{01}^{L} \times P_{01}^{P}} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100$$

குறிப்பு

லாஸ்பியரின் விலைக் குறியீட்டெண் மற்றும் பாசியின் விலைக் குறியீட்டெண் ஆகியவற்றின் பெருக்குச் சராசரியே (G.M) பிஷரின் விலைக் குறியீட்டெண் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 21

பின்வரும் அட்டவணையிலிருந்து 2000ஆம் ஆண்டுக்கான (i) லாஸ்பியர் (ii) பாசி மற்றும் (iii) பிஷர் ஆகியோரின் குறியீட்டு எண்களைக் கணக்கிடுக :

பொருள்	விலை		அளவு	
	1990	2000	1990	2000
A	2	4	8	6
B	5	6	10	5
C	4	5	14	10
D	2	P_{01}^{F} 2	19	13

தீர்வு :

பொருள்	விலை		அளவு					
	அடிப்படை ஆண்டு p_0	நடப்பு ஆண்டு p_1	அடிப்படை ஆண்டு q_0	நடப்பு ஆண்டு q_1	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
A	2	4	8	6	16	32	12	24
B	5	6	10	5	50	60	25	30
C	4	5	14	10	56	70	40	50
D	2	2	19	13	38	38	26	26
					160	**200**	**103**	**130**

(i) லாஸ்பியரின் குறியீட்டெண் : $P_{01}^{L} = \dfrac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$

$= \quad \times 100 = 125$

(ii) பாசியின் குறியீட்டெண் : $P_{01}^{P} = \dfrac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$

$= \quad \times 100 = 126.21$

(iii) பிஷரின் குறியீட்டெண் : $P_{01}^{F} = \sqrt{P_{01}^{L} \times P_{01}^{P}}$

$= 125.6$

எடுத்துக்காட்டு 22

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து (a) லாஸ்பியர் (b) பாசி மற்றும் (iii) பிஷர் ஆகிய முறைகளின் மூலம் விலைக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுக.

பொருள்	அடிப்படை ஆண்டு விலை	அடிப்படை ஆண்டு அளவு	நடப்பு ஆண்டு விலை	நடப்பு ஆண்டு அளவு
A	**2**	**40**	**6**	**50**
B	**4**	**50**	**8**	**40**
C	**6**	**20**	**9**	**30**
D	**8**	**10**	**6**	**20**
E	**10**	**10**	**5**	**20**

தீர்வு :

பொருள்	அடிப்படை ஆண்டு விலை p_0	அடிப்படை ஆண்டு அளவு q_0	நடப்பு ஆண்டு விலை p_1	நடப்பு ஆண்டு அளவு q_1	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
A	2	40	6	50	80	240	100	300
B	4	50	8	40	200	400	160	320
C	6	20	9	30	120	180	180	270
D	8	10	6	20	80	60	160	120
E	10	10	5	20	100	50	200	100
					580	**930**	**800**	**1110**

(i) லாஸ்பியரின் விலை குறியீட்டெண் : $P_{01}^{L} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$

$$= \quad \times 100 = 160.34$$

(ii) பாசியின் விலைக் குறியீட்டெண் : $P_{01}^{P} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$

$$= \quad \times 100 = 137.50$$

(iii) பிஷரின் விலைக்குறியீட்டெண் : $P_{01}^{F} = \sqrt{P_{01}^{L} \times P_{01}^{P}}$

$$= 148.48$$

10.4.5 குறியீட்டு எண்களுக்கான சோதனைகள்

ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தின் விலைகள் அளவுகள் போன்றவற்றை மற்றொரு காலத்தின் விலைகள் மற்றும் அளவுகளுடன் ஒப்பிடும் போது, காணப்படுகின்ற தொடர்புடைய மாற்றங்களை அறிய குறியீட்டெண்கள் அமைக்கப்படுகின்றன. குறியீட்டெண்கள் அமைப்பதற்கு கொடுக்கப்பட்ட சூழ்நிலைக்கேற்ற ஒரு சூத்திரத்தை தெரிவு செ–தல் அவசியமாகிறது. அப்பொருத்தமான குறியீட்டெண்ணை தேர்ந்தெடுப்பதற்குரிய சோதனைகளாவன.

1) கால மாற்றுச் சோதனை (Time reversal test)

2) காரணி மாற்றுச் சோதனை (Factor reversal test)

கால மாற்றுச் சோதனை

கொடுக்கப்பட்ட முறை, காலத்தின் இரு வழிகளிலும் முன்முகமாகவும், பின் முகமாகவும் இயங்கும் தன்மையுடையதா என்பதைக் கண்டறிவதே கால மாற்றுச் சோதனை ஆகும். ஏதேனும் இரண்டு ஆண்டுகளுக்கு உரிய விவரங்களைக் கொண்டு ஒரே முறையில் ஆனால் அடிப்படை ஆண்டுகளை மாற்றி பெறப்படும் இரண்டு குறியீட்டெண்களில் ஒன்றானது மற்றொன்றின் தலைகீழாக இருக்கும். ஆகவே அவைகளின் பெருக்கல் பலன் **1** ஆகும்.

$\therefore$ $\mathbf{P_{01} \times P_{10} = 1}$ என்பது நிறைவு செ–யப்படவேண்டும்.

காரணி மாற்றுச் சோதனை

காரணி மாற்றுச் சோதனையில் விலைக் குறியீடு மற்றும் அளவுக் குறியீடு ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலன் ஆனது அவற்றிற்கு ஏற்ற மதிப்புக் குறியீட்டுக்குச் சமமாகும். இச்சோதனையில் விலையின் மாற்றம் மற்றும் அளவின் மாற்றம் ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலன் ஆனது மதிப்பின் மொத்த மாற்றத்திற்குச் சமமாக இருக்கும்.

$\therefore\ \mathbf{P_{01} \times Q_{01} = \dfrac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}}$ (ஒவ்வொரு குறியீட்டிலும் உள்ள காரணி 100ஐ தவிர்க்கவும்)

P_{01} விலைகளில் ஏற்படக்கூடிய சார்ந்த மாற்றத்தையும் Q_{01} அளவுகளில் ஏற்படக்கூடிய சார்ந்த மாற்றத்தையும் குறிக்கிறது. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு ஆண்டில் கொடுக்கப்பட்ட பண்டத்தின் மொத்த மதிப்பு என்பது ஒரு அலகின் அளவு மற்றும் விலை ஆகியவற்றின் பெருக்கல் தொகைக்கு சமமாகும்.

$\dfrac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$ என்பது நடப்பாண்டின் மொத்த மதிப்பு மற்றும் அடிப்படை ஆண்டின் மொத்த மதிப்பு ஆகியவற்றின் விகிதம். இவ்விகிதம் **உண்மை மதிப்பின் விகிதம்** (True value ratio) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு

பிஷரின் குறியீட்டெண், இரு மாற்றுச் சோதனைகளையும் நிறைவு செ–வதால் அது விழுமிய குறியீட்டெண் (Ideal index number) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 23

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுக, மேலும் இக் காரணி மாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றை நிறைவு செ-வதைச் சரிபார்க்கவும்.

பொருள்	விலை		அளவு	
	1985	**1986**	**1985**	**1986**
A	**8**	**20**	**50**	**60**
B	**2**	**6**	**15**	**10**
C	**1**	**2**	**20**	**25**
D	**2**	**5**	**10**	**8**
E	**1**	**5**	**40**	**30**

தீர்வு :

பொருள்	1985		1986					
	p_0	q_0	p_1	q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
A	8	50	20	60	1000	400	1200	480
B	2	15	6	10	90	30	60	20
C	1	20	2	25	40	20	50	25
D	2	10	5	8	50	20	40	16
E	1	40	5	30	200	40	150	30
					1380	**510**	**1500**	**571**

பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் $= \sqrt{\dfrac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \dfrac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{1380}{510} \times \frac{1500}{571}} \times 100$$

$$= 2.6661 \times 100 = 266.61$$

கால மாற்றுச் சோதனை

$P_{01} \times P_{10} = 1$ என நிறுவ வேண்டும்.

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} = \sqrt{\frac{1380}{510} \times \frac{1500}{571}}$$

$$P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_1}} = \sqrt{\frac{571}{1500} \times \frac{510}{1380}}$$

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{1380}{510} \times \frac{1500}{571} \times \frac{571}{1500} \times \frac{510}{1380}} = 1$$

எனவே பிஷரின் விழுமிய குறியீடு காலமாற்றுச் சோதனையை நிறைவு செ–கின்றது.

