# புள்ளியியல்

**மேல்நிலை - இரண்டாம் ஆண்டு**

தீண்டாமை ஒரு பாவச்செயல்
தீண்டாமை ஒரு பெருங்குற்றம்
தீண்டாமை மனிதத்தன்மையற்ற செயல்

தமிழ்நாட்டுப்
பாடநூல் கழகம்
கல்லூரிச் சாலை, சென்னை- 600 006.

முதற் பதிப்பு -2005
மறு பதிப்பு - 2006

**குழுத்தலைவர்**

**முனைவர் ஜெ. ஜோதிகுமார்**
இணைப் பேராசிரியர்
புள்ளியியல் துறை
மாநிலக் கல்லூரி
சென்னை - 600 005

**மேலாய்வாளர்கள் மற்றும் நூலாசிரியர்கள்**

**திரு கி. நாகபூஷணம்**
தேர்வுநிலை விரிவுரையாளர்
புள்ளியியல் துறை
மாநிலக் கல்லூரி
சென்னை - 600 005

**முனைவர் இரா. இராவணன்**
இணைப் பேராசிரியர்
புள்ளியியல் துறை
மாநிலக் கல்லூரி
சென்னை - 600 005

**நூலாசிரியர்கள்**

**திரு கோ. ஞான சுந்தரம்**
முதுகலை ஆசிரியர்
எஸ்.எஸ்.வி.மேனிலைப்பள்ளி
பூங்கா நகர், சென்னை - 600 003

**திருமதி என். சுசீலா**
முதுகலை ஆசிரியை
அண்ணா ஆதர்ஷ் மெ.மே.நி.பள்ளி
அண்ணாநகர், சென்னை - 600 040

**திருமதி சா. எழிலரசி**
முதுகலை ஆசிரியை
பெ.கா.அரசினர் மகளிர்
மேல்நிலைப்பள்ளி
அம்பத்தூர், சென்னை - 600 053

**திரு ஆ.ச. சேகர்**
முதுகலை ஆசிரியா
ஒ.இரா.கோ.நா.அரசு ஆண்கள்
மேல்நிலைப் பள்ளி
செங்குன்றம், சென்னை - 600 052

**விலை: ரூ.**

பாடங்கள் தயாரிப்பு:
தமிழ்நாடு அரசுக்காக பள்ளிக்கல்வி இயக்ககம், தமிழ்நாடு.

இந்நூல் 60 ஜி.எஸ்.எம். தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர்:

# முன்னுரை

இரண்டாம் ஆண்டு மேல்நிலைப்பள்ளி மாணவர்களுக்கான புள்ளியியல் பாட நூலை வழங்குவதில் நாங்கள் பெருமகிழ்வு அடைகிறோம்.

இந்நூல் திருத்தப்பட்ட புதிய பாடத்திட்டத்திற்கு ஏற்ப எழுதப்பட்டுள்ளது. இது பண்புசார் கோட்பாடுகள், தீர்மானக் கோட்பாடுகள் என்னும் இரண்டு புதிய அத்தியாயங்களோடு மொத்தம் பத்து அத்தியாயங்களைப் பெற்று அனைத்தும் தன்னகத்தே இருக்கும் வகையில் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் புதிய பாடங்களைத் தவிர மற்ற பாடங்களும் இருக்கும் படியாக முழுமையாக திரும்பவும் எழுதப்பட்டுள்ளன.

இந்நூல் புள்ளியியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள், செயல்முறைகள், பயன்பாட்டுக் கருத்துக்கள் ஆகியவை தெளிவாகவும், பூரணமாகவும் தரப்பட்டுள்ளன. மேலும் ஒவ்வொரு அத்தியாயத்திலும், புள்ளியியல் கருத்துக்கள் பொருத்தமான எடுத்துக்காட்டுகளுடன் படிப்படியான முறையில் விளக்கப்பட்டுள்ளன. மாணவர்களின் தன்னம்பிக்கையை வளர்க்கும் விதத்திலும், அவர்களின் முன்னேற்றத்தைச் சோதனை செய்யும் விதத்திலும் இருக்கும்படியாகத் தாம் கற்றவற்றை மீண்டும் பயன்படுத்துவதற்கும் வாய்ப்பளிக்கும் வகையில், ஒவ்வொரு அத்தியாயமும் தகுந்த பயிற்சி வினாக்களுடன் நிறைவு பெறுகிறது.

இந்நூல் தொழில் துறை சார்ந்த படிப்புகளான C.A, I.C.W.A போன்ற மேல்படிப்பை மேற்கொள்ளும் மாணவர்களும் பயன்படுத்தும் வகையில் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. இப்பாடநூல் இறுதியில் மாணவர்களின் வசதிக்காக, தேவையான புள்ளியியல் அட்டவணைகள் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

மாணவர்கள், ஆசிரியர்கள், கல்வியாளர்கள் அனைவரிடம் இருந்தும் இந்நூலை மேன்மேலும் சிறப்புள்ளதாகச் செய்வதற்காக, மேலான ஆலோசனைகளை எப்பொழுதும் வரவேற்கிறோம்.

இந்நூலின் உருவாக்கத்திற்காக உதவிக்கரம் ஈந்த அனை வருக்கும் எங்கள் மனமார்ந்த நன்றிகள் உரித்தாகுக.

**முனைவர். ஜெ. ஜோதிகுமார்**
**மற்றும்**
**பாடநூல் குழுவினர்**

## பொருளடக்கம்

# 1. நிகழ்தகவு

## 1.0 அறிமுகம்:

ஆரம்பகாலத்தில் நிகழ்தகவுக் கொள்கை சூதாட்ட விளையாட்டுகளைச் சார்ந்த கணக்குகளில் பயன்பட்டிருக்கிறது. அதாவது நாணயங்களைச் சுண்டுதல், பகடை எறிதல், சீட்டுக்கட்டிலிருந்து சீட்டுகளை எடுத்தல் போன்றவற்றில் நிகழ்தகவுக்கொள்கைகளைப் பயன்படுத்தியுள்ளனர். ஜெரான் கார்டன் **(Jerane Cardon)** என்ற இத்தாலிய கணிதவியலார் எழுதிய 'விளையாட்டுகளில் வாய்ப்புகள்' என்ற நூல் முதன்முதலாக 1663 இல் வெளியிடப்பட்டது. நிகழ்தகவு என்பது முதலில் விளையாட்டுகளில் உள்ள வெற்றிவாய்ப்புகளைக் கண்டறிவதில் ஆரம்பித்து இப்போது புள்ளியியல் கணிப்புகளின் அடிப்படைக் கருவிகளுள் ஒன்றாக விளங்கி வருகிறது. தற்போதுள்ள பல புள்ளியியல் நடைமுறைகள், மாதிரிகளைக் கொண்டே முடிவெடுக்க வேண்டியுள்ளதால், அம்முடிவுகளை ஆராய்வதற்கு நிகழ்தகவுக் கொள்கைகளைப் பற்றிய கூர்ந்த அறிவு தேவைப்படுகிறது.

நிகழ்தகவுக் கொள்கையானது சமூக, பொருளாதார, வணிக மற்றும் பிற துறைகளிலுள்ள சிக்கல்களைத் தீர்க்கப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இப்போது நிகழ்தகவுக் கருத்தானது மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகவும் மேலும் கணிதம் சார்ந்த நிகழ்தகவுக் கருத்துக்கள், சமூகவியலிலும் முடிவெடுக்கும் திறன்சார்ந்த ஆய்வுகளிலும் அடிப்படையாக விளங்கிவருகிறது. குறிப்பிட்டுக் கூறவேண்டுமாயின் நிகழ்தகவுக் கொள்கையே, புள்ளியியல் முடிவெடுத்தல்களில் அடிப்படையாக விளங்குகிறது எனலாம்.

### 1.1 வரையறைகளும் அடிப்படை விளக்கங்களும்:

நிகழ்தகவுக் கொள்கையில் பல வரையறைகளும், பல சொல் விளக்கங்களும் பயன் படுத்தப்படுகின்றன. அவற்றை இங்குக் காண்போம்.

**சமவாய்ப்புச் சோதனை அல்லது ராண்டம் சோதனை(Random experiment ):**

ஒரு சோதனையின் முடிவு, வாய்ப்பின் அடிப்படையில் அமைந்து, அம்முடிவை முன்பாகவே கூற முடியாததாயின் அச்சோதனையை சமவாய்ப்புச் சோதனை அல்லது ராண்டம் சோதனை என்கிறோம்.

நாணயங்களைச் சுண்டுதல், பகடைவீசுதல் போன்றவை சமவாய்ப்புச் சோதனைக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

**முயற்சி (Trial):**

சமவாய்ப்புச் சோதனை செய்தலை 'முயற்சி' என்கிறோம்.

**விளைவுகள் (Outcomes ):**

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் முடிவுகள் அதன் 'விளைவுகள்' எனப்படும்.

**நிகழ்ச்சி (Event ):**

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் ஒரு விளைவு அல்லது பலவிளைவுகளின் தொகுப்பு ' நிகழ்ச்சி ' எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டுவது என்பது ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனை. அதில் தலைவிழுதல் அல்லது பூ விழுதல் என்பது ஒரு நிகழ்ச்சி ஆகும்.

**கூறுவெளி (Sample space ):**

ஒரு சோதனையில் கருதக்கூடிய முடிவுகள் ஒவ்வொன்றும் 'கூறுபுள்ளிகள்' (sample points) எனப்படும். எல்லா கூறு புள்ளிகளையும் கொண்ட அனைத்துக்கணம் 'கூறுவெளி' எனப்படும். அது S என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது கிடைக்கும் கூறுவெளியானது $S = \{H,T\}$ என்ற கணம். அதில் H,T என்பவை கூறுபுள்ளிகளாகும்.

**சரிசமவாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சிகள் (Equally likely events):**

இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் தனித்தனியே நிகழ்வதற்கான வாய்ப்புகள் சரிசமமாக இருக்குமாயின் அவை சரிசமவாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சிகளாகும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்பொழுது தலை விழுவதும் பூவிழுவதும் சரிசமவாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சிகளாகும்.

**ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (Mutually exclusive events):**

இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாயின், அவற்றில் ஏதேனும்

ஒன்று நடக்கும் சமயத்தில் வேறு எந்த நிகழ்ச்சியும் நடைபெற இயலாது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது தலை அல்லது பூ மட்டுமே விழும். எனவே தலை விழும் நிகழ்ச்சியானது பூ விழும் நிகழ்ச்சியை முற்றிலும் விலக்குகிறது. எனவே இவ்விரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

### பூரணமான நிகழ்ச்சிகள் (Exhaustive events):

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் பெறப்படும் எல்லா விளைவுகளையும் பெற்றிருக்கும் நிகழ்ச்சிகளைப் பூரணமான நிகழ்ச்சிகள் என்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பகடையை வீசும்போது கிடைக்கும் எல்லா விளைவுகளும் {1, 2, 3, 4, 5, 6 } பூரணமான நிகழ்ச்சிகளாகும். இப்பூரண நிகழ்ச்சியில் கிடைக்கும் கூறுபுள்ளிகளின் எண்ணிக்கை 6 ஆகும்.

### எதிர்மறை நிகழ்ச்சிகள் (Complementary events ):

'A நிகழ்கிறது' எனும் நிகழ்ச்சியும் 'A நிகழாது' எனும் நிகழ்ச்சியும் எதிர்மறை நிகழ்ச்சிகள் அல்லது நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன. 'A நிகழாது' என்ற நிகழ்ச்சியை A அல்லது $\bar{A}$ அல்லது $A^c$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம். ஒரு நிகழ்ச்சியும் அதன் எதிர்மறை நிகழ்ச்சியும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக ஒரு பகடையை வீசும்போது ஒற்றை எண்களைப்பெறும் நிகழ்ச்சி { 1, 3, 5 }ஆகும். இரட்டை எண்களைப்பெறும் நிகழ்ச்சி { 2, 4, 6 } ஆகும். இவை இரண்டும் எதிர்மறை நிகழ்ச்சிகளாகும்.

### சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் (Independent events ):

ஒரு நிகழ்ச்சியின் தோற்றம், மற்ற நிகழ்ச்சிகளின் தோற்றத்தைப் பாதிக்காமலிருக்குமானால், அந்நிகழ்ச்சிகள் அனைத்தும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக. ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும் பொழுது முதல்முறை 'தலை' விழுவதானது, இரண்டாம் முறை மற்றும் மூன்றாம் முறை ' தலை' விழுவது முதல் விளைவைச் சார்ந்திராது.

## 1.2 நிகழ்தகவின் வரையறைகள் :

நிகழ்தகவு இருவகைப்படும். அவை கணித நிகழ்தகவு (Mathematical probability) மற்றும் புள்ளியியல் நிகழ்தகவு (Statistical probability) என்பதாகும்.



### 1.2.1 கணித நிகழ்தகவு :

ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கு முன்னரே, அதாவது அந்நிகழ்ச்சியைக் காண்பதற்கான சோதனை நடத்துவதற்கு முன்பே, அதன் நிகழ்தகவினைக் காண இயலுமாயின் அந்நிகழ்தகவு கணித நிகழ்தகவு எனப்படும். ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையானது சரிசமவாய்ப்புள்ளதும், ஒன்றையொன்று விலக்கக்கூடியதுமான 'n' பூரணமுடிவுகளைக் கொண்டுள்ளது என்க. இதில் ' m' முடிவுகள் A என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்குச் சாதகமான முடிவுகள் எனில், ***m/n*** என்ற விகிதம் A என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு எனப்படும். அதை P (A) எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$= \frac{\text{A என்ற நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}$$

**கணித நிகழ்தகவினை ஒரு முந்தைய நிகழ்தகவு (a priori probability)** என்றும் கூறுவர். ஏனெனில் நாணயங்களைச் சுண்டுதல், பகடைவீசுதல் போன்ற எடுத்துக்காட்டுகளில் அச்சோதனைகளைச் செய்வதற்கு முன்பாகவே அவற்றின் நிகழ்தகவினைக் கூற இயலும்.

மேற்கூறிய நிகழ்தகவின் வரையறை அதிகம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இருப்பினும் சில சமயங்களில் அவ்வரையறையை கீழ்க்கண்ட காரணங்களால் பயன்படுத்த இயலாது.

1. ஒரு சோதனையின் எல்லா விளைவுகளையும் காண இயலாத போது.
2. கூறுபுள்ளிகள் அல்லது விளைவுகள் ஒன்றுக்கொன்று சார்ந்திருக்கும் போது
3. மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை எண்ணிலடங்காமல் இருக்கும்போது
4. ஒவ்வொரு விளைவும் சரிசமவாய்ப்பைப் பெற்றிராதிருக்கும் போது

கணித நிகழ்தகவில் காணப்படும் சில குறைபாடுகள் பின்வரும் வரையறையில் நீக்கப்படுகின்றன.

### 1.2.2. புள்ளியியல் நிகழ்தகவு:

ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவானது அது நடந்தபின்னரே கூறமுடியும் எனில் அந்நிகழ்தகவு புள்ளியியல் நிகழ்தகவு எனப்படும்.

ஒரு சோதனையை n முறைசெய்யும் போது, A என்ற நிகழ்ச்சியானது m முறை நடைபெறுகிறது எனில் அதன் சார்பு நிகழ்வெண் m/n ஆகும். n இன் மதிப்பு மிக அதிகமாகும்போது, இதன் எல்லை மதிப்பு ஓர் எண்ணைக் குறிக்கும். இவ்வெண் நிகழ்ச்சி 'A' இன் நிகழ்தகவு ஆகும்.

$$\text{இது } P(A) = \lim_{n\to\infty} (m/n)$$

எனக்குறிப்பிடப்படும்.

இவ்வரையறை நீண்ட கால சோதனையைக் கருத்திற்கொண்டு உருவாக்கப்பட்டதாகும். இவ்வரையறைக்குக் காரணமானவர் வான்மைஸஸ் (Von Mises) என்ற கணிதவியலார் ஆவார்.

ஒரு நாணயம் 10 முறை சுண்டப்பட்டால், நாம்பெறுவது 6 தலை, 4 பூ அல்லது 4 தலை, 6 பூ அல்லது வேறு எந்த முடிவும் நமக்குக் கிடைக்கலாம். இச்சோதனை முடிவுகளில் தலைவிழுவதற்கான நிகழ்தகவு சரியாக 0.5 என்று கூறமுடிவதில்லை. ஆனால் கணித நிகழ்தகவின்படி தலைவிழுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.5 என்று கூறுகிறோம்.

எனினும் இச்சோதனையை மிக அதிக எண்ணிக்கையில் செய்து பார்க்கும்போது, சோதனையின் முடிவுகளில் தலைவிழுவதும் பூவிழுவதும் ஏறத்தாழ சமஎண்ணிக்கையில் அமையும் என்று எதிர்பார்க்கலாம். அப்போதுதான் அதன் நிகழ்தகவு 0.5 என்பதை நெருங்குகிறது என்கிறோம். இவ்வாறு சோதனைகள் நிகழ்த்தியபின் கணக்கிடும் புள்ளியியல் நிகழ்தகவை ஒரு பிந்தைய நிகழ்தகவு (a posteriori probability) என்றும் கூறுவர்.

### 1.2.3. நிகழ்தகவைக் கோட்பாடுகள் மூலம் அணுகுதல் :

நிகழ்தகவைக் கோட்பாடுகள் மூலம் அனுகும் முறை நவீன முறையாகும். இம்முறை முழுவதும் கணங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டதாகும். இது கோல்மோகோரவ் (Kolmogorov) என்ற ரஷ்ய கணிதவியலாளரால் 1933 ஆம் ஆண்டு அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது.

**நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகள் (Axioms of probability ):**

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் A என்ற நிகழ்ச்சி S இல் உள்ளது என்க. P (A ) என்பது நிகழ்தகவானால் அது பின்வரும் மூன்று கோட்பாடுகளை நிறைவு செய்யும். அவை

1. எந்த ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவும் 0 முதல் 1 முடிய உள்ள எண்களுக்கு இடையே அமையும். அதாவது $0 \leq P(A) \leq 1$



2. மொத்த கூறுவெளியின் நிகழ்தகவு 1 ஆகும் அதாவது $P(S) = 1$

3. $A_1, A_2$ ……… என்பவை S இல் உள்ள ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளானால் $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$

**கணக்குறியீட்டில் நிகழ்தகவு சொற்றொடர்கள் :**

$S \Rightarrow$ கூறுவெளி

$\bar{A} \Rightarrow$ A நிகழாது இருத்தல்

$A \cup \bar{A} \Rightarrow S$

$A \cap B = \phi \Rightarrow$ A,B இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்குவன

$A \cup B \Rightarrow$ A நிகழ்தல் அல்லது B நிகழ்தல் அல்லது A,B, இரண்டும் நிகழ்தல் ( A,B, இவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்றாவது நிகழ்தல் )

$A \cap B \Rightarrow$ நிகழ்ச்சிகள் A,B இரண்டும் நிகழ்தல்

$\bar{A} \cap \bar{B} \Rightarrow$ நிகழ்ச்சிகள் A,B இரண்டும் நிகழாது இருத்தல்

$A \cap \bar{B} \Rightarrow$ A நிகழ்தல், B நிகழாது இருத்தல்

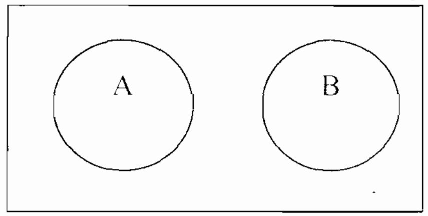
$\bar{A} \cap B \Rightarrow$ A நிகழாது இருத்தல், B நிகழ்தல்

### 1. 3 நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றங்கள் :

ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளுக்கும், ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகளுக்குமான நிகழ்தகவுகளின் கூட்டல் தேற்றங்களை இங்கு காண்போம்.

### 1.3.1 ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளுக்கான கூட்டல் தேற்றம்:

A மற்றும் B என்பவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில் 'A அல்லது B' என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவானது A மற்றும் B ஆகிய நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுதல் பலனுக்குச் சமமாகும். அதாவது $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. இது நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகளில் தெளிவாகக் கூறப்பட்டுள்ளது.



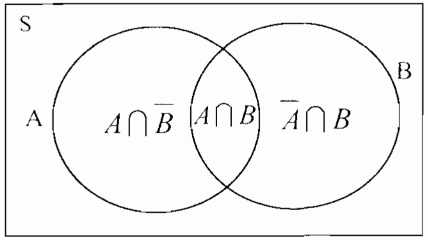
### 1.3.2 ஒன்றையொன்று விலக்காத நிகழ்ச்சிகளுக்கான கூட்டல் தேற்றம்:

A மற்றும் B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகள் எனில் அவைகளில் ஏதேனும் ஒன்றாவது அதாவது A அல்லது B, அல்லது A, B இரண்டும் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ஆகும்.

**நிரூபணம் :**

N கூறுபுள்ளிகளுடைய கூறுவெளி S ஐக் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையை எடுத்துக்கொள்வோம்.
நிகழ்தகவின் வரையறையின்படி,

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A \cup B)}{N}$$




படத்தில், ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவின் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்திப் பின்வருமாறு எழுதுகிறோம்.

$$P(A \cup B) = \frac{n(A) + n(\bar{A} \cap B)}{N}$$

$n(A \cap B)$ ஐ தொகுதியில் கூட்டிக் கழிக்க கிடைப்பது,

$$= \frac{n(A) + n(\bar{A} \cap B) + n(A \cap B) - n(A \cap B)}{N}$$

$$= \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{N}$$

$$= \frac{n(A)}{N} + \frac{n(B)}{N} - \frac{n(A \cap B)}{N}$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \quad B)$



**குறிப்பு :** A, B மற்றும் C என்ற ஏதேனும் மூன்று நிகழ்ச்சிகளுக்கு,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

### கூட்டு நிகழ்ச்சிகள் (Compound events):

இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் இணைந்து ஒரே நேரத்தில் நிகழுமானால் அவை கூட்டு நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, இருநாணயங்களை ஒரே நேரத்தில் சுண்டும் போது 'குறைந்தபட்சம் ஒரு தலை' வருவது ஒரு கூட்டு நிகழ்வாகும். ஏனெனில் இதில் இரண்டு சாதாரண நிகழ்வுகள் உள்ளன.

நிகழ்ச்சி A : ஒரு தலை வருதல் அதாவது A = { HT, TH } மேலும்

நிகழ்ச்சி B : இரு தலை வருதல் அதாவது B = { HH }

குறைந்தபட்சம் ஒரு தலை வருதல் : { HT, TH, HH }

அதேபோல், ஒரு பையில் 6 வெள்ளை மற்றும் 6 சிவப்பு பந்துகள் இருக்கின்றன. அப்பையிலிருந்து 2 பந்துகள் எடுக்கப்படுகிறது. அவை இரண்டும் வெள்ளையாக இருக்க உள்ள நிகழ்ச்சியும் ஒன்று வெள்ளை மற்றும் ஒன்று சிவப்பாக உள்ள நிகழ்ச்சியும் கூட்டு நிகழ்ச்சிகளாகும். கூட்டு நிகழ்ச்சிகள், சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள் என்றும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் என்றும் பகுக்கப்படுகின்றன.

### சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் :

ஒரு நிகழ்ச்சியின் தோற்றம், மற்ற நிகழ்ச்சிகளின் தோற்றத்தைப் பாதிக்காமல் இருக்குமானால், அந்நிகழ்ச்சிகள் அனைத்தும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நாணயத்தை இருமுறை சுண்டும்பொழுது, முதல்முறை விழும் முடிவை, இரண்டாம் முறை விழும் முடிவு எந்த விதத்திலும் பாதிக்காது.

ஒரு பையில் 5 வெள்ளை மற்றும் 7 சிவப்புப் பந்துகள் உள்ளன. இரு பந்துகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக எடுக்கப்படுகின்றன. அவ்வாறு எடுக்கும்போது முதல்பந்தை எடுத்தபின் அப்பந்து மீண்டும் அப்பையிலேயே வைக்கப்படுகிறது. இச் சூழலில் 'முதல் பந்து வெள்ளை' மற்றும் 'இரண்டாவது பந்து சிவப்பு' என்ற நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகும். ஏனெனில் இரண்டாவது பந்து எடுப்பதற்கு முன் அப்பையிலுள்ள பந்துகளின் எண்ணிக்கையில் எந்தவித மாற்றமும் இல்லை.

**சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள் :**

ஒரு நிகழ்ச்சியின் தோற்றம், அடுத்த நிகழ்ச்சியின் தோற்றத்தைப் பாதிக்குமானால், இரண்டாவது நிகழ்சியானது முதல் நிகழ்ச்சியைச் சார்ந்திருக்கும் என்கிறோம். மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில், முதலில் எடுத்த பந்தை மறுபடியும் பையில் வைக்காமல் இருந்தால் பையில் உள்ள பந்துகளில் ஒன்று குறையும். எனவே அது இரண்டாவது பந்தை எடுக்கும்போது உள்ள வாய்புகளில் மாற்றத்தை ஏற்படுத்துகிறது. அதாவது இரண்டாவதாக எடுக்கும் பந்து சிவப்பாக இருக்க வேண்டுமானால் அது முதலில் எடுக்கப்பட்ட பந்து சிவப்பு அல்லது வெள்ளை நிறப்பந்தைப் பொறுத்ததாகும்.

அதேபோல் ஒரு சீட்டுக்கட்டில் ஒரு சீட்டு எடுக்கும்போது திரும்பவும் அதை மீண்டும் அக்கட்டில் வைக்காமல் இருந்தால், இரண்டாவதாக பின்னால் எடுக்கும் சீட்டு முதலில் எடுக்கப்பட்ட சீட்டைச் சார்ந்து உள்ளது.

## 1.4 நிபந்தனை நிகழ்தகவு (Conditional probability):

A என்பது ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி மற்றும் $P(A) > 0$ என்க. A, B ஆகிய இரு சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள் எனில், A முன்பே ஏற்பட்டுள்ளது எனக்கொண்டு, அதன் பிறகு B ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவை, B என்ற நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவை, நிபந்தனை நிகழ்தகவு என்கிறோம். இதனை $P(B|A)$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

அதாவது A ஐப் பொறுத்த B என்ற நிகழ்ச்சிக்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவு

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ எனப்படுகிறது.}$$

அதேபோல் B ஐப் பொறுத்த A என்ற நிகழ்ச்சியின் நிபந்தனை நிகழ்தகவு

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ எனப்படுகிறது.}$$

**குறிப்பு :**

A, B எனும் நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் ஆயின் $P(A|B) = P(A)$ மற்றும் $P(B|A) = P(B)$ என்றும் ஆகும்.

## 1.5 நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றங்கள் :

சார்புடைய நிகழ்ச்சிகளுக்கும், சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளுக்கும் நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றங்களை இங்கு காண்போம்.



### 1.5.1 சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றம் :

A மற்றும் B ஆகியவை இரு சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் எனில் அவ்விரு நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவானது அவற்றின் தனித்தனி நிகழ்வுகளின் பெருக்கல் பலனுக்குச் சமமாக இருக்கும். அதாவது $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

**நிரூபணம்:**

மொத்தமுள்ள $n_1$ முடிவுகளில் $m_1$ முடிவுகள் A என்ற நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமாக உள்ளன என்க.

$\therefore P(A) = m_1 / n_1$

மொத்தமுள்ள $n_2$ முடிவுகள் $m_2$ முடிவுகள் B என்ற நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமாக உள்ளன என்க.

$\therefore P(B) = m_2 / n_2$

$n_1$ இல் உள்ள ஒவ்வொரு முடிவையும், $n_2$ இல் உள்ள ஒவ்வொரு முடிவோடு தொடர்புபடுத்த முடியும். ஆகவே 'A மற்றும் B' என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான மொத்த வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கை $n_1 n_2$ ஆகும். இவ்வாறே $m_1$ இல் உள்ள ஒவ்வொரு முடிவையும் $m_2$ இல் உள்ள ஒவ்வொரு முடிவோடு தொடர்பு படுத்த முடியும். ஆகவே 'A மற்றும் B' என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்குச் சாதகமான வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கை $m_1\ m_2$ ஆகும். ஆகவே 'A மற்றும் B' என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான மொத்த வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கை $n_1 n_2$ ஆகும். இவ்வாறே $m_1$ இல் உள்ள ஒவ்வொரு முடிவையும் $m_2$ இல் உள்ள ஒவ்வொரு முடிவோடு தொடர்புபடுத்த முடியும். ஆகவே 'A மற்றும் B' என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்குச் சாதகமான வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கை $m_1 m_2$ ஆகும்.

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{m_1\ m_2}{n_1\ n_2}$$

$$= \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}$$

$$= P(A).P(B)$$

**குறிப்பு:** இத்தேற்றத்தை இரண்டுக்கும் மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளுக்கும் விரிவாக்கலாம்.

A,B,C, ... ஆகியவை சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

$$P(A \cap B \cap C \ldots) = P(A).P(B).P(C) \ldots$$

### 1.5.2 சார்புடைய நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றம்:

A மற்றும் B ஆகியவை இரு சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள் எனில் அவை இரண்டும் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A)$$

**நிரூபணம்:**

ஒரு சோதனையில் மொத்தமுள்ள n சமவாய்ப்பு முடிவுகளில் m முடிவுகள் A என்ற நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்குச் சாதகமாக உள்ளன என்க. இந்த n முடிவுகளில், $m_1$ முடிவுகள் B என்ற நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமாக உள்ளன என்க.

இப்போது 'A மற்றும் B' என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெற சாதகமான வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கை $m_1$ ஆகும்.

$$P(A \cap B) = \frac{m_1}{n}$$

$$= \frac{m_1}{\mathbf{n}} \times \frac{m}{\mathbf{m}} = \frac{m\,m_1}{\mathbf{nm}}$$

$$= \frac{m}{n} \times \frac{m_1}{m}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B|A)$$

**குறிப்பு :**

A,B,C என்பவை மூன்று சார்ந்த நிகழ்ச்சிகளாயின்

$P(A \cap B \cap C) = P(A).\ P(B|A).\ P(C|A \cap B)$ ஆகும்.

### 1.6 பேயெஸின் தேற்றம் (Bayes' Theorem):

முன்பு விளக்கப்பட்ட நிபந்தனை நிகழ்தகவில் ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்வைப் பொறுத்து, மற்றொரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவைக் கணிக்க முடிகிறது என்பதைக் கண்டோம்.

இக்கருத்து மேலும் விரிவாக்கப்பட்டு, நமக்குக் கிடைத்த புதிய விவரங்களைக் கொண்டு நிகழ்தகவினை மறுமதிப்பீடு செய்து, நிகழ்தகவைக் காரண காரியங்களுக்கு ஏற்பப் பெறலாம் என்ற கருத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டது ஆகும். இவ்வாறு மறுமதிப்பீடு செய்து பெறப்படும் நிகழ்தகவைக் காணும் முறை பேயெஸின் விதி (Bayes' Rule) எனப்படுகிறது.

இக்கருத்து தாமஸ் பேயெஸ் (Thomas Bayes) என்பவரால் 1763 இல் உருவாக்கப்பட்டது. இவ்விதிப்படி, முந்தைய நிகழ்தகவைக் (Prior Probabilities) கருத்தில் கொண்டு பிந்தைய நிகழ்தகவுகள்



(Posteriori Probabilities) பெறப்படுகின்றன. எனவே பேயெஸின் நிகழ்தகவுகள், பிந்தைய நிகழ்தகவுகள் என்றும் அழைக்கப் படுகின்றன.

### பேயெஸின் தேற்றம் அல்லது பேயெஸின் விதி:

$A_1, A_2, A_3, \ldots A_i, \ldots A_n$ என்பவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் n பூரண நிகழ்ச்சிகள். அவற்றின் நிகழ்தகவுகள் முறையே $P(A_1)$, $P(A_2)$, …. $P(A_n)$ என்பதாகும். B என்பது மற்றொரு நிகழ்ச்சி. $P(B|A_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$ எல்லாம் தெரிந்த நிகழ்தகவுகள் எனில்,

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)\ P(A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)\ P(A_i)}$$

### 1.7 வரிசைமாற்றங்கள் மற்றும் சேர்மானங்களுக்கான அடிப்படை விதிகள் (Basic Prinicples of Permutations and Coimbinations) :

நிகழ்தகவைக் கணக்கிட்டுக் காணும்போது நாம் பயன்படுத்தப் போகும் வரிசைக் காரணிப் பெருக்கல் (Factorial), வரிசைமாற்றங்கள் மற்றும் சேர்மானங்கள் போன்றவற்றின் அடிப்படை விளக்கங்களை இங்கு காண்போம்.

### வரிசைக் காரணிப் பெருக்கல் (Factorial):

தொடர்ச்சியான முதல் n இயல் எண்களின் பெருக்கல் பலனை, வரிசைக்காரணிப்பெருக்கல் n என்கிறோம். அதை n! அல்லது $\angle n$ எனக் குறிக்கிறோம்.

அதாவது $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times n$

$3! = 3 \times 2 \times 1$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

மேலும் $5! = 5 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 5 \times (4!)$ என எழுதலாம். இதை $n! = n \times (n-1)!$ என எழுதலாம்

**குறிப்பு:** $1! = 1$ , $0! = 1$

### வரிசைமாற்றங்கள் (Permutations):

வரிசைமாற்றம் என்பது பொருட்களைப் பல வழிகளில் மாற்றி அமைத்துக் காண்பதாகும். A,B,C என்ற மூன்றில் ஒரே சமயத்தில் இரண்டிரண்டாக அமைத்தலைப் பின்வருமாறு செய்யலாம்.

| | |
|---|---|
| AB | **BA** |
| AC | **CA** |
| BC | **CB** |

இவற்றில் இங்கு 6 வகையான வரிசை அமைப்புகளைக் காண்கிறோம். AB என்ற அமைப்பும் BA என்ற அமைப்பும் வேறுவேறான அமைப்புகளாகும்.

மேற்கண்ட வரிசை அமைப்புகளின் எண்ணிக்கையை ' 3 பொருட்களிலிருந்து, 2 பொருட்களின் வரிசைமாற்ற எண்ணிக்கை 6 ஆகும் ' என்கிறோம். இதைக் குறியீடாக $3P_2 = 6$ எழுதுகிறோம்.