காரணி மாற்றுச் சோதனை

$$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$ என நிறுவ வேண்டும்.

$$Q_{01} = \qquad\qquad = \sqrt{\frac{571}{510} \times \frac{1500}{1380}}$$

$$\therefore \quad P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{1380}{510} \times \frac{1500}{571} \times \frac{571}{510} \times \frac{1500}{1380}}$$

$$= \frac{1500}{510} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

எனவே பிஷரின் விழுமிய குறியீடு காரணி மாற்றுச் சோதனையை நிறைவு செ–கின்றது.

$$\sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}}$$

எடுத்துக்காட்டு 24

பிஷரின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி குறியீட்டு எண்ணைக் கணக்கிடுக. இவ்வெண் காலமாற்று மற்றும் காரணிமாற்று சோதனைகளை நிறைவு செ-கின்றது எனக் காண்க.

பொருள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	**10**	**12**	**12**	**15**
B	**7**	**15**	**5**	**20**
C	**5**	**24**	**9**	**20**
D	**16**	**5**	**14**	**5**

தீர்வு :

பொருள்	அடிப்படை ஆண்டு p_0	q_0	நடப்பு ஆண்டு p_1	q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
A	10	12	12	15	144	120	180	150
B	7	15	5	20	75	105	100	140
C	5	24	9	20	216	120	180	100
D	16	5	14	5	70	80	70	80
					505	**425**	**530**	**470**

பிஷரின் விழுமிய குறியீடு = x 100

$$= \sqrt{\frac{505}{425} \times \frac{530}{470}} \times 100 = 115.75$$

கால மாற்றுச் சோதனை

$P_{01} \times P_{10} = 1$ என நிறுவ வேண்டும்.

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} = \sqrt{\frac{505}{425} \times \frac{530}{470}}$$

$$P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}} = \sqrt{\frac{470}{530} \times \frac{425}{505}}$$

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{505}{425} \times \frac{530}{470} \times \frac{470}{530} \times \frac{425}{505}} = 1$$

எனவே பிஷிரின் விழுமிய குறியீட்டெண் கால மாற்றுச் சோதனையை நிறைவு செ–கிறது.

காரணி மாற்றுச் சோதனை

$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$ என நிறுவ வேண்டும்.

$$Q_{01} = \qquad = \sqrt{\frac{470}{530} \times \frac{425}{505}}$$

$$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{505}{425} \times \frac{530}{470} \times \frac{470}{425} \times \frac{530}{505}}$$

$$= \frac{530}{425} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

எனவே பிஷரின் விழுமிய குறியீடு, கராணி மாற்றுச் சோதனையை நிறைவு செ–கிறது.

10.4.6 வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டெண் [Cost of living index (CLI)]

ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு பண்டங்கள் மற்றும் சேவைகள் ஆகியவற்றிற்கு வாடிக்கையாளர் செலுத்தும் விலைகளில், காலப்போக்கில் ஏற்படும் சராசரி மாற்றத்தினைக் குறிக்கும் வகையில் வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்கள் வடிவமைக்கப்படுகின்றன. வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டு எண் ஆனது நுகர்வோர் விலை குறியீட்டெண் (Consumer price index number) எனவும் அழைக்கப்படுகின்றது.

சில்லரை விலைகளின் நிலைகளில் ஏற்படக்கூடிய மாற்றங்கள், பலவகை மக்களின் வாழ்க்கை செலவை பல்வேறு நிலைகளில் பாதிக்கிறது என்பது அறிந்த ஒன்றாகும். பொதுவான குறியீட்டடெண்ணால் இதை வெளிப்படுத்துவதென்பது இயலாதது ஆகும். ஆகவே பலப்பகுதிகளில் வசிக்கக்கூடிய பல பிரிவு மக்களின் மேல் திணிக்கப்படும் விலை ஏற்றங்களால் ஏற்படும் விளைவுகளைக் கண்டறிய வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண் அமைப்பது அவசியமாகிறது. ஊதிய உயர்விற்கான கோரிக்கைகள் வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்ணை அடிப்படையாகக் கொண்டவை என்பது குறிப்பிடத்தக்கதாகும். பல நாடுகளில், ஊதியம் மற்றும் சம்பளம் ஆகியவைகள் வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்களை கருத்தில் கொண்டு மாற்றங்கள் செ–யப்படுகின்றன.

10.4.7 வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்ணை அமைக்கும் முறைகள்

கீழ்கண்ட முறைகளில் வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண் அமைக்கப்படுகிறது.

(i) மொத்த செலவு முறை அல்லது நிறையிட்ட மொத்த முறை (Aggregate expenditure method or weighted aggregative method)

(ii) குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறை (Family budget method)

மொத்த செலவு முறை

இம்முறையில் அடிப்படை ஆண்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட பிரிவினரால் வாங்கப்படும் பொருள்களின் அளவுகளை நிறைகளாக பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இந்த நிறைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு, மொத்த செலவை அடிப்படை ஆண்டு மற்றும் நடப்பு ஆண்டுகளுக்கு கணக்கிட்டு சதவீத மாற்றங்களும் கணக்கிடப்படுகின்றன.

$\therefore$ வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டு எண் (C.L.I) = $\dfrac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}$ x 100

வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்ணை அமைப்பதில், மொத்த செலவு முறை அனைவராலும் நன்கு அறிந்ததாகும்.

குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறை

இம்முறையில் விலைகளை வாங்கப்படும் அளவுகளால் பெருக்கக் கிடைக்கும் மதிப்புகளை (அதாவது p_0q_0) நிறைகளாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன. தொடர்பு விலைகளை நிறை மதிப்புகளோடு பெருக்கக் கிடைக்கும் மொத்தத்தை, நிறைமதிப்புக்களின் மொத்தத்தால் வகுக்க கிடைக்கும் மதிப்பு, வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண் ஆகும்.

$\therefore$ வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண் = $\dfrac{\sum PV}{\sum V}$

இங்கு P = x 100 ஆனது தொடர்பு விலைகள் (price relatives) மற்றும் V = p_0q_0 ஆனது ஒவ்வொரு உருப்படியின் நிறை மதிப்பு.

இம்முறை தொடர்பு விலைகளின் நிறைசராசரி முறைக்கு ஒப்பாகும்.

10.4.8 வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்ணின் பயன்கள்

(i) ஊதிய நிர்ணயம் மற்றும் ஊதிய ஒப்பந்தம் இவற்றிற்கு வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண் முக்கியமாக பயன்படுத்தப் படுகிறது.

(ii) தொழிலாளர்களின் ஊதியத்திற்கான அகவிலைப்படியைக் கணக்கிட இது பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 25

மொத்த செலவு குறியீட்டெண் முறை மூலம் வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்ணை காண்க.

பொருள்	அளவு	விலை (ரூ)	
	2000	2000	2003
A	100	8	12.00
B	25	6	7.50
C	10	5	5.25
D	20	48	52.00
E	65	15	16.50
F	30	19	27.00

தீர்வு :

பொருள்	அளவு	விலை			
	2000	2000	2003		
	q_0	p_0	p_1	p_1q_0	p_0q_0
A	100	8	12.00	1200.00	800
B	25	6	7.50	187.50	150
C	10	5	5.25	52.50	50
D	20	48	52.00	1040.00	960
E	65	15	16.50	1072.50	975
F	30	19	27.00	810.00	570
				4362.50	**3505**

$$\text{C. L. I} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \qquad \times 100 = 124.46$$

எடுத்துக்காட்டு 26

2000 ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு குடும்ப வரவு செலவு திட்ட முறையின் மூலம் கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு 2003 ஆம் ஆண்டிற்கான வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்ணை கணக்கிடுக.

உருப்படிகள்	விலை		நிறை
	2000	2003	
உணவு	200	280	30
வாடகை 100	200	20	
உடை	150	120	20
எரிபொருள் மற்றும் மின்சாரம்	50	100	10
இதர செலவுகள்	100	200	20

தீர்வு :

$\frac{4362.50}{3500}$

குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறையில் CLI - கணக்கிடல் :

உருப்படிகள்	p_0	p_1	நிறை V	$P = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	PV
உணவு	200	280	30	140	4200
வாடகை	100	200	20	200	4000
உடை	150	120	20	80	1600
எரிபொருள் மற்றும் மின்சாரம்	50	100	10	200	2000
இதர செலவுகள்	100	200	20	200	4000
			100		**15800**

வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண் $= \frac{\Sigma PV}{\Sigma V} = \frac{15800}{100} = 158$

எனவே 2000 ஆம் ஆண்டுடன் ஒப்பிடுகையில் 2003 ஆம் ஆண்டு வாழ்க்கைச் செலவானது 58% அதிகரித்துள்ளது.

பயிற்சி **10.4**

1) (i) லாஸ்பியர் (ii) பாசி (iii) பிஷர் ஆகிய குயீட்டு எண்களை பின்வரும் விவரங்களுக்கு கணக்கிடுக.

பொருள்	விலை		அளவு	
	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு
A	6	10	50	50
B	2	2	100	120
C	4	6	60	60
D	10	12	30	25

2) பின்வரும் விவரங்களுக்கு விலைக் குறியீட்டு எண்ணை (i) லாஸ்பியர் (ii) பாசி (iii) பிஷர் ஆகிய முறைகளில் கணக்கிடுக.

பொருள்	1999		1998	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	4	6	2	8
B	6	5	5	10
C	5	10	4	14
D	2	13	2	19

3) (i) லாஸ்பியர் (ii) பாசி (iii) பிஷர் ஆகிய குயீட்டு எண்களை பின்வரும் விவரங்களுக்கு கணக்கிடுக.

பொருள்	விலை		அளவு	
	1980	1990	1980	1990
A	2	4	8	6
B	5	6	10	5
C	4	5	14	10
D	2	2	19	13

4) பின்வரும் விவரங்களுக்கு விலைக் குறியீட்டு எண்ணை (i) லாஸ்பியர் (ii) பாசி (iii) பிஷர் ஆகிய முறைகளில் கணக்கிடுக.

பொருள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	5	25	6	30
B	10	5	15	4
C	3	40	2	50
D	6	30	8	35

5) பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுக. மேலும் இது, காரணி மாற்றுச் சோதனை மற்றும் கால மாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றை நிறைவு செ–கிறது எனக்காட்டுக.

பொருள்	விலை		அளவு	
	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு
A	6	10	50	56
B	2	2	100	120
C	4	6	60	60
D	10	12	30	24
E	8	12	40	36

6) பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுக. மேலும் இது, காரணி மாற்றுச் சோதனை மற்றும் கால மாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றை நிறைவு செ–கிறது எனக்காட்டுக.

பொருள்	அடிப்படை ஆண்டு (1997)		நடப்பு ஆண்டு (1998)	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	10	10	12	8
B	8	12	8	13
C	12	12	15	8
D	20	15	25	10
E	5	8	8	8
F	2	10	4	6

7) 1999 ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு 2000 ஆம் ஆண்டிற்கு பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு மொத்தச் செலவு முறையில் வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்ணைக் காண்க.

பொருள்	அளவு (கிகி) 1999	விலை	
		1999	2000
A	6	5.75	6.00
B	1	5.00	8.00
C	6	6.00	9.00
D	4	8.00	10.00
E	2	2.00	1.80
F	1	20.00	15.00

8) குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறையில் வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுக.

பொருள்	A	B	C	D	E	F	G	H
அடிப்படை ஆண்டில் அளவு (அலகு)	20	50	50	20	40	50	60	40
அடிப்படை ஆண்டில் விலை (ரூ.)	10	30	40	200	25	100	20	150
நடப்பு ஆண்டில் விலை (ரூ.)	12	35	50	300	50	150	25	180

9) 1995 ஐ அடிப்படை ஆண்டாகக் கொண்டு, குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறையில் பின்வரும் விவரங்களுக்கு வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டு எண்ணைக் கணக்கிடுக.

பொருள்	நிறை	விலை (ஒரு அலகிற்கு)	
		1995	1996
A	40	16.00	20.00
B	25	40.00	60.00
C	5	0.50	0.50
D	20	5.12	6.25
E	10	2.00	1.50

10) 1976 ஐ அடிப்படை ஆண்டாகக் கொண்டு, 1986 ஆம் ஆண்டிற்கு பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறையில் வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டெண்ணைக் கணக்கிடுக.

பொருள்	P	Q	R	S	T	U
அடிப்படை ஆண்டு 1976 ல் அளவு	50	25	10	20	30	40
1976 ல் விலை (ரூ.) (ஒரு அலகிற்கு)	10	5	8	7	9	6
1986 ல் விலை (ரூ.) (ஒரு அலகிற்கு)	6	4	3	8	10	12

10.5 புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு (SQC)

உற்பத்தி செ–யப்படும் பொருட்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு குறிப்பிட்ட பயன்பாட்டுக்குத் தேவைப்படும். ஒரு பொருள் அதற்கான பயன்பாட்டின் நியதிகளை நிறைவு செ–வதாக அமையுமானால் அப்பொருளின் தரம் சிறப்பாக இருப்பதாகவும் இல்லையெனில் அதன் தரம் குறைவாக இருப்பதாகவும் கொள்ளலாம்.

எவ்வளவுதான் கவனமாக செயல்படுத்தினாலும் திரும்பத் திரும்பச் செ–யப்படும் செயல்கள் ஒரே மாதிரியாக இருக்காது. வேறுபாடுகள் இருக்கதான் செ–யும். சில உயர் நுட்பங்களையுடைய இயந்திரங்கள் தயாரிக்கும் பொருள்களின் பல்வேறு அலகுகளுக்கிடையே வேறுபாடுகள் காணப்படுவது அசாதாரணமானதல்ல. எடுத்துக்காட்டாக தக்கை அடைப்பான்கள், குப்பிகள் முதலானவற்றை திறன்மிக்க இயந்திரங்களைக் கொண்டு தயாரித்தாலும் பல்வேறு உற்பத்தி அலகுகளுக்கிடையே சிறிதளவு வேறுபாடுகள் இருப்பதைக் காணலாம். வேறுபாடுகள் பெரிய அளவில் இல்லையெனில் அவ்வேறுபாடுகளைப் பொருட்படுத்தாமல் அவ்வுற்பத்திப் பொருள்களின் அளவுகள் கொடுக்கப்பட்ட நியதிகளுக்கு உட்பட்டுள்ளன எனக் கொள்ளலாம். ஆனால் மாறுபாடுகள் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுக்கு மேல் இருக்குமானால் அந்த உற்பத்திப் பொருட்களை நிராகரிக்க வேண்டும் மற்றும் அம்மாறுபாடுகளுக்கான காரண விளைவுகளை ஆ–வு செ–ய வேண்டும்.

10.5.1 ***மாறுபாடுகளுக்கான காரணங்கள்*** **(Causes for variation)**

மாறுபாடுகள் ஏற்படுவதற்கான இரண்டு வகை விளைவுகளாவன (i) தற்செயல் காரணங்கள் (ii) குறிப்பிட்ட காரணங்கள்.

(i) *தற்செயல் காரணங்கள்* (Chance causes)

காரணமின்றி இயல்பாகவே தற்செயல் காரணமாக ஏற்படும் மாறுபாடுகள் தற்செயல் மாறுபாடுகள் (அ) தன்னிச்சை மாறுபாடுகள் ஆகும். தற்செயல் மாறுபாடுகள் ஏற்கக்கூடியவை, அனுமதிக்கக் கூடியவை மற்றும் தவிர்க்க முடியாதவை. அவை உற்பத்திப் பொருளின் தரத்தை வெகுவாக பாதிப்பதில்லை.

(ii) *குறிப்பிட்ட காரணங்கள்* (Assignable causes)

தவறான திட்டம் மற்றும் செயல்படுகள் காரணமாக ஏற்படும் மாறுபாடுகள் குறிப்பிட்ட காரணங்களால் ஏற்படும் மாறுபாடுகளாகும். இவை தற்செயலாக நடப்பவை அல்ல. தற்செயல் மாறுபாடுகளின் காரணங்களை அறியமுடியாது. ஆனால் குறிப்பிட்ட காரணங்களால் ஏற்படும் பிழைகளைக் கண்டறிந்து, செயல்பாட்டைச் சீர் செ–ய முடியும்.

10.5.2 ***புள்ளியியல் தரக்கட்டுபபாட்டின் பங்கு மற்றும் அதன் பயன்கள்***

ஒரு செயல்பாடு, புள்ளியியல் தரக்கட்டுபாட்டிற்கு இணங்க செயல்படுகிறதா என்பதைக் கண்டுபிடிக்கத் தேவையான விவரங்களைச் சேகரிப்பதும் அவற்றை ஆரா–வதும் புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாட்டின் பங்காகும். ஒரு செயல்பாட்டின், குறிப்பிட்ட காரண விளைவுகளால் ஏற்படும் மாறுபாடுகளை விரைந்து கண்டுபிடிக்க புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு உதவுகிறது என்பது அதன் சிறப்பாகும். உற்பத்தியாகும் பொருள் குறையுள்ளவையாக மாறும் முன்னரே மாறுபாடுகளைக் கண்டுபிடித்து அவற்றைக் களைய முடியும்.

புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு என்பது நன்கு ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டு பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படும் செயல்முறை ஆகும். மாறுபாடுகளின் அடிப்படையில் முடிவுகள் எடுப்பதற்கான நோக்கங்கள் மற்றும் உத்திகள் ஆகியவற்றை நன்கு புரிந்து கொள்வதற்கான அடிப்படையே புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு ஆகும். புள்ளியியல்

தரக்கட்டுப்பாடு என்பது கோளாறுகளை கண்டுபிடிக்கும் முறை மட்டுமே ஆகும். தரம் பராமரிக்கப்படுகிறதா இல்லையா என்பதை இது நமக்கு கூறுகிறது. தகுந்த சீர்படுத்தும் வழிமுறைகளைக் கையாண்டு தொடர்ந்து உற்பத்தியாகும் பொருள்களின் தரத்தைச் சீராக வைத்திருப்பது சம்பந்தப்பட்ட தொழில் நுட்ப வல்லுனர்களிடம் உள்ளது.