எனவே n பொருட்களிலிருந்து. r பொருட்களின் வரிசைமாற்ற எண்ணிக்கை nPr எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

nPr இன் விரிவாக்கம் கீழ்க்கண்டவாறு அமைகிறது.

$$nPr = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)]$$

இதனை வரிசைக் காரணிப் பெருக்கல் குறியீட்டில் எழுதும் பொழுது

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

எடுத்துக்காட்டாக, $10P_3$ இன் மதிப்பைக் காண, பின் வருமாறு எழுதுகிறோம்.

$$\begin{aligned} 10P_3 &= 10(10-1)(10-2) \\ &= 10 \times 9 \times 8 \\ &= 720 \end{aligned}$$

[$10P_3$ காண, முதலில் 10 இல் தொடங்கி 3 இயல் எண்களை இறங்கு வரிசையில் எழுதிப் பெருக்குக.]

$10P_3$ ஐ வரிசைக் காரணிப் பெருக்கல் முறையில் சுருக்கும் விதம்.

$$10P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 10 \times 9 \times 8$$
$$= 720$$

**குறிப்பு**: $nP_0 = 1, \; nP_1 = n, \; nP_n = n!$

**சேர்மானங்கள் (Combinations):**

ஒரு சேர்மானம் என்பது பொருட்களின் வரிசை முறையைக் கருதாமல் தேர்ந்தெடுக்கும் வழியாகும்.



எடுத்துக்காட்டாக A,B,C எனும் மூன்று பொருட்களில், இரண்டு பொருட்களை ஒரே சமயத்தில் எடுத்தால், அவை

AB AC BC என்பதாக அமையும்.

இங்கு AB, BA எனும் இரண்டும் வேறுவேறன்று, இரண்டும் ஒன்றே. எனவே சேர்மானங்களில் வரிசை அமைப்புகளைக் கருத்தில் கொள்வதற்கில்லை.

இந்த எடுத்துக்காட்டில் '3 பொருட்களில் 2 பொருட்களை எடுக்கும் போது கிடைக்கும் சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும்' இதை $3C_2 = 3$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

எனவே n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை எடுக்கும் சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கை nCr எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

$nCr = \frac{nPr}{r!}$ என்றும்

$nCr = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ எனவும் குறிப்பிடலாம்.

$${}_{10}C_3 = \frac{{}_{10}P_3}{3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120$$

மேலும் ${}_8C_4$. ${}_8C_4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 70$

**குறிப்பு** : $nC_0 = 1, \; nC_1 = n, \; nC_n = 1$

எடுத்துக்காட்டாக ${}_{10}C_3$ இன் மதிப்பைக் காண்போம்.

[$8C_4$ ஐக்கான, தொகுதியில் 8 இல் தொடங்கி 4 இயல் எண்களின் பெருக்கல் பலனை இறங்கு வரிசையில் எழுதி, பகுதியில் 4 இன் வரிசைக் காரணிப் பெருக்கலை எழுதி, பின் சுருக்க வேண்டும்.]

$10C_8$, ${}_{10}C_2$ இவற்றின் மதிப்பை ஒப்பிடுவோம்.

$${}_{10}C_8 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8} = \frac{10 \times 9}{1 \times 2} = 45$$

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{1 \times 2} = 45$$

மேற்கண்ட இரண்டிலிருந்து ${}_{10}C_8 = {}_{10}C_2$ எனக் காண்கிறோம்.

இதை இவ்வாறும் பெறலாம்.

${}_{10}C_8 = {}_{10}C_{(10-8)} = {}_{10}C_2$

n , r இவற்றிற்கிடையேயுள்ள வித்தியாசம் nCr இல் அதிகமாயிருக்கும் போது மேற்கண்ட முறைப்படி சுருக்கி எளிதில் கணக்கிடலாம். சேர்மானத்தில் இவ்விதி ${}_{n}C_{r} = {}_{n}C_{(n-r)}$. எனப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, ${}_{200}C_{198}$ ஐக் கணக்கிட

$${}_{200}C_{198} = {}_{200}C_{(200-198)} = {}_{200}C_{2} = \frac{200\times199}{1\times2} = 19900$$ என்று எளிதாக விடையைப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, கிரிக்கெட் அணிக்காக 13 விளையாட்டு வீரர்களுள் 11 வீரர்களைக் கொண்ட ஒருகுழு தேர்ந்தெடுக்கப்பட இருக்கிறது. இதை எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

13 விளையாட்டு வீரர்களில். 11 வீரர்களை ${}_{13}C_{11}$ வழிகளில் தேர்ந்து எடுக்கலாம். அதாவது

$${}_{13}C_{11} = {}_{13}C_{2} = \frac{13 \times 12}{1 \times 2} = 78.$$

**எடுத்துக்காட்டு1:**

மூன்று நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகின்றன எனில் (i) தலைகள் விழாமல் இருக்க (ii) ஒரு தலை விழ (iii) இரு தலைகள் விழ (iv) குறைந்த பட்சம் இரு தலைகள் விழ (v) அதிகபட்சம் இருதலைகள் விழ நிகழ்தகவைக் காண்க.

**தீர்வு :**

மூன்று நாணயங்களைச் சுண்டும் போது ஏற்படும் கூறுவெளி

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$ ; $n(S) = 8$

(i) தலைகள் விழாமல் இருக்க $A = \{TTT\}$; $n(A) = 1$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{8}$$

(ii) ஒரு தலை விழ $B = \{HTT, THT, TTH\}$; $n(B) = 3$

$$\therefore P(B) = \frac{3}{8}$$

(iii) இரு தலைகள் விழ $C = \{HHT, HTH, THH\}$; $n(C) = 3$

$$\therefore P(C) = \frac{3}{8}$$



(iv) குறைந்த பட்சம் இரு தலைகள் விழ

$D = \{HHT, HTH, THH, HHH\}$; $n(D) = 4$

$$\therefore P(D) = \frac{4}{8} = 1/2$$

(v) அதிக பட்சம் இரு தலைகள் விழ

$E = \{TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH\}$

$n(E) = 7$

$$\therefore P(E) = \frac{7}{8}$$

**எடுத்துக்காட்டு 2:**

இரு பகடைகள் வீசப்படும் போது இரட்டைகள் (இரு பகடையிலும் ஒரே எண்) கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

**தீர்வு :**

இருபகடைகள் வீசப்படும் போது கூறுவெளியில் உள்ள கூறு புள்ளிகள்

$n(S) = 36$

இரட்டைகள் வருவதற்கான நிகழ்ச்சி:

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

**எடுத்துக்காட்டு 3:**

நன்கு குலுக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டை எடுக்கும் போது அது (i) Aஆக இருக்க (ii) டைமண்ட் ஆக இருக்க நிகழ்தகவு யாது?

**தீர்வு :**

ஒரு சீட்டுக்கட்டில் 52 சீட்டுகள் உள்ளன என்பதை நாம் அறிவோம்

$n(S) = 52$

ஒரு சீட்டுக்கட்டில் நான்கு 'A' உள்ளன. $\therefore n(A) = 4$

$$\therefore P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

13 டைமண்ட் சீட்டுகள் ஒரு சீட்டுக்கட்டில் இருக்கின்றன. $\therefore n(B) = 13$

$$\therefore P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

**எடுத்துக்காட்டு 4:**

ஒரு பெட்டியில் 5 பச்சை, 6 சிவப்பு, 4 மஞ்சள் நிறப்பந்துகள் உள்ளன. ஒரு பந்து சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகிறது என்றால் அது (i) பச்சை (ii) சிவப்பு (iii). மஞ்சள் (iv) பச்சை அல்லது சிவப்பு (v) மஞ்சள் நிறம் இல்லாமல் இருக்க நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி.

**தீர்வு:**

மொத்த பந்துகளின் எண்ணிக்கை = 5 + 6 + 4 = 15 பந்துகள்

(i) P(பச்சைநிறப்பந்து) $= \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

(ii) P(சிவப்பு நிறப்பந்து) $= \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

(iii) P (மஞ்சள் நிறப்பந்து) $= \frac{4}{15}$

(iv) P (பச்சை அல்லது சிவப்பு நிறப்பந்து)

$$= \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$$

(v) P (மஞ்சள் நிறம் இல்லாமல் இருக்க)

= 1 – P (மஞ்சள் நிறப்பந்து)

$$= 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$$

**எடுத்துக்காட்டு 5:**

இரு பகடைகள் வீசப்படுகின்றன. கூடுதல் 8 அல்லது 10 ஆக இருக்க நிகழ்தகவு யாது?

**தீர்வு:**

கூறுவெளிப்புள்ளிகள்: $n(S) = 36$

A = {கூடுதல் 8 கிடைக்க }

$\therefore A = \{(6,2), (5,3), (4,4), (3,5), (2,6)\}$; $P(A) = \frac{5}{36}$

B = { கூடுதல் 10 கிடைக்க }

$\therefore B = \{(6,4), (5,5)\ (4,6)\}$ ; $P(B) = \frac{3}{36}$

$A \quad B = \{\ \}$ ; $P(A \quad B) = 0$



எனவே இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்குவன.

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$= \frac{5}{36} + \frac{3}{36}$$
$$= \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

**எடுத்துக்காட்டு 6:**

இரு பகடைகள் ஒரே சமயத்தில் வீசப்படுகின்றன எனில் கூடுதல் 6 அல்லது இரு பகடைகளிலும் ஒரே எண் வருவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

**தீர்வு :**

$n(S) = 36$

A என்பது கூடுதல் 6 கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி

$\therefore A = \{(5,1), (4,2), (3,3), (2,4), (1,5)\}$; $P(A) = \frac{5}{36}$

A என்பது இருபகடைகளிலும் ஒரே எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி

$\therefore B = \{(1,1)\ (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$; $P(B) = \frac{6}{36}$

$A \cap B = \{(3,3)\}$ ; $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

இங்குள்ள நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்குவன அல்ல.

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{5}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36}$$
$$= \frac{5+6-1}{36}$$
$$= \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

**எடுத்துக்காட்டு 7:**

ஒரு வேலைக்காக A மற்றும் B என்னும் இருவர் நேர்முகத்தேர்வை மேற்கொள்கின்றனர். A என்பவர் தேர்ந்தெடுக்கப் படுவதற்கான நிகழ்தகவு 1/3, B என்பவர் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான

நிகழ்தகவு 1/2 எனில் i) இருவரும் ii) ஒருவர் மட்டும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி iii) எவரும் தேர்ந்தெடுக்கப்படாமல் இருக்க நிகழ்தகவு யாது?

**தீர்வு:**

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{2}{3}, \quad P(\overline{B}) = \frac{1}{2}$$

ஒருவரைத் தேர்ந்தெடுப்பதும், தேர்ந்தெடுக்காமல் இருப்பதும் மற்றவரைப் பாதிக்காது எனில் A, B இரண்டும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகும்.

i) இருவரையும் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{6}$$

ii) ஒருவரை மட்டும் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

P(A தேர்ந்தெடுக்கப்படுதல், B தேர்ந்தெடுக்கப்படாமல் இருத்தல்) + P(A தேர்ந்தெடுக்கப்படாமல் இருத்தல், B தேர்ந்தெடுக்கப்படுதல்)

$$P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A).\ P(\overline{B}) + P(\overline{A}).\ P(B)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

iii) இருவரும் தேர்ந்தெடுக்கப்படாமல் இருத்தல்

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).\ P(\overline{B})$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$



**எடுத்துக்காட்டு 8:**

A, B, C என்னும் மூன்று தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளை நகரின் ஒரு பகுதியில் 2000 குடும்பத்தினர் பார்க்கின்றனர். கீழ்க்கண்ட விவரங்கள் ஓர் ஆய்வின் படி கிடைக்கப்பெற்றன.