புள்ளியியல் தரக்காட்டுபாட்டின் பயன்பாடு இருவகைப்படும் (a) செயல்பாட்டுத் தரக்கட்டுப்பாடு (process control) (b) உற்பத்தி பொருளின் தரக் கட்டுப்பாடு (product control)

செயல்பாட்டு கட்டுப்பாட்டினால் குறிப்பிட்ட செயல்பாடு கட்டுப்பாட்டில் உள்ளதா இல்லையா என அறிய முயல்கிறோம். உற்பத்தி பொருளின் தரக்கட்டுப்பாடு என்பது எதிர்கால செயல்பாட்டைப் பற்றி அறிவதற்கு உதவுகிறது.

10.5.3 செயல்பாட்டுத் தரக் கட்டுப்பாடு மற்றும் உற்பத்தி பொருளின் தரக் கட்டுப்பாடு

உற்பத்தி செ–யப்படும் பொருள்களின் தரம் குறிப்பிட்ட தர நியதிகளுக்கு ஏற்ப இருக்குமாறு செ–வது உற்பத்திச் செயல்முறையின் முக்கிய நோக்கமாகும். அதாவது உற்பத்தி செ–யப்படும் பொருட்களில் குறைபாடுடைய பொருட்களின் விகித அளவு பெரிய அளவில் இல்லாமலிருக்குமாறு செ–ய விழைகிறோம். இதற்கு செயல்பாட்டு தரக் கட்டுப்பாடு என்று பெயர். தரக் கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள் (control charts) மூலம் இதனை நாம் சாதிக்கிறோம்.

உற்பத்தி பொருளின் தரக் கட்டுப்பாடு என்பது உற்பத்தி செ–யப்பட்ட பொருட்களின் தரத்தை முக்கியமான கட்டங்களில் கடுமையாக ஆ–வு செ–து தரத்தை நிலை நிறுத்துவதாகும். டாஜ் மற்றும் ரோமிக் (Dodge and Romig) ஆகியோரால் உருவாக்கப்பட்ட கூறெடுத்தல் ஆ–வு திட்டங்களால் (sampling inspection plans) உற்பத்தி பொருளின் தரக் கட்டுப்பாடு செயல்படுத்தப்படுகிறது. உற்பத்தியாளர் எந்த அளவில் தரத்தைப் பராமரித்தாலும், நுகர்வோருக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு தரத்தில் பொருட்கள் கிடைக்கச் செ–வது உற்பத்தி பொருளின் தரக் கட்டுப்பாட்டின் நோக்கமாகும். சந்தைக்கு அனுப்பப்படும் பொருட்களில் பெரிய அளவில்

குறைபாடுகளையுடைய பொருட்கள் இல்லாமலிருக்குமாறு உற்பத்தி பொருளின் தரக் கட்டுப்பாடு உறுதி செ–கிறது.

10.5.4 *தரக் கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள்* (Control Charts)

செயல்பாட்டுத் தரக் கட்டுப்பாட்டில் பயன்படும் புள்ளியியல் கருவியானது தரக் கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள் ஆகும். மாறுபாடுகளின் பல்வேறு அமைப்புகளை விளக்கும் வகையில் அவை அமையும். 1924 ஆம் ஆண்டு பெல் தொலைபேசி நிறுவனத்தைச் சார்ந்த இயற்பியல் அறிஞர் வால்டர் A. ஸ்டீவார்ட் (Walter A. Stewart) என்பவரால் தரக் கட்டுப்பாட்டு படங்கள் உருவாக்கப்பட்டு மேம்பப்படுத்தப்பட்டன. கட்டுப்பாட்டு படங்கள் மூன்று வழிகளில் பயன்படுமென அவர் குறிப்பிட்டார். முதலாவதாக நிறுவனம் நிலை நிறுத்த விரும்பும் தரத்தின் அளவை அறுதியிட்டு குறிப்பிட கட்டுப்பாட்டு படங்கள் பயன்படும். இரண்டாவதாக அந்த அறுதியிட்ட தரத்தை எட்டுவதற்கான கருவியாகப் பயன்படும். மூன்றாவதாக, செயல்பாடுகள், எட்ட விழையும் தரத்தை அடையும் வண்ணம் அமைந்துள்ளனவா என அறிய உதவும். தரக்கட்டுப்பாடு என்பது நியதிகள் அமைக்கவும் அதற்கேற்ப உற்பத்தி செ–யவும் மற்றும் அதனை சோதனை செ–யவும் பயன்படும் ஒரு கருவியாகும்.

குறிப்பிட்ட தரத்திலிருந்து மாறுபாடுகள் எத்தனை முறைகள் மற்றும் எந்த அளவுகளில் ஏற்படுகின்றன என்பதை வரைபடம் வாயிலாக விளக்குவதே ஒரு தரக் கட்டுப்பாட்டு படத்தின் அடிப்படையாகும் தரக் கட்டுப்பாட்டு படங்களை உருவாக்குவது எளிது. அதனடிப்படையில் விளக்கமளிப்பதும் எளிது. செயல்பாடுகள் கட்டுப்பாட்டில் இருக்கிறதா இல்லையா என்பதை மேலோட்டமாக நோக்கும்பொழுது மேலாளர் புரிந்து கொள்ளத் தரக் கட்டுப்பாட்டு படங்கள் உதவுகிறது.

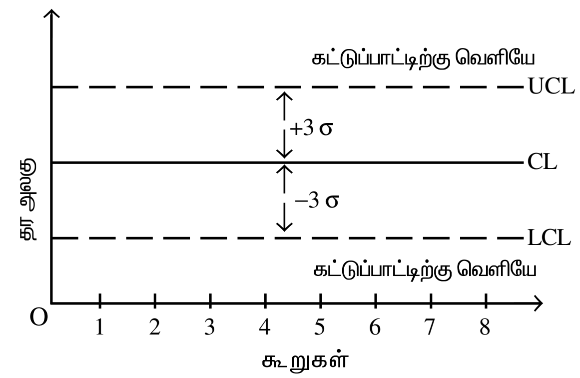
பொதுவாகத் தரக் கட்டுப்பாட்டு படம் மூன்று கிடைமட்டக் கோடுகளைக் கொண்டிருக்கும்.

(i) செயல்பாட்டில் நிலை நிறுத்த விரும்பும் தரத்தின் அளவைக் குறிக்கும் மத்தியக் கோடு (CL)

(ii) மேல்மட்ட கட்டுப்பாட்டு எல்லைக் கோடு (UCL) மற்றும்

(iii) கீழ்மட்ட கட்டுப்பாட்டு எல்லைக் கோடு (LCL)

தரக் கட்டுப்பாட்டின் விளக்கப்படம்



(படம் 10.9)

அவ்வப்போது ஒரு கூறு எடுக்கப்பட்டு அதற்கான விபரங்கள் வரைபடத்தில் குறிக்கப்படுகின்றன. எல்லா கூறுப் புள்ளிகளும் மேல்மட்ட மற்றும் கீழ்மட்ட கட்டுப்பாட்டு எல்லைக்கோடுகளுக்கிடையே அமையுமானால் செயல்பாடு 'கட்டுப்பாட்டில்' இருப்பதாகக் கொள்ளப்படும் மற்றும் தற்செயல் காரணங்கள் மட்டுமே காணப்படுகின்றன எனக் கொள்ளலாம். ஒரு கூறு புள்ளி கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளுக்கு வெளியே அமையுமானால் மாறுபாடுகள் குறிப்பிட்ட காரணங்களால் ஏற்படுகின்றன என்று கொள்ளலாம்.

தரக் கட்டுப்பாட்டு படங்களின் வகைகள்

பொதுவாக தரக் கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள் இரு வகைப்படும்

(i) மாறிகளின் கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள்

(ii) பண்புகளின் கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள்

தொடர்ந்து மாறும் தன்மையுள்ள மாறிகளின் கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள் $\overline{X}$ மற்றும் R படங்களைப் பயன்படுத்துகின்றன.

c, np மற்றும் p போன்ற பண்புகள் பற்றிய கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள், அளவிட முடியாத தரகுணாதிசயங்களை அல்லது பண்புகளை (குறையுள்ள அல்லது குறையற்ற உற்பத்திப் பொருள்) பற்றித் தெரிவிக்கிறது.

இப்பாடத்தில் நாம் மாறிகளின் கட்டுப்பாட்டுப் படங்களான மற்றும் **R** கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள் பற்றி மட்டும் படிக்கவிருக்கிறோம்.

R-படம் (வீச்சு படம்)

ஒரு செயல்பாட்டில் தரத்தின் சிதறல் அல்லது மாறுபாடுகளைக் குறிக்க R படம் (range chart) பயன்படுத்தப்படுகிறது. R படம் படத்தின் துணைப் படமாகும். நாம் எடுத்துக்கொண்ட செயல்பாட்டினை போதுமான அளவு ஆ–வு செ–ய இரு படங்களுமே தேவைப்படும். பொதுவாக R படம் படத்துடன் கொடுக்கப்படும். R படம் தயார் செ–வது படம் தயார் செ–வது போன்றதே, R படம் வரையத் தேவையான மதிப்புகள் :

(i) ஒவ்வொரு கூறின் வீச்சு, R.

(ii) வீச்சுகளின் சராசரி,

(iii) $\text{U.C.L} = \text{D}_4$

$\text{L.C.L} = \text{D}_3$

என்பன எல்லைக்கோடுகளாகும். D_4 மற்றும் D_3 மதிப்புகளை அட்டவணையிலிருந்து பெறலாம். $\frac{\text{X}_1 + \text{X}_2 + \ldots + \text{X}_n}{n}$

படம் (chart)

ஒரு செயல்பாட்டின் கூறுகளின் தரக் கட்டுப்பாடு சராசரிகளை காட்டுவதற்காக படம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. படம் வரைவதற்கு பின்வரும் விவரங்களைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

i) $_i$: $\text{i} = 1, 2 \ldots n$ என்ற கூறுகள் ஒவ்வொன்றின் சராசரி

ii) அனைத்து கூறு சராசரிகளின் சராசரி

=

இதில் n என்பது கூறுகளின் எண்ணிக்கை

iii) $\text{U.C.L.} = \overline{\overline{\text{X}}} + \text{A}_2$

LCL = − A_2 , இதில் = என்பது கூறுவீச்சுகள் R_i இன் சராசரி ஆகும்.

n இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான A_2 மதிப்புகளை அட்டவணையிலிருந்து பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 28

மின் விளக்குகள் உற்பத்தி செ-யப்படும் செயல்பாட்டில் ஒரு மணிக்கு ஒரு மின் விளக்கு வீதம் 6 மின்விளக்குகள் எடுக்கப்படுகின்றன. இதேபோல் 10 கூறுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. பின்வரும் விவரங்கள் அவற்றின் பயன்பாட்டுக் காலத்தை (மணியில்) குறிக்கின்றன எனில் $\overline{X}$ மற்றும் R படங்கள் வரைந்து அதிலிருந்து உன் முடிவுகளைக் குறிப்பிடுக.

கூறு எண்	பயன்பாட்டு காலம் (மணியில்)					
1	620	687	666	689	738	686
2	501	585	524	585	653	668
3	673	701	686	567	619	660
4	646	626	572	628	631	743
5	494	984	659	643	660	640
6	634	755	625	582	683	555
7	619	710	664	693	770	534
8	630	723	614	535	550	570
9	482	791	533	612	497	499
10	706	524	626	503	661	754

(n = 6 எனில், $A_2 = 0.483$, $D_3 = 0$, $D_4 = 2.004$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

தீர்வு :

கூறுகள்	கூடுதல்	கூறு சராசரி	கூறு வீச்சு R
1	4086	681	118
2	3516	586	167
3	3906	651	134
4	3846	641	171
5	4080	680	490
6	3834	639	200
7	3990	665	236
8	3622	604	188
9	3414	569	309
10	3774	629	251
கூடுதல்		**6345**	**2264**

மத்தியகோடு = கூறுகளின் சராசரிகளின் சராசரி = 634.5

= கூறுகளின் வீச்சுகளின் சராசரி = 226.4

U.C.L. = + A_2

= 634.5 + 0.483 x 226.4

= 634.5 + 109.35 = 743.85

L.C.L. = - A_2

= 634.5 - 0.483 x 226.4

= 634.5 - 109.35 = 525.15

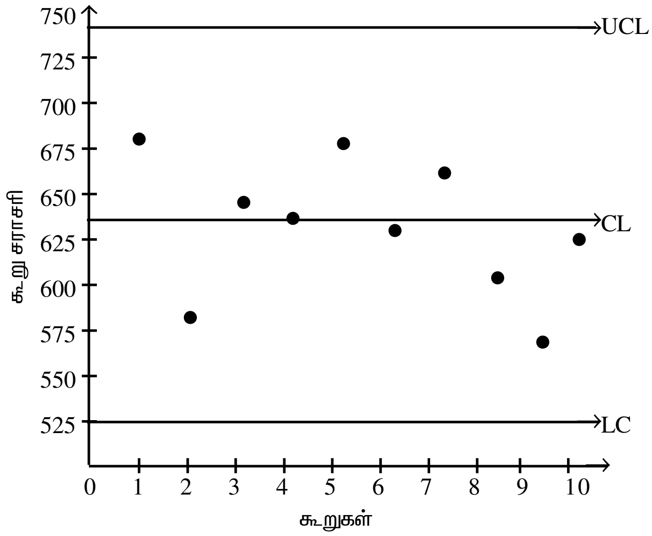
மத்தியக் கோடு = 226.4

U.C.L. = D_4 = 2.004 x 226.4

= 453.7056

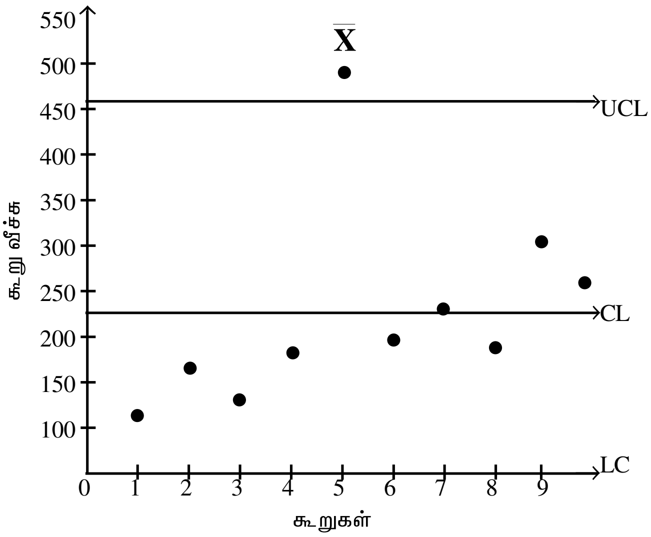
L.C.L. = D_3 = 0 x 226.4 = 0

படம்



(படம் 10.10)

R படம்



(Fig. 10.11)

முடிவு :

R படத்தில் கூறுவீச்சுகளின் ஒரு புள்ளி UCL க்கு வெளியில் உள்ளது. எனவே செயல்பாடு கட்டுப்பாட்டில் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 29

ஒவ்வொன்றும் அளவு 5 உள்ள பத்து கூறுகளின் சராசரி மற்றும் வீச்சுகள் பற்றிய விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. சராசரி மற்றும் வீச்சு படங்களுக்கான மத்தியக் கோடு மற்றும் கட்டுப்பாட்டுக் கோடுகளின் எல்லைகளைக் கண்டு செயல்பாடு கட்டுப்பாட்டில் உள்ளதா என்று கண்டுபிடி.

கூறுகள்	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
சராசரி	**11.2**	**11.8**	**10.8**	**11.6**	**11.0**	**9.6**	**10.4**	**9.6**	**10.6**	**10.0**
வீச்சு (R)	**7**	**4**	**8**	**5**	**7**	**4**	**8**	**4**	**7**	**9**

($n = 5$ எனில், $A_2 = 0.577$, $D_3 = 0$ $D_4 = 2.115$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

தீர்வு :