1200 குடும்பங்கள் A நிகழ்ச்சியைப் பார்க்கின்றனர்

1100 குடும்பங்கள் B நிகழ்ச்சியைப் பார்க்கின்றனர்

800 குடும்பங்கள் C நிகழ்ச்சியைப் பார்க்கின்றனர்

765 குடும்பங்கள் A மற்றும் B நிகழ்ச்சியைப் பார்க்கின்றனர்

450 குடும்பங்கள் A மற்றும் C நிகழ்ச்சியைப் பார்க்கின்றனர்

400 குடும்பங்கள் B மற்றும் C நிகழ்ச்சியைப் பார்க்கின்றனர்

100 குடும்பங்கள் A,B மற்றும் C நிகழ்ச்சியைப் பார்க்கின்றனர்

எனில் ஒரு நிகழ்ச்சியையாவது பார்க்கும் குடும்பங்களின் நிகழ்தகவு என்ன?

**தீர்வு :**

மொத்த குடும்பங்கள் $n(S) = 2000$

$$n(A) = 1200$$

$$n(B) = 1100$$

$$n(C) = 800$$

$$n(A \cap B) = 765$$

$$n(A \cap C) = 450$$

$$n(B \cap C) = 400$$

$$n(A \cap B \cap C) = 100$$

முதலில் n(AUBUC) ஐக் காண வேண்டும்.

$$n(AUBUC) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 1200 + 1100 + 800 - 765 - 450 - 400 + 100$$

$$n(AUBUC) = 1585$$

$$P(AUBUC) = \frac{n(AUBUC)}{n(S)}$$

$$= \frac{1585}{2000} = 0.792$$

எனவே சுமார் 79 % குடும்பங்கள் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளைக் காண்கின்றனர்.

**எடுத்துக்காட்டு 9:**

ஒருவர் 20 பொருட்கள் கொண்ட தொகுப்புகளாக விற்பனை செய்கிறார். அத்தொகுப்பில் 12 குறைபாடற்றவை, 8 குறைபாடு உள்ளவை. ஒரு வாடிக்கையாளர் அத்தொகுப்பிலிருந்து 3 பொருட்களை எடுக்கிறார் எனில்,

i) மூன்றுமே குறைபாடற்றவையாக

ii) இரண்டு குறைபாடற்றவை, ஒன்று குறைபாடு உள்ளவையாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

**தீர்வு :**

முதலில் 20 பொருட்களிலிருந்து 3 பொருட்களை எடுக்கும் வழிகள் $20C_3$ ஆகும் அதாவது $n(S) = 20C_3$

மூன்று பொருட்களும் குறைபாடற்றவையாக உள்ள நிகழ்ச்சி $E_1$ என்க.

12 குறைபாடற்ற பொருட்களிலிருந்து 3 பொருட்கள் பெற $12C_3$ வழிகள் உள்ளன. $\therefore n(E_1)=12c_3$

$$\therefore P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{12C_3}{20C_3}$$

$$= \frac{12\times11\times10}{20\times19\times18}$$

$$= 0.193$$

(ii) இரண்டு பொருட்கள் குறைபாடற்றவையாகவும், ஒரு பொருள் குறைபாடுள்ளவையாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி $E_2$ என்க

12 பொருட்களில் 2 குறைபாடற்றவையாக இருக்க $12C_2$ வழிகள் உள்ளன.

8 பொருட்களில் 1 குறைபாடு உள்ளதாக இருக்க $8C_1$ வழிகள் உள்ளன.

$$n(E_2) = 12C_2 \,.\, 8C_1$$

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{12C_2 \,.\, 8C_1}{20C_3}$$

$$= \frac{12\times11\times8\times3}{20\times19\times18} \qquad = 0.463$$



**எடுத்துக்காட்டு 10:**

ஒரு தேர்வுத்தாளில் உள்ள 10 கணக்குகள், தீர்வைக் காண்பதற்காக A,B,C என்னும் மூன்று மாணவர்க்குத் தரப்படுகிறது. A என்பவர் அக்கணக்குகளின் தீர்வைக் காண்பதற்கான நிகழ்தகவு 60 % ஆகவும் B என்பவரின் நிகழ்தகவு 40 % ஆகவும் C என்பவரின் நிகழ்தகவு 30 % ஆகவும் உள்ளது எனில் மூவரும் சேர்ந்து தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

**தீர்வு :**

A என்பவர் கணக்கின் தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவு = 60 %

B என்பவர் கணக்கின் தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவு = 40 %

C என்பவர் கணக்கின் தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவு = 30 %

ஒரு மாணவர் கணக்கின் தீர்வைக் காண்பது என்பதும், அந்த கணக்கிற்கு மற்ற மாணவர் தீர்வு காண்பது என்பதும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகும்.

எனவே , $P(A\cap B\cap C) = P(A).\ P(B).\ P(C)$

$$= \frac{60}{100}\times\frac{40}{100}\times\frac{30}{100}$$

$$= 0.6\times0.4\times0\ .3$$

$$= 0.072$$

**எடுத்துக்காட்டு 11:**

ஒரு சீட்டுக்கட்டில், 2 சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றன எனில் அவை ஒரு ராஜா, ஒரு ராணி ஆக இருக்க நிகழ்தகவைக் காண்க.

**தீர்வு:**

52 சீட்டுகளிலிருந்து 2 சீட்டுகள் எடுக்கப்படும் வழிகள் $n(S) = 52C_2$

ஒரு ராஜா எடுக்கப்படும் வழிகள் $= 4C_1$

ஒரு ராணி எடுக்கப்படும் வழிகள் $= 4C_1$

ஒரு ராஜா மற்றும் ஒரு ராணி எடுக்கப்படும் வழிகள் $= 4C_1 .\ 4C_1$

அதாவது $n(E) = 4C_1 .\ 4C_1$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4C_1.4C_1}{52C_2}$$

$$= 4\times4 \div \frac{52\times51}{1\times2}$$

$$= \frac{4 \times 4 \times 2}{52 \times 51}$$

$$= \frac{8}{663}$$

**எடுத்துக்காட்டு 12:**

ஒரு பெட்டியில் 4 கருப்பு நிறப் பந்துகளும் 6 வெள்ளை நிறப் பந்துகளும் உள்ளன. 3 பந்துகள் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப் பட்டால் (i). எல்லாம் கருப்பு நிறமாக ii). எல்லாம் வெள்ளை நிறமாக இருக்க வேண்டிய நிகழ்தகவைக் காண்க.

**தீர்வு:**

மொத்த பந்துகளின் எண்ணிக்கை = 10

அவற்றுள் 3 பந்துகளை எடுக்கும் வழிகள் = $10\ C_3$

i) 3 கருப்பு பந்துகள் கிடைப்பதற்கான வழிகள் = $4\ C_3$

$$P(\text{3 கருப்பு நிறப்பந்துகள்}) = \frac{4C_3}{10C_3}$$

$$= \frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3} \div \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3}$$

$$= \frac{4 \times 3 \times 2}{10 \times 9 \times 8}$$

$$= \frac{1}{30}$$

ii) 3 வெள்ளை பந்துகள் கிடைப்பதற்கான வழிகள் = $6\ C_3$

$$P(\text{3 வெள்ளை நிறப் பந்துகள்}) = \frac{6C_3}{10C_3}$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{6}$$

**எடுத்துக்காட்டு 13:**

ஒரு பெட்டியில் 5 பச்சை, 3 சிவப்பு நிறப் பந்துகள் உள்ளன. 3 பச்சை நிறப் பந்துகளை ஒன்றன் பின் ஒன்றாக எடுத்தால் i) திரும்பவும் அப்பெட்டியில் வைக்காமல் இருக்கும் போது



ii) திரும்பவும் அப்பெட்டியில் வைத்தபின் கிடைக்கும் நிகழ்தகவைக் காண்க

**தீர்வு:**

(i) திரும்ப வைக்காமல் இருக்கும் போது காணும் நிகழ்தகவு.

8 பந்துகளில் 3 பந்துகளை எடுக்கும் வழிகள் $8C_3$

$$n(S) = 8C_3$$

5 பச்சை நிறப்பந்துகளில் 3 பந்துகளை எடுக்கும் வழிகள் $5C_3$

$$P(\text{3 பச்சை நிறப்பந்துகள்})\ ) = \frac{5C_3}{8C_3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{8 \times 7 \times 6} = \frac{5}{28}$$

(ii) திரும்ப வைத்தபின் கானும் நிகழ்தகவு

ஒரு பந்தை எடுத்தபின், மறுபடியும் அதே பெட்டியில் திரும்பவும் வைத்து விட்டால் பெட்டியிலுள்ள பந்துகளின் எண்ணிக்கை மாறாது. மேலும் பந்துகளை எடுக்கும் மூன்று நிகழ்ச்சிகளும் சார்பற்றவை. எனவே பச்சை நிறப்பந்தை எடுக்கும் முதல், இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாம் முறையும் அதே நிகழ்தகவைக் கொண்டிருக்கும்.

அதாவது பச்சை நிறப்பந்தை எடுக்கும் நிகழ்தகவானது ஒவ்வொரு முறையும் $\frac{5}{8}$ ஆக இருக்கும். எனவே 3 பச்சை நிறப் பந்துகளை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{125}{512}$$

**எடுத்துக்காட்டு 14:**

ஒரு பெட்டியில் 5 சிவப்பு மற்றும் 4 வெள்ளை நிறக் கோலிகுண்டுகள் உள்ளன. இரண்டு கோலி குண்டுகள் ஒன்றன் பின் ஒன்றாக திரும்பவும் அதே பெட்டியில் வைக்கப்படாமல் எடுக்கப்படுகின்றன. இரண்டாவது எடுக்கப்படும் கோலிகுண்டு வெள்ளை நிறமாக இருந்து, முதலில் எடுக்கப்படும் கோலிகுண்டும் வெள்ளை நிறமாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

**தீர்வு :**

முதல் முறை வெள்ளை நிறக் கோலிகுண்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை $w_1$ என்போம்.