படத்தில் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள்

$$= \Sigma \overline{X}$$

$$= (11.2 + 11.8 + 10.8 + ...+ 10.0) = 10.66$$

$$\overline{R} = \Sigma R = \frac{1}{10}(63) = 6.3$$

$$U.C.L = \overline{\overline{X}} + A_2$$

$$= 10.66 + (0.577 \times 6.3) = 14.295$$

$$L.C.L. = - A_2$$

$$= 10.66 - (0.577 \times 6.3) = 7.025$$

CL = மத்திய கோடு = = 10.66

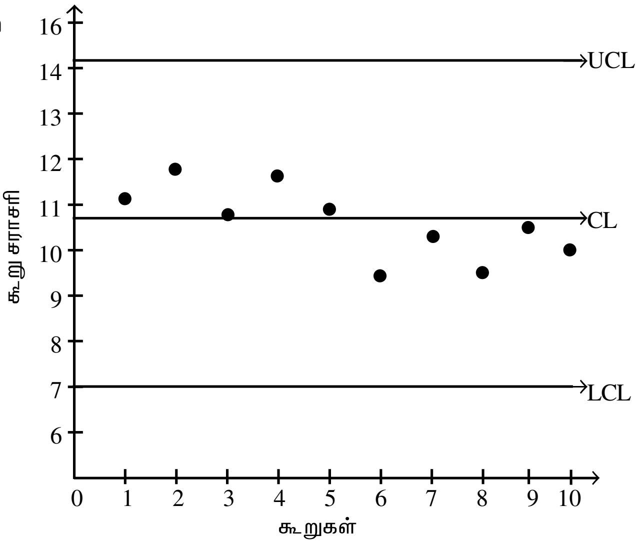
வீச்சு படம்

$$U.C.L. = D_4 = 2.115 \times 6.3 = 13.324$$

$$L.C.L. = D_3 = 0$$

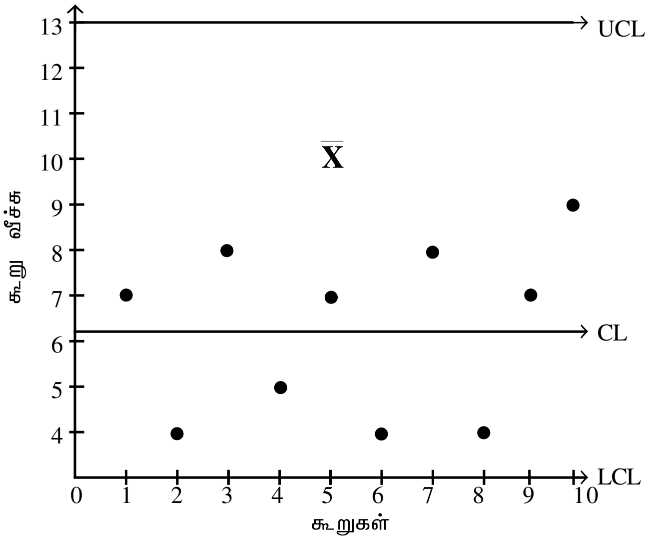
$$C.L. = = 6.3$$

படம்



(படம் 10.12)

R படம்



(படம் 10.13)

முடிவு :

கூறுகளின் சராசரிகள் மற்றும் வீச்சுகளின் அனைத்து புள்ளிகளும் தரக்கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளுக்குள்ளேயே இருப்பதால் செயல்பாடு கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது எனக் கூறலாம்.

பயிற்சி 10.5

1) பின்வருவன 5 பதிவுகளையுடைய 20 கூறுகளின் மற்றும் R மதிப்புகள் ஆகும். மற்றும் R படங்களை வரைந்து முடிவுகளைத் தருக.

கூறுகள்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	34	31.6	30.8	33	35	33.2	33	32.6	33.8	37.8
R	4	4	2	3	5	2	5	13	19	6
கூறுகள்	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	35.8	38.4	34	35	38.8	31.6	33	28.2	31.8	35.6
R	4	4	14	4	7	5	5	3	9	6

(n = 5 எனில், $A_2 = 0.58$, $D_3 = 0$ $D_4 = 2.12$)

2) பின்வருவனவற்றிற்கு மற்றும் R படங்கள் வரைந்து முடிவுகளைக் குறிப்பிடுக.

கூறுகள்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	140	138	139	143	142	136	142	143	141	142
	143	143	133	141	142	144	147	137	142	137
	137	143	147	137	145	143	137	145	147	145
	134	145	148	138	135	136	142	137	140	140
	135	146	139	140	$\overline{X}$36	137	138	138	140	132
கூறுகள்	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	137	137	142	137	144	140	137	137	142	136
	147	146	142	145	142	132	137	142	142	142
	142	142	139	144	143	144	142	142	143	140
	137	142	141	137	135	145	143	145	140	139
	135	140	142	140	144	141	141	143	135	137

(n = 5 எனில், $A_2 = 0.58$, $D_3 = 0$, $D_4 = 2.12$)

3) பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து மற்றும் R படங்கள் வரைந்து முடிவுகளைக் குறிப்பிடுக.

கூறுகள்	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	46	41	43	37	37	37	44	35	37
	40	42	40	40	40	38	39	39	44
	48	49	46	47	46	49	43	48	48

கூறுகள்	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	45	48	36	40	42	38	47	42	47
	43	44	42	39	40	40	44	45	42
	49	48	48	48	48	48	49	37	49

($n = 3$ எனில், $A_2 = 1.02$, $D_3 = 0$, $D_4 = 2.58$)

பயிற்சி 10.6

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செ-க

1) காலம்சார் தொடர் வரிசை என்கிற தொகுப்பு விவரங்கள் பதிவு செ–யப்படுவது
   (a) காலவரம்பிற்கேற்ப (b) சமகால இடைவெளியில்
   (c) தொடர்ச்சியான காலப் புள்ளிகளில் (d) மேற்கண்ட அனைத்தும்

2) காலம் சார் தொடர் வரிசையில் இருப்பது
   (a) இரண்டு கூறுகள் (b) மூன்று கூறுகள்
   (c) நான்கு கூறுகள் (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

3) நீண்டகால மாறுபாட்டுடன் தொடர்புடைய காலம்சார் தொடர் வரிசையின் ஒரு கூறு பின்வருமாறு அழைக்கப்படுகிறது
   (a) சுழற்சி மாறுபாடு (b) நீள்கால போக்கு
   (c) சீரற்ற மாறுபாடு (d) மேற்கண்டவை அனைத்தும்

4) குறுகிய கால ஏற்ற இறக்கங்களைக் கொண்ட காலம்சார் தொடர் வரிசையின் ஒரு கூறு என்பது
   (a) பருவகால மாறுபாடு (b) சுழற்சி மாறுபாடு
   (c) சீரற்ற மாறுபாடு (d) மேற்கண்டவை அனைத்தும்

5) காலம்சார் தொடர் வரிசையில் சுழற்சி மாறுபாடுகள் ஏற்படுவதற்கான காரணம்
   (a) ஒரு தொழிற்சாலையில் கதவடைப்பு
   (b) ஒரு நாட்டில் நடக்கும் போர்
   (c) ஒரு நாட்டில் ஏற்படும் வெள்ளம் (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

6) அபிவிருத்தி, பின்னிறக்கம், வீழ்ச்சி மற்றும் மீட்சி ஆகியவை குறிப்பாக இதனோடு தொடர்புடையது
   (a) சுழற்சி மாறுபாடு (b) பருவ மாறுபாடு
   (c) சுழற்சி அசைவுகள் (d) சீரற்ற மாறுபாடு

7) கூறுகள் T, S, C மற்றும் I இவற்றைக் கொண்ட கூட்டு வடிவமைப்பு
(a) Y = T + S + C − I (b) Y = T + S X C + I
(c) Y = T + S + C + I (d) Y = T + S + C X I

8) நவம்பர் முதல் மார்ச் வரையிலானகாலத்தில் ஐஸ் கிரீம் விற்பனை அளவின் வீழ்ச்சி இதனோடு தொடர்பு கொண்டதாகும்
(a) பருவ மாறுபாடு (b) சுழற்சி மாறுபாடு
(c) சீரற்ற மாறுபாடு (d) நீள்கால போக்கு

9) குறியீட்டு எண் என்பது
(a) ஒப்பீட்டு மாறுதல்களின் அளவை (b) சராசரியின் ஒரு சிறப்பு வகை
(c) விழுக்காட்டின் ஒப்பீடு (d) மேற்கண்டவை அனைத்தும்

10) குறியீட்டு எண்கள் விவரிக்கப்படுவது
(a) விழுக்காடுகளில் (b) விகிதங்களில்
(c) திசையிலா எண் மதிப்புகளில் (d) மேற்கண்டவை அனைத்தும்

11) பெரும்பான்மையாக பயன்படுத்தப்படும் குறியீட்டு எண்கள்
(a) பரவல் குறியீட்டு எண் (b) விலை குறியீட்டு எண்
(c) மதிப்பு குறியீட்டு எண் (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

12) அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படும் குறியீட்டு எண்களின் சூத்திரங்கள்
(a) நிறையிட்ட சூத்திரங்கள் (b) நிறையிடா சூத்திரங்கள்
(c) நிலையான எடையுடைய சூத்திரங்கள் (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

13) லாஸ்பியரின் குறியீட்டு எண்ணில் பயன்படுத்தப்படும் எடைகள்
(a) அடிப்படை ஆண்டின் அளவுகள் (b) நடப்பு ஆண்டின் அளவுகள்
(c) பல ஆண்டுகளின் அளவுகளின் சராசரி
(d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

14) பாசியின் குறியீட்டு எண்ணில் பயன்படும் எடைகள்
(a) அடிப்படை ஆண்டைச் சேர்ந்தவை
(b) கொடுக்கப்பட்ட ஆண்டைச் சேர்ந்தவை
(c) ஏதேனும் ஒரு ஆண்டைச் சேர்ந்தவை (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

15) ஒரு தொழிற்சாலையில் உற்பத்தி செ–யப்படும் பொருள்களின் மாறுபாடுகளுக்கு இவை காரணமாகும்
(a) தற்செயல் மாறுபாடுகள் (b) குறிப்பிட்ட மாறுபாடுகள்
(c) (a) மற்றும் (b) இரண்டும் (d) (a) மற்றும் (b) இல்லை

16) உற்பத்தி செ–யப்படும் பொருள்களில் காணப்படும் தற்செயல் காரணங்களால் ஏற்படும் மாறுபாடுகள்
(a) கட்டுபடுத்தக் கூடியன (b) கட்டுப்படுத்த முடியாதவை
(c) (a) மற்றும் (b) இரண்டும் (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

17) உற்பத்தி பொருள்களின் தர நியதிகளில் ஏற்படும் பெரும் மாறுபாடுகளுக்கு பொதுவான காரணம்

(a) சமவா–ப்பு செயல்பாடுகள் (b) குறிப்பிட்ட காரண விளைவுகள்
(c) கண்டுபிடிக்க முடியாத காரண விளைவுகள்
(d) மேற்கண்ட அனைத்தும்

18) உற்பத்தி பொருள்களில் குறிப்பிட்ட காரணங்களால் ஏற்படும் மாறுபாடுகளுக்கு காரணம்

(a) தவறான செயல்பாடு (b) இயக்குபவர்களின் அலட்சியத் தன்மை
(c) கச்சா பொருட்களின் தரக்குறைவு (d) மேற்கண்ட அனைத்தும்

19) தரக் கட்டுப்பாட்டு படங்கள்

(a) மூன்று கட்டுப்பாட்டுக் கோடுகளைக் கொண்டது
(b) மேல் மட்டும் கீழ் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளைக் கொண்டது
(c) செயல்பாட்டின் எல்லைகளைக் கொண்டது
(d) மேற்கண்ட அனைத்தும்

20) ஒட்டுறவுக் கெழுவின் எல்லைகள்

(a) 0 இல் இருந்து ∞ வரை (b) $-\infty$ இல் இருந்து ∞ வரை
(c) -1 இல் இருந்து 1 வரை (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

21) X மற்றும் Y என்பன இரு மாறிகளெனில் அதிக பட்சம் இருக்கக் கூடியது

(a) ஒரு தொடர்பு போக்குக் கோடு
(b) இரு தொடர்பு போக்குக் கோடுகள்
(c) மூன்று தொடர்பு போக்குக் $\bar{X}$ கோடுகள்
(d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

22) X இன் மீது Y இன் தொடர்பு போக்குக் கோட்டில் X என்பது

(a) சாரா மாறி (b) சார்புடைய மாறி
(c) (a) மற்றும் (b) (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

23) (X, Y) என்ற மாறிகளின் சிதறல் படம் குறிப்பது

(a) அவற்றின் சார்புத் தொடர்பு (b) தொடர்பு போக்கு வடிவமைப்பு
(c) பிழைகளின் பரவல் (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

24) தொடர்பு போக்குக் கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி

(a) (X, Y) (b) (,)
(c) (0, 0) (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

25) தொடர்பு போக்கு என்ற சொல்லை அறிமுகப்படுத்தியவர்

(a) R.A.பிஷர் (b) சர் ஃபிரான்சிஸ் கல்பான்
(c) கால் பியர்சன் (d) இவர்களில் எவரும் இல்லை

விடைகள்

வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

பயிற்சி 6.1

1) (i) 2 மற்றும் 1 (ii) 3 மற்றும் 1 (iii) 2 மற்றும் 2 (iv) 2 மற்றும் 1
(v) 2 மற்றும் 3 (vi) 2 மற்றும் 1 (vii) 2 மற்றும் 3 (viii) 2 மற்றும் 1
(ix) 2 மற்றும் 1 (x) 2 மற்றும் 2

2) (i) $x\frac{dy}{dx} - y = 0$ (ii) $y = x\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

(iii) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} + a = 0$ (iv) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

3) $x\frac{dy}{dx} + y = 0$ 4) $2xy\frac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0$

5) $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$ 6) $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

7) $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$ 8) $y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ 9) $y\frac{dy}{dx} + x = 0$

பயிற்சி 6.2

1) (i) $\sin^{-1}y + \sin^{-1}x = c$ (ii) $y - x = c(1 + xy)$

(iii) $y + 2 = c(x - 1)$ (iv) $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = c$

2) (i) $e^y - \frac{e^{2x}}{2} - \frac{x^4}{4} = c$ (ii) $\tan y = c\,(1-e^x)^3$

3) (i) $\log(y + a) = x^2 + c$ (ii) $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = c^2$

(iii) $-\frac{1}{y} - \log y - \frac{1}{x} + \log x = c$

4) (i) $\sin^{-1}xy + 4x = c$ (ii) $\frac{x}{y} + e^{x^3} = c$

5) (i) $\tan^{-1}(y + 2) = \tan^{-1}(x - 1) + c$

(ii) $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) = c$

6) $y = x^3 + 2x - 4$ 7) $y = x^2$ 8) $y(\sin^{-1}x) = \frac{\pi}{3}$

9) $x = c\,p^n$ 10) $x = c$

11) செலவுச் சார்பு $C = \frac{e^7}{3}(e^{3x} - 1)$

சராசரி செலவுச் சார்பு $= \frac{e^7}{3}\,\frac{e^{3x}-1}{x}$

பயிற்சி 6.3

1) (i) $\frac{x}{y} = \log x + c$ (ii) $\frac{y+x}{y} = c$

(iii) $\frac{x}{y} + 3\log\frac{y}{x} + \log x = c$

(iv) $\frac{y}{x} - \log y = c$ (v) $\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x} - 1\right)x^3 = c$

(vi) $\log y + \frac{x^2}{2y^2} = c$ (vii) $\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \log x + c$

(viii) $y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$ 2) $c^2 = q^2 + 6q$

3) $y^2 = 12x^2 - \frac{128}{x^2}$

பயிற்சி 6.4

1) (i) $y\sin x = x + c$ (ii) $y\operatorname{cosec} x = 2\sin x + c$

(iii) $y\sin x =$ $+ c$ (iv) $y\sin x = 2x^2 - \frac{\pi^2}{2}$

(v) $y = -2\sin^2 x + 4\sin^3 x$ (vi) $\frac{y}{x^3} = \frac{-1}{x} + c$

(vii) $y(1 + x^2) = \tan^{-1}x -$ (viii) $y\cos x = e^x + c$

(ix) $y \log x = -\qquad + c$ 2) Rs.13,720

3) $\dfrac{C}{x^{b-1}} - \qquad = \dfrac{a}{x^b} - \dfrac{a}{x_0^{\,b}}$ 4) $cq = \dfrac{a}{2}(q^2 - q_0^{\,2}) + c_0\, q_0$

பயிற்சி 6.5

1) (i) $y = Ae^{4x} + Be^{6x}$ (ii) $y = A + Be^{-x}$

(iii) $y = A\cos 2x + B\sin 2x$ (iv) $y = (Ax + B)e^{-2x}$

2) (i) $y = A\,e^{\frac{2}{3}x} + Be^{-3x}$ (ii) $y = (Ax + B)\ e^{\frac{3}{2}x}$

(iii) $y = e^{\frac{1}{6}x}\left(A\cos\dfrac{\sqrt{11}}{6}\,x + B\sin\dfrac{\sqrt{11}}{6}\,x\right)$

3) (i) $y = Ae^{12x} + Be^{x} + \dfrac{1}{42}e^{-2x} - \dfrac{5}{11}xe^{x}$

(ii) $y = Ae^{2x} + Be^{3x} + \dfrac{e^{-x}}{12} + \dfrac{3}{20}e^{-2x}$

(iii) $y = (Ax + B)e^{7x} + \dfrac{3}{49} + \dfrac{x^2}{2}e^{7x}$

(iv) $y = A\,e^{\frac{-x}{5}} + e^{\frac{x}{3}}\left(B + \dfrac{x}{8}\right)\ \cos 2x$ $\dfrac{C_0}{x_0^{\,b-1}}$ 2