இரண்டாம் முறை வெள்ளை நிறக் கோலிக்குண்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை $w_2$ என்போம்.

$$P(w_1) = 4/9 \cdot\ P(w_2) = 3/8$$

இப்போது நாம் காண வேண்டியது

$$P(w_1/w_2) = \frac{P(w_1 \cap w_2)}{P(w_2)} = \frac{P(w_1).P(w_2)}{P(w_2)}$$

$$= \frac{(4/9)(3/8)}{(3/8)}$$

$$= \frac{4}{9}$$

**எடுத்துக்காட்டு 15:**

ஒரு பையில் 6 சிவப்பு மற்றும் 8 கருப்பு நிறப்பந்துகள் உள்ளன. மற்றொரு பையில் 7 சிவப்பு மற்றும் 10 கருப்பு நிறப்பந்துகள் உள்ளன. முதலில் ஒருபை தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது எனில் அப்பந்து சிவப்பு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

**தீர்வு :**

இரு பைகள் அங்கு உள்ளன. அவ்விரு பைகளில் ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுக்க நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$

A என்பது முதல் பையையும் B என்பது இரண்டாவது பையையும் R என்பது சிவப்புநிறப் பந்தையும் குறிக்கட்டும்.

$$\therefore P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

A என்ற பையில் 6 சிவப்பு , 8 கருப்பு நிறப்பந்துகள் உள்ளன.

$$\therefore P(\text{சிவப்பு நிறப்பந்து}) = \frac{6}{14}$$

A என்ற பையைத் தேர்ந்தெடுத்து அதிலிருந்து சிவப்பு நிறப்பந்தை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A).\ P(R|A) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{14} = \frac{3}{14}$$

அது போல B என்ற பையைத் தேர்ந்தெடுத்து அதிலிருந்து சிவப்பு நிறப்பந்தை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(B).\ P(R|B) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{17} = \frac{7}{34}$$



இந்நிகழ்ச்சிகள் எல்லாம் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். எனவே R என்பது சிவப்பு நிறப்பந்தைப்பெறுவதாக இருந்தால் அது A அல்லது B என்ற பையிலிருந்து எடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(R) = P(A)\ P(R|A) + P(B)\ P(R|B)$$

$$= \frac{3}{14} + \frac{7}{34}$$

$$= \frac{17 \times 3 + 7 \times 7}{238}$$

$$= \frac{51 + 49}{238}$$

$$= \frac{100}{238} = \frac{50}{119}$$

**எடுத்துக்காட்டு 16.:**

$P(A \cap B) = 0.3$, $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.7$ எனில், $P(B|A)$ , $P(A|B)$ ஆகியவற்றைக் காண்க

**தீர்வு :**

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{0.3}{0.6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0.3}{0.7} = \frac{3}{7}$$

**எடுத்துக்காட்டு 17:**

ஒரு நகரத்தில் ஆண்களும், பெண்களும் சமமாக 50 % இருக்கிறார்கள். அவர்களில் 20 % ஆண்களும், 5 % பெண்களும் வேலைகிடைக்காதவர்கள். ஓர் ஆராய்ச்சி மாணவர் வேலைவாய்ப்பு பற்றிய ஆய்விற்காக வேலைகிடைக்காதவர்களை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுத்து ஆய்வு செய்கிறார். அவ்வாறெனில் அவர் தேர்ந்தெடுப்பது (i) ஆண் (ii) பெண் ஆக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

**தீர்வு :**

மக்கட் தொகை 50 % இல் 20 % ஆண்கள் வேலை கிடைக்காதவர்கள்

அதாவது $\frac{50}{100}\times\frac{20}{100}=\frac{10}{100}=0.10$.

மக்கட் தொகை 50 % இல் 5 % பெண்கள் வேலை கிடைக்காதவர்கள்

அதாவது $\frac{50}{100}\times\frac{5}{100}=\frac{25}{1000}=0.025$

மேற்கண்ட விவரங்களை அட்டவணையில் பின்வருமாறு குறிப்பிடுவோம்.

| | வேலை பெற்றவர்கள் | வேலை கிடைக்காதவர்கள் | மொத்தம் |
|---|---|---|---|
| ஆண்கள் | 0.40 | 0.10 | 0.50 |
| பெண்கள் | 0.475 | 0.025 | 0.50 |
| மொத்தம் | 0.875 | 0.125 | 1.00 |

ஆண் தேர்ந்தெடுக்கப்படுதலை M என்றும் பெண் தேர்ந்தெடுக்கப்படுதலை F என்றும் கொள்வோம். ஆண், பெண் ஆகியோரில் வேலை கிடைக்காதவர்களை U என்போம். இப்போது.

$$\text{(i) } P(M|U)=\frac{P(M\cap U)}{P(U)}=\frac{0.10}{0.125}=0.80$$

$$\text{(ii) } P(F|U)=\frac{P(F\cap U)}{P(U)}=\frac{0.025}{0.125}=0.20$$

**எடுத்துக்காட்டு 18:**

ஒரு நிறுவனத்தில், இயக்குனர் குழுவில் இடம் பெறுவதற்காக இரண்டு குழுக்கள் போட்டியிடுகின்றன. முதல் குழு மற்றும் இரண்டாம் குழு அதைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.6 மற்றும் 0.4 ஆகும். முதல் குழு, இயக்குனர் குழுவில் இடம் பெறுவார்கள் என்றால் அவர்கள் புதிய வகை பொருளை அறிமுகப் படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவு 0.8 அதேபோல் இரண்டாம் குழுவிற்கான நிகழ்தகவு 0.3.அவ்வாறெனில் புதிய வகை பொருளை அறிமுகப் படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

**தீர்வு:**

முதல் குழு, இயக்குனர் குழுவில் இடம் பிடிப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A_1)=0.6$$



இரண்டாம் குழு, இயக்குனர் குழுவில் இடம் பிடிப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A_2)=0.4$$

புதிய வகை பொருளை அறிமுகப் படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவு $P(B)$.

முதல் குழு இடம் பிடித்து, புதிய வகை பொருளை அறிமுகப் படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவு $P(B|A_1) = 0.8$

இரண்டாம் குழு இடம்பிடித்து, புதியவகை பொருளை அறிமுகப்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவு $P(B|A_2) = 0.3$

கூட்டல் விதித் தேற்றத்தின் படி,

புதிய வகை பொருளை அறிமுகப்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவு

P(புதிய வகை பொருள்)

= P(முதல் குழுவும், புதிய வகை பொருளும்)

+ P(இரண்டாம் குழுவும், புதிய வகை பொருளும்)

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)\\ &= P(A_1)\,P(B|A_1)+P(A_2).P(B|A_2)\\ &= 0.6\times 0.8+0.4\times 0.3\\ &= 0.60 \end{aligned}$$

**எடுத்துக்காட்டு 19:**

ஒரு நிறுவனத்தில் ஒரு தலைமைப் பதவிக்கு A,B,C என்ற மூவர் போட்டியிடுகின்றனர். அவர்கள் அப்பதவிக்கு தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான தேர்வு விகிதம் முறையே 4:2:3 ஆகும். அப்பதவிக்கு A தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால் அவர் நிறுவனத்தை ஜனநாயக முறையில் நடத்திச் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு 0.3 அதேபோல் B என்பவருக்கு 0.5 மற்றும் C என்பவருக்கு 0.8 ஆகும். அந்நிறுவனத்தின் நிர்வாகத்தில் ஜனநாயக முறையை அறிமுகப்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

**தீர்வு:**

$A_1$, $A_2$, $A_3$ என்ற நிகழ்ச்சியில், முறையே A,B,C என்பவர் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதை குறிக்கட்டும். E என்னும் நிகழ்ச்சி அந்த நிறுவனத்தின் நிர்வாகத்தில் ஜனநாயக முறையை அறிமுகப் படுத்துவதைக் குறிக்கட்டும்.

$P(A_1)=\frac{4}{9}$ $\quad P(A_2)=\frac{2}{9}$ $\quad P(A_3)=\frac{3}{9}$

$P(E|A_1)=0.3$ $\quad P(E|A_2)=0.5$ $\quad P(E|A_3)=0.8$

E என்னும் நிகழ்ச்சி பின்வரும் மூன்று ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளால் நடைபெறும்.

i) A என்பவர் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு ஜனநாயகமுறை அறிமுகப் படுத்துவதற்கான நிகழ்ச்சி $A_1 \cap E$ என்க.

ii) B என்பவர் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு. ஜனநாயகமுறை அறிமுகப் படுவதற்கான நிகழ்ச்சி $A_2 \cap E$ என்க.

iii) C என்பவர் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு ஜனநாயகமுறை அறிமுகப் படுத்தப்படுவதற்கான நிகழ்ச்சி $A_3 \cap E$ என்க.

அதாவது $E = (A_1 \cap E) \cup (A_2 \cap E) \cup (A_3 \cap E)$.

இவை மூன்றும் வெட்டாக் கணங்கள். எனவே கூட்டல் தேற்ற விதிப்படி,

$$P(E) = P(A_1 \cap E) + P(A_2 \cap E) + P(A_3 \cap E)$$
$$= P(A_1)\,P(E|A_1) + P(A_2)\,P(E|A_2) + P(A_3)\,P(E|A_3)$$
$$= \frac{4}{9} \times 0.3 + \frac{2}{9} \times 0.5 + \frac{3}{9} \times 0.8$$
$$= \frac{46}{90}$$
$$= \frac{23}{45}$$

**எடுத்துக்காட்டு 20:**

திருகு ஆணிகள் தயாரிக்கும் ஒரு தொழிற்சாலையில், அதன் மொத்த உற்பத்தியில், அங்குள்ள $A_1$, $A_2$, $A_3$ என்ற மூன்று எந்திரங்கள் முறையே 25 %, 35 % மற்றும் 40 % தயாரிக்கும் திறனுடையவை. தயாரிக்கப்பட்ட திருகு ஆணிகளுள், 5 %, 4 %, 2 %, திருகு ஆணிகள் குறைபாடுள்ளவை. ஒரு திருகு ஆணி சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அது குறைபாடுள்ளது என்று கண்டறியப்படுகிறது. அது $A_2$ என்ற எந்திரத் தயாரிப்பில் இருந்து வருவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

**தீர்வு:**

$P(A_1)$ = P($A_1$ என்ற எந்திரம் தயாரிப்பது) = 25%
$= 0.25$

$P(A_2) = 35\% = 0.35$

$P(A_3) = 40\% = 0.40$



B என்ற நிகழ்ச்சி குறைபாடுள்ள திருகு ஆணியைப் பெறும் நிகழ்ச்சி

$P(B|A_1)$ = P($A_1$ என்ற எந்திரத் தயாரிப்பில் பெறப்பட்ட குறைபாடுள்ள திருகு ஆணி )
$= 5\% = 0.05$

அதுபோல $P(B|A_2) = 4\% = 0.04$

மற்றும் $P(B|A_3) = 2\% = 0.02$

நாம் $P(A_2|B)$ ஐ காணவேண்டும்.

பேயெஸின் தேற்றப்படி,

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3)}$$
$$= \frac{(0.35)(0.04)}{(0.25)(0.05) + (0.35)(0.04) + (0.4)(0.02)}$$
$$= \frac{28}{69}$$
$$= 0.4058$$

**எடுத்துக்காட்டு 21 :**

ஒரு தொழிற்சாலையில் மோட்டார்சைக்கிள் உற்பத்தி செய்யும் இரண்டு பிரிவுகள் உள்ளன. முதல்பிரிவில் 80% மோட்டார் சைக்கிள்கள் உற்பத்தி செய்யமுடியும். முதல் உற்பத்திப்பிரிவில் 85% மோட்டார்சைக்கிள்கள் மிகச்சிறந்த தரமுடையவை. இரண்டாம் உற்பத்திப்பிரிவில் 65% மோட்டார்சைக்கிள்கள் மிகச்சிறந்த தரமுடையவை.

i) சிறந்த தரமுடைய மோட்டார்சைக்கிளாக இருந்து முதல் உற்பத்திப்பிரிவிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

ii) மிகச் சிறந்த தரமுடைய மோட்டார்சைக்கிளாக இருந்து இரண்டாம் உற்பத்திப் பிரிவிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

**தீர்வு:**

$A_1$ எனும் நிகழ்ச்சி, முதல் உற்பத்திப்பிரிவிலிருந்து மோட்டார் சைக்கிளைப் பெறும் நிகழ்ச்சி என்க. $A_2$ எனும் நிகழ்ச்சி, இரண்டாம் உற்பத்திப் பிரிவிலிருந்து மோட்டார்சைக்கிளைப் பெறும் நிகழ்ச்சி

என்க. B என்னும் நிகழ்ச்சி முதல் பிரிவிலோ. இரண்டாம் பிரிவிலோ மோட்டார்சைக்கிளைப் பெறும் நிகழ்ச்சி என்க.

முதலில் கிடைத்த விவரங்களின் படி $P(A_1) = 0.80$, $P(A_2) = 0.20$

கூடுதலாகப் பெற்ற விவரங்களின் படி $P(B|A_1) = 0.85$

$P(B|A_2) = 0.65$

இதிலிருந்து நமக்குத் தேவையான மதிப்புகளைப் பின் வரும் அட்டவணையிலிருந்து பெறலாம். கடைசி நிரலில் விடைகளைப் பெறும் விதம் காட்டப்பட்டுள்ளன.

| நிகழ்ச்சி | முந்தைய நிகழ்தகவு $P(A_i)$ | நிபந்தனை நிகழ்தகவு $P(B\|A_i)$ | இணைந்த நிகழ்தகவு $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B\|A_i)$ | பிந்தைய நிகழ்தகவு $P(A_i\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0.80 | 0.85 | 0.68 | $\frac{0.68}{0.81} = \frac{68}{81}$ |
| $A_2$ | 0.20 | 0.65 | 0.13 | $\frac{0.13}{0.81} = \frac{13}{81}$ |
| கூடுதல் | 1.00 | | $P(B) = 0.81$ | 1 |

அட்டவணையிலிருந்து, திருத்தப்பட்ட நிகழ்தகவின்படி மிகச்சிறந்த தரமுடைய மோட்டார்சைக்கிள் முதல் உற்பத்திப் பிரிவிலிருந்து பெறப்பட்டுள்ளன என்பதாகக் கூறலாம். ( ஏனெனில் $P(A_1) = 80\%$ என்பது, $P(A_2) = 20\%$ ஐவிடப்பெரியது )

**கவனக்குறிப்பு:**

மேற்கண்ட விடையைப் பின்வருமாறு சரிபார்க்கலாம். அத்தொழிற்சாலையில் 10,000 மோட்டார்சைக்கிள்கள் உற்பத்தி செய்யப்பட்டால் முதல் உற்பத்திப்பிரிவில் தயாராகும் மோட்டார் சைக்கிள்கள் $10{,}000 \times 80\% = 8000$

இரண்டாம் உற்பத்திப்பிரிவில் தயாராகும் மோட்டார்சைக்கிள்கள்

$$10{,}000 \times 20\% = 2000$$

அவற்றுள் மிகச்சிறந்த தரமுடைய மோட்டார்சைக்கிள்களை முதல் பிரிவில் பெறுவது



$$8000 \times \frac{85}{100} = 6800$$

இரண்டாம் பிரிவில்

$$2000 \times \frac{65}{100} = 1300$$

எனவே முதல் பிரிவில் மிகச்சிறந்த மோட்டார்சைக்கிள்கள் தயாரிப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{6800}{6800+1300} = \frac{6800}{8100} = \frac{68}{81}$$

இரண்டாம் பிரிவில் பெறும் நிகழ்தகவு $= \frac{1300}{6800+1300} = \frac{1300}{8100} = \frac{13}{81}$

இவ்வாறு முந்தைய நிகழ்தகவுகளை, கிடைக்கும் தகவல்களைக் கொண்டு திருத்தப்பட்ட நிகழ்தகவுகளைப் பெற முடியும். எனவே பேயெஸின் தேற்றம், நிகழ்தகவின் தரத்தை மேலும் அதிகப்படுத்தும் சக்தி வாய்ந்த முறையாக விளங்குகிறது. அதனாலேயே மேலாண்மைத் துறையில் தீர்மானிக்கும் கொள்கையில் இத்தேற்றம் பயன்படுகிறது.

## பயிற்சி - 1

**I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும் :**

1. நிகழ்தகவு என்பது

அ) ஒரு விகிதமாக ஆ) ஒரு சதவீதமாக இ) விகிதசமமாக

ஈ) மேற்கூறிய அனைத்தும்

2. நிகழ்தகவு பெறும் மதிப்புகள்

அ) $-\infty$ இலிருந்து $+\infty$ வரை ஆ) $-\infty$ இலிருந்து 1 வரை

இ) 0 இலிருந்து 1 வரை ஈ) $-1$ இலிருந்து $+1$ வரை

3. இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்றவை எனில்

அ) விளைவுகள் ஒவ்வொன்றும் சம வாய்ப்புகளைப் பெற்றிருக்கும்

ஆ) இரண்டிற்கும் பொதுவாக புள்ளியைப் பெற்றிருக்கும்

இ) ஒன்றின் தோற்றம் மற்றவற்றின் தோற்றத்தைப் பாதிக்காது

ஈ) இரண்டும் ஒரே ஒரு புள்ளியைப் பெற்றிருக்கும்

4. சிறப்பு நிகழ்தகவு (classical probability) என்பது

அ) புள்ளியியல் நிகழ்தகவு

ஆ) ஒரு முந்தைய நிகழ்தகவு

இ) எம்பெரிக்கல் நிகழ்தகவு

ஈ) மேற்கூறிய எதுவுமில்லை.

5. ஒரு நாணயமும் ஒரு பகடையும் ஒருங்கே வீசப்படும்போது ஏற்படும் எல்லா விளைவுகளின் எண்ணிக்கை

அ) 7 ஆ) 8 இ) 12 ஈ) 0

6. நன்கு குலுக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு 'ஸ்பேட்' ராணி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

அ) $\frac{1}{13}$ ஆ) $\frac{1}{52}$ இ) $\frac{4}{13}$ ஈ) 1

7. மூன்று பகடைகள் ஒருங்கே வீசப்படுகின்றன அதில் கூடுதல் 3 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

அ) 0 ஆ) 1/216 இ) 2/216 ஈ) 3/216

8. 1 முதல் 20 முடிய உள்ள முழுக்கள் எண்களில் ஒரு முழு எண் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது அது 4 ஆல் வகுபடும் எண்ணாக இருக்க வேண்டிய நிகழ்தகவு

அ) $\frac{1}{4}$ ஆ) $\frac{1}{3}$ இ) $\frac{1}{2}$ ஈ) $\frac{1}{10}$

9. A ஐப் பொருத்த B என்ற நிகழ்ச்சிக்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவு

அ) $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ஆ) $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ இ) $\frac{P(AUB)}{P(B)}$ ஈ) $\frac{P(AUB)}{P(A)}$

10 $P(X) = 0.15$, $P(Y) = 0.25$, $P(X\ \ Y) = 0.10$ எனில் $P(X\cup Y)$ இன் மதிப்பு

அ) 0.10 ஆ) 0.20 இ) 0.30 ஈ) 0.40

11. $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ மேலும் A, B சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் எனில், $P(A\cap B)$ என்பது

அ) 0.8 ஆ) 0.15 இ) 0.08 ஈ) 0.015

12. $P(A) = 0.4$ $P(B) = 0.5$ , $P(A\cap B) = 0.2$ எனில் $P(B|A)$ என்பது

அ) $\frac{1}{2}$ ஆ) $\frac{1}{3}$ இ) $\frac{4}{5}$ ஈ) $\frac{2}{5}$

13. ஒரு நாணயம் 6 முறை சுண்டப்படுகிறது எனில் கூறுவெளியில் உள்ள மொத்த புள்ளிகள்

அ) 12 ஆ) 16 இ) 32 ஈ) 64

14. ஒரு பகடை வீசும் போது ஒற்றை எண்கள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியும், இரட்டை எண்கள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியும்



அ) ஒன்றையொன்று விலக்குவன

ஆ) ஒன்றையொன்று விலக்குவன அல்ல

இ) சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள்

ஈ) சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் அல்ல

15. ஒரு பகடையை வீசும்போது '2' கிடைக்காமல் இருக்க நிகழ்தகவு

அ) $\frac{1}{3}$ ஆ) $\frac{2}{3}$ இ) $\frac{1}{6}$ ஈ) $\frac{5}{6}$

## II. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக:

16. நிச்சயமான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு ____________

17. நடக்க இயலாத நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு____________

18. கணிதப் புள்ளியியல் ____________ என்றும் அழைக்கப்படுகிறது

19. இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் ஒரே சமயத்தில் வருவதற்கு ____________ எனப்படும்.

20. A,B இரண்டும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாயின் $P(AUB) =$ __________

21. A, B இரண்டும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாயின் $P(A\cap B) =$ __________

22. A, B இரண்டும் சார்ந்த நிகழ்ச்சிகளாயின் $P(A|B) =$ __________

23. A, B இரண்டும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாயின் $P(A\cap B) =$ __________

24. மூன்று நாணயங்களைச் சுண்டும் பொழுது மூன்றுமே தலைகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு __________

25. 3 பகடைகள் வீசப்படும் போது கூடுதல் 17 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு __________

26. இரு பகடைகள் வீசப்படும் போது கூடுதல் 11 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு __________

## III. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு விடை தருக:

27. பின் வருவனவற்றை வரையறுக்க.
நிகழ்ச்சி, சரிசமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள், ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள், பூரண நிகழ்ச்சிகள், கூறுவெளி.

28. சார்புடைய நிகழ்ச்சிகள், சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் என்பவற்றை வரையறுக்க

29 கணித நிகழ்தகவு - வரையறுக்க

30. புள்ளியியல் நிகழ்தகவு - வரையறுக்க

31. நிகழ்தகவு கோட்பாடுகளைக் கூறுக.

32. ஏதேனும் இருநிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றத்தை விவரிக்க.
33. நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றத்தைக் கூறுக.
34. நிபந்தனை நிகழ்தகவை வரையறுக்க
35. பேயெஸின் விதியைக் கூறுக.
36. ஒரு மாதிரியில் உள்ள 30 பொருட்களில் 5 குறைபாடுள்ளவை. அம்மாதிரியிலிருந்து ஒரு பொருளை எடுத்தால் அது
   i) குறைபாடுள்ளதாக ii) குறைபாடற்றதாக இருக்க நிகழ்தவைக் காண்க.
37. நான்கு நாணயங்கள் ஒருங்கே வீசப்படுகின்றன. அவற்றில்
   i) 2 தலைகள் ii) 3 தலைகள் iii) குறைந்தபட்சம் 3 தலைகள் விழ நிகழ்தகவைக் கண்டுபடி.
38. இரு பகடைகள் வீசப்படுகின்றன. அவற்றில் i) கூடுதல் 10 ஆக
   ii) குறைந்தபட்சம் 10 ஆக இருக்க நிகழ்தகவைக் காண்க.
39. மூன்று பகடைகள் ஒருமுறை வீசப்படுகின்றன அவற்றின் கூடுதல்
   i) சரியாக 17 ஆக ii) அதிகபட்சம் 17 ஆக இருக்க வேண்டிய நிகழ்தகவைக் காண்க.
40. 20இலிருந்து 30க்குள் ஒரு முழுஎண் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அது ஒரு பகா எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
41. ஒரு முழு எண் 1 இலிருந்து 50க்குள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அது 5 இன் மடங்காகவோ. 7இன் மடங்காகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
42. ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுக்கப்பட்டால் அது ஸ்பேட் அல்லது டைமன்ட் ஆக இருக்க நிகழ்தகவைக் காண்க.
43. ஒரு லீப் வருடத்தில் 53 ஞாயிறுக்கிழமைகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
44. லீப் வருடம் அல்லாத சாதாரண ஆண்டில் 53 ஞாயிறுக்கிழமைகள் அல்லது 53 திங்கட் கிழமைகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
45. A, B என்பவை ஒன்றையொன்று விலக்காத நிகழ்ச்சிகளாகவும், $P(A)= 1/4$, $P(B) = 2/5$, $P(A \cup B) = 1/2$ ஆகவும் இருந்தால் $P(B|A)$ ஐக் காண்க
46. A, B என்ற இரு சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளுள் $P(A) = 1/2$ , $P(B) = 1/3$ எனில் ஏதேனும் ஒன்று வருவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க
47. A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளுள் $P(A) =1/3 = P(\overline{B})$, $P(B|A) =1/4$ எனில் $P(A|B)$ ஐக் காண்க.