4) $P = Ae^{-4t} + Be^{2t} + 3$

பயிற்சி 6.6

1) a   2) c   3) b   4) b   5) c   6) a   7) c   8) a

9) b   10) c   11) a   12) c   13) c   14) a   15) d   16) a

17) c   18) a   19) b   20) c

இடைச்செருகல் மற்றும் நேர்க்கோடு பொருத்துதல்

பயிற்சி 7.1

1) 33   2) 41 இலட்சங்கள்   3) 7   4) 18   5) 384 டன்கள்

6) 56.8672   7) 12.7696   8) 147411.91   9) 7237.87

10) 262.75   11) 124.1568   12) 478.625   13) 19   14) 32.93

பயிற்சி 7.2

3) $y = x + 6.66$

4) 4 ; -3 5) $y = 0.38\,x + 1.63$ 6) $y = 1.19\,x + 0.65$

7) $y = 0.0041x + 0.048$ 8) $y = 1.33x + 0.72$; $y = 5.375$

9) $y = 1.125x + 38$ 10) $y = 1.48x + 1.26$

11) $y = 3.14x + 27.34$; $y = 81$ (தோராயமாக)

பயிற்சி 7.3

1) c 2) b 3) a 4) b 5) c

6) a 7) c 8) c 9) b 10) c

நிகழ்தகவு பரவல்கள்

பயிற்சி 8.1

1) (ii) மற்றும் (iii) 2) ஆம் 3) (i) $\frac{1}{81}$; (ii) $\frac{9}{81}$, $\frac{65}{81}$, $\frac{24}{81}$

4) (i) ஆம் (ii) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{3}, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$

5) 1 6) (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{3}{4}$

7) (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{7}{16}, & 0 \le x < 2 \\ \frac{11}{16}, & 0 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$

8) $k = 0.003$; (i) 0.00012 ; (ii) 0.027 9) 1

10) (i) $\frac{1}{2}$; (ii) $\frac{1}{2}$ 11) 2000

12) (i) 0.3935 (ii) 0.1481 (iii) 0.2231

பயிற்சி 8.2

1) 2.50 2) 7 3) 1.25 4) 3.4 5) -6.5, 6

6) 4 ; 4 ; 2 7) 2 ; $\frac{1}{4}$

பயிற்சி 8.3

1) $\frac{176}{1024}$ 2) 0.2 3) $n = 9,\ p = \frac{2}{3},\ q = \frac{1}{3}$ 4) 0.544320

5) 0.345 6) 0.762 7) 0.264 8) 0.0008

9) (i) 0.04979 (ii) 0.14937 10) 0.4060

பயிற்சி 8.4

1) (i) 0.0035 (ii) 0.9582

2) (i) 0.0581 (ii) 0.1519

3) 0.1587 4) 0 5) 125 6) (i) 123 (ii) 341

7) 66.01 8) $\mu = 50,\ \sigma = 10$ 9) $\mu = 50.09,\ \sigma = 19.4$

பயிற்சி 8.5

1) b 2) a 3)c 4) a 5) c 6) b 7) b
8) b 9) c 10) a 11) b 12) c 13) b 14) c 15) c

கூறெடுப்பு உத்திகள் மற்றும் புள்ளியியல் உ-த்துணர்தல்

பயிற்சி 9.2

1) (a) 9.0 (b) 4.47 (c) 9.0 (d) 3.06

2) (a) 9.0 (b) 4.47 (c) 9.0 (d) 2.58

3) (a) 22.4 கி.கி. ; 0.008 கி.கி. (b) 22.4 கி.கி. ; 0.0079 கி.கி.

4) 0.0122

பயிற்சி 9.3

1) (a) 6.35 மிமீ. ; (b) 0.00055 மிமீ^{2}

2) (0.818, 0.829) ; (b) (0.816, 0.832)

3) சராசரி இலாபம் 72.6 இலட்சத்திற்கும் மற்றும் 77.4 இலட்சத்திற்கும் இடையில் இருக்கும்

4) சராசரி மதிப்பெண்கள் 72.6 க்கும் மற்றம் 77.4 க்கும் இடையில் இருக்கும்.

5) குறைபாடுள்ள பொருள்களின் எண்ணிக்கை 1230 க்கும் மற்றும் 2270 க்கும் இடையில் இருக்கும்.

6) (a) 45% மற்றும் 65% ; (b) 42% மற்றும் 68%

பயிற்சி 9.4

1) H_0 : குறிப்பிடப்பிட்ட முழுமைத் தொகுதியில் இருந்து எடுக்கப்பட்ட கூறு ; $|Z| = 2.67$: H_0 ஆனது நிராகரிக்கப்பட்டது.

2) H_0 : குறிப்பிடப்பிட்ட முழுமைத் தொகுதியில் இருந்து எடுக்கப்பட்ட கூறு, 5% மட்டத்தில், $|Z| = 2.2$; H_0 ஆனது நிராகரிக்கப்பட்டது

   1% மட்டத்தில், $|Z| = 2.2$; H_0 ஆனது ஏற்கப்பட்டது

3) $H_0 : \mu = 10$, $|Z| = 5.91$; H_0 ஆனது 5% மட்டத்தில் நிராகரிக்கப்பட்டது.

4) $H_0 : P = 0.60$, $|Z| = 5.9$; H_0 ஆனது 1% மட்டத்தில் நிராகரிக்கப்பட்டது.

பயிற்சி 9.5

1) c 2) c 3) b 4) c 5) a 6) c 7) c

பயன்பாட்டுப் புள்ளியியல்

பயிற்சி 10.1

1) $60x_1 + 120x_2 \leq 12000$,
   $8x_1 + 5x_2 \leq 600$,
   $3x_1 + 4x_2 \leq 500$,
   $x_1, x_2 \geq 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க
   $Z = 30x_1 + 40x_2$ ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க.

2) $x_1 + x_2 \leq 450$,
$2x_1 + x_2 \leq 600$,
$x_1, \ x_2 \geq 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க
$Z = 3x_1 + 4x_2$ ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க.

3) $x_1 = 24, x_2 = 14, \ Z = 2200$

4) $x_1 = 2.5, \ \ x_2 = 35, \ Z = 147.5$

5) $x_1 = 1, x_2 = 5, \ Z = 13$.

பயிற்சி 10.2

1) 0.9485 2) 0.2555 3) 0.7689 4) -0.9673

5) 0.3566 6) $y = -0.65x + 11.90$; $x = -1.30y + 16.40$

7) $x = y + 6, \ x = 26$

8) $y = 0.5932x + 38.79$; $x = 0.7954y + 13.34$

9) $y = 0.25x + 24.75$; $x = 0.2683y + 27.88$

பயிற்சி 10.3

3) 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160.

4) 42.31, 40.94, 39.56, 38.19, 36.81, 35.44, 34.06, 32.69.

5) –, 22, 23.33, 24, 23.67, 23.67, 24.33, 26, 26.33, –.

6) –, 87.33, 88.33, 89.67, 92, 95, –.

7) –, –, 495.75, 503.63, 511.63, 529.50, 553, 572.50, –, –.

8) –, –, 648.125, 661.500, 674.625, 687.875, 696.375, 715.250, 735.750, –, –.

9) $y_t = 89 + 2(x - 1992)$; 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95.

10) $y_t = 55 - 2.65(x - 1996)$; 65.60, 62.95, 60.30, 57.65, 55, 52.35, 49.70, 47.05, 44.40, 39.10.

11) $y_t = 15 + 1.83(x - 1986.5)$;
10.43, 12.26, 14.09, 15.92, 17.75, 19.58.

12) $y_t = 44 - 1.0714\left(\frac{x-1995.5}{.5}\right)$; 51.497, 49.355, 47.213,

45.071, 42.929, 40.787, 38.645, 36.503.

13) 105.10, 95.68, 99.35, 99.87

14) 98.4, 92.2, 108.9, 100.5   15) 98.4, 92.14, 108.9, 100.52

பயிற்சி 10.4

1) 136.54, 135.92, 136.23   2) 125, 126.21, 125.6

3) 125, 126.21, 125.6   4) 114.74, 112.73, 113.73

5) 139.79   6) 124.34   7) 119.09   8) 135.90

9) 124.41   10) 98.91

பயிற்சி 10.5

1) $\bar{\bar{X}} = 33.6$, $= 6.2$

படம் : UCL = 37.446, LCL = 30.254

படம் : UCL = 0, LCL = 13.14

2) $= 140.5$, $= 8.6$

படம் : UCL = 145.564, LCL = 135.356

படம் : UCL = 18.656, LCL = 0

3) $= 43.1472$, $= 8.39$

படம் : UCL = 51.7078, LCL = 34.59

படம் : UCL = 21.6462, LCL = 0

பயிற்சி 10.6

1) d 2) c 3) b 4) d 5) d 6)c 7) c 8) a

9) d 10) a 11) d 12) a 13) a 14) b 15) c 16) d

17) b 18) d 19) a 20) c 21) b 22) a 23) a 24) b 25) b

திட்ட இயல்நிலைப் பரவல்

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.49865	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.49903	.4990	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993129	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995166	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4996631	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998	.4998
3.5	.4997674	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998409	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4998922	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999277	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.5000	.5000	.5000
3.9	.4999519	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000