48. ஒரு பெட்டியில் 4 சிவப்பு பேனாக்களும். 5 கருப்பு பேனாக்களும் உள்ளன. 3 கருப்பு நிற பேனாக்களை ஒன்றன் பின் ஒன்றாக எடுத்தால் i) திரும்ப வைக்கும் முறையில் ii) திரும்ப வைக்காத முறையில் ஏற்படும் நிகழ்தகவைக் காண்க.
49. ஒரு கொள்கலனில் 5 சிவப்பு, 7 பச்சை நிற பந்துகள் உள்ளன. மற்றொரு கொள்கலனில் 6 சிவப்பு, 9 பச்சை நிற பந்துகள் உள்ளன. ஒரு பந்து ஏதேனும் ஒரு கொள்கலனுக்குள் எடுக்கப்பட்டு, அது பச்சை நிறப் பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி.
50. ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து இரண்டு சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவை i) 'டைமண்ட்' மற்றும் 'ஸ்பேட்' ஆக ii) ஒரு ராஜா மற்றும் ஒரு ராணி iii) இரண்டு 'A'கள் ஆக இருக்க வேண்டிய நிகழ்தகவைக் காண்க.
51. ஒரு புள்ளியியல் கணக்கு A,B என்னும் இரு மாணவர்க்குத் தரப்படுகிறது. A என்பவர் அக்கணக்கின் தீர்வைக்காண்பதற்கான நிகழ்தகவு $1/2$ . B என்பவர்க்கு $2/3$ ஆகிறது எனில் அக்கணக்கு தீர்வு செய்யப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி
52. ஒரு பையில் 6 வெள்ளை, 4 பச்சை, 10 மஞ்சள் நிறப் பந்துகள் உள்ளன. இரண்டு பந்துகள் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகின்றன எனில் இரண்டுமே மஞ்சள் பந்துகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
53. ஒரு வகுப்பில் பயிலும் மாணவர்கள் A,B,C என்னும் பாடங்களைப் பயில்கிறார்கள். 21 மாணவர்கள் பாடம் A என்பதையும், 17 பேர் B பாடத்தையும் 10 பேர் C பாடத்தையும் படிக்கிறார்கள். 12 பேர் A மற்றும் B பாடங்களையும், 5 பேர் B மற்றும் C பாடங்களையும், 6 பேர் A மற்றும் C பாடங்களையும் படிக்கிறார்கள். 2 பேர் மூன்று பாடங்களையும் படிக்கிறார்கள் எனில் ஒரு மாணவர் ஏதேனும் ஒரு பாடத்தை மட்டும் படிப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
54. $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.2$, $P(C) = 0.1$ மேலும் A,B,C, என்பவை சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகும். அவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்று வருவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
55. A உண்மை பேசுவதற்கான சாதக விகிதம் 3 : 2 . B உண்மை பேசுவதற்கான சாதகவிகிதம் 5:3 இருவரும் ஒரு சமயத்தில் முரன்பட்டுப் பேசுவதற்கான நிகழ்தகவின் சதவீதம் என்ன ?

தலைமை அதிகாரியாக பொறுப்பேற்பதற்கான வாய்ப்புகள் முறையே 4 : 2 : 3 என்ற விகிதத்தில் அமைந்துள்ளன. அவர்கள் தலைமை அதிகாரிகளாக பொறுப்பேற்பின் போனஸ் திட்டத்தை செயல்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.3, 0.5 மற்றும் 0.4. அலுவலகத்தில் போனஸ் திட்டம் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டிருப்பின் Z தலைமையதிகாரியாக நியமனம் செய்யப்படுவதற்கான நிகழ்கதவினைக் காண்க.

57. இரும்புக் குழாய்கள் தயாரிக்கும் ஒரு நிறுவனத்தில் மூன்று உற்பத்திப்பிரிவுகள் உள்ளன. அவை முறையே 500, 1000, 2000 குழாய்களைத் தினசரி தயாரிக்கும் திறனுடையவை. முந்தைய அனுபவங்களின்படி அப்பிரிவுகளில் ஏற்படும் குறைபாடுடைய குழாய்களின் நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.005, 0.008 மற்றும் 0.010 ஆகும். தினசரி உற்பத்தியில் ஒரு குழாய் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு குறைபாடு உடையவை என்று காணப்படுமேயானால் அக்குழாய்

i) முதல் பிரிவு

ii) இரண்டாம் பிரிவு மற்றும்

iii) மூன்றாம் பிரிவில் வருவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

**விடைகள்:**

**I.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. (ஈ) | 2. (இ) | 3. (இ) | 4. (ஆ) | 5. (இ) |
| 6. (ஆ) | 7. (ஆ) | 8. (அ) | 9. (ஆ) | 10. (இ) |
| 11. (ஆ) | 12.(அ) | 13.(ஈ) | 14.(அ) | 15. (ஈ) |

**II.**

16. 1    17. 0

18. முந்தைய நிகழ்தகவு    19. கூட்டு நிகழ்ச்சிகள்

20. P(A) + P(B)    21. P(A). P(B)    22. $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

23. 0    24. $\frac{1}{8}$    25. $\frac{3}{216}$    26. $\frac{1}{18}$



36. $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$    37. $\frac{3}{8}; \frac{1}{4}; \frac{5}{16}$    38. $\frac{1}{12}; \frac{1}{6}$    39. $\frac{1}{216}, \frac{3}{216}, \frac{215}{216}$

40. $\frac{2}{11}$    41. $\frac{8}{25}$    42. $\frac{1}{2}$    43. $\frac{2}{7}$    44. $\frac{2}{7}$

45. $P(A\cap B) = 3/20$ ; $P(B|A) = 3/5$

46. $\frac{1}{2}$    47. $P(A\cap B) = 1/12$    $P(A|B)=1/8$

48. $\frac{125}{729}, \frac{5}{42}$    49. $\frac{71}{120}$    50. $\frac{13}{102}; \frac{8}{663}; \frac{1}{221}$

51. $\frac{5}{6}$    52. $\frac{9}{38}$    53. $\frac{8}{27}$

54. 0.496    55. $\frac{3}{5}\times\frac{3}{8}+\frac{2}{5}\times\frac{5}{8}=\frac{19}{40} = 47.5\%$

56. 6/17    57. (a) $\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{4}{7}$    (b) $\frac{5}{61}; \frac{16}{61}; \frac{40}{61}$

**செய்து பார்க்க:**

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும் போது, தலை வருவதற்கான நிகழ்தகவு 0.5 என்று அச்சோதனை செய்யாமலே கூறலாம். இப்போது பின்வரும் சோதனைகளைச் செய்து பார்க்க.

1. ஒரு பிழையற்ற நாணயத்தை எடுத்துக் கொண்டு 10 முறை சுண்டுக. அந்நிகழ்ச்சிகளில் எத்தனை தலைகள் வந்தன என்பதைக் குறித்துக்கொள்க.

2. இப்போது அதே நாணயத்தை 100 முறை சுண்டி, உமது நண்பர் குழாம் உதவியுடன், எத்தனை தலைகள் கிடைத்தன என்பதையும் பதிவு செய்க.

3. மேற்கண்ட மூன்றில் நீவிர் கற்றவற்றைத் தொகுத்து உன் கருத்தைக் கூறுக.

# 2. சமவாய்ப்பு மாறிகளும் கணித எதிர்பார்த்தலும்

## 2.0 அறிமுகம் :

ஒரு சோதனையை அதே சூழ்நிலைகளில் பலமுறை செய்யும்போது பெறப்படும் மதிப்புகள் யாவும் ஒரே மாதிரியாக இருக்கும் என்பது ஒரு பொதுவான கருத்தாகும். அச் சோதனையில் நாம் கவனிக்க வேண்டியது ஒரு கருத்தைப் பற்றியதாகவோ, ஒரு பண்பைப் பற்றியதாகவோ இருந்தால் அச்சோதனையின் போது அவற்றிற்குப் பல மதிப்புகள் அளிக்கலாம். இவ்வாறு இப்பண்பிற்கு அளிக்கப்படும் பல மதிப்புகள் மாறுபட்டு வருவதால் அதை மாறி என்று அழைக்கிறோம். மேலும் சோதனையை, அதே சூழ்நிலைகளில் செய்தாலும் மாறிகளுக்கான மதிப்புகள் மாறுபடுவதைக் காண்கிறோம். எனவே, ஒரு சம வாய்ப்புச் சோதனையில் வரும் விளைவுகளைக் (கூறுபுள்ளிகளைக்) கொண்டு, மாறுபட்டு வரும் மதிப்புகளால் ஆன ஒரு கணத்தை அமைக்கிறோம். இவ்வாறு ஒவ்வொரு விளைவிற்கும் (கூறுபுள்ளிக்கும்) ஒரு மெய்யெண் மதிப்பை அளிக்கும் மாறி சமவாய்ப்பு மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

மேற்கண்ட விளக்கங்களிலிருந்து ஒவ்வொரு விளைவிற்கும் ஒரு மதிப்பு அளிக்கப்பட்டு, அதற்குரிய நிகழ்தகவும் பெறப்படுகின்றது என்பது வெளிப்படை. எனவே, சமவாயப்பு மாறிகளின் மதிப்புகளுடன், அவற்றால் பெறப்பட்ட நிகழ்தகவுகளையும் கொண்ட பட்டியலிடப்பட்ட விவரங்கள் நிகழதகவுப்பரவல் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

நிகழ்தகவுப் பரவலில் நிகழ்தகவு திண்மை, நிகழ்தகவு அடர்த்தி, தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான மாறிகளுக்கான நிகழ்தகவுகள் போன்ற சொற்கள் வழக்கமாகப் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகின்றன. இவற்றைப்பற்றி விரிவாகக் காண்பதற்குமுன், சமவாய்ப்பு மாறியின் வரைமுறையும், அதைக் கணக்குகளில் செயல்படுத்தும் முறைகளும் இங்கு தரப்படுகின்றன.

## 2.1 சமவாய்ப்பு மாறி அல்லது ராண்டம் மாறி (Random variable):

ஒரு மாறியில் பெறப்படும் எண்கள், ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் விளைவுகளால் பெறப்பட்ட எண்களாக இருந்தால் அது சமவாய்ப்பு மாறி அல்லது ராண்டம் மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

சமவாய்ப்பு மாறியை ஒரு சார்பு என்றும் கூறலாம். அது ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் வரையறுக்கப்பட்ட கூறுவெளியில் உள்ள



ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும், குறிப்பிட்ட நிகழ்தகவை எடுக்கும் சார்பாகும். பொதுவாக சமவாய்ப்பு மாறிகள் X, Y, Z..., என்னும் பெரிய ஆங்கில எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படும். அதேபோல் சமவாய்ப்பு மாறிகளின் மதிப்புகள் x, y, z ... என்னும் ஆங்கில சிறிய எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படும்.

இரு நாணயங்களைச் சுண்டும்போது கிடைக்கும் கூறுவெளி S = {HH, HT, TH, TT} என்பதாகும். இதில் X என்பது தலைகள் விழுவதைக் குறிக்கும் என்றால், ஒவ்வொரு கூறுபுள்ளிக்கும் நாம் ஓர் எண்ணைத் தந்தால் அதைக் கீழ்கண்ட அட்டவணையில் பின்வருமாறு குறிப்போம்.

| கூறுபுள்ளி | HH | HT | TH | TT |
|---|---|---|---|---|
| X | 2 | 1 | 1 | 0 |

இவ்வாறு இச்சமவாய்ப்புச் சோதனையில், சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது, 0, 1, 2 மதிப்புகளைப் பெறுகிறது.

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் சமவாய்ப்பு மாறி முடிவுறு எண்களைக் கொண்டிருக்கிறது. இங்கு ஒவ்வொரு சமவாய்ப்பு மதிப்புகளுக்கும், அதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் பின்வருமாறு அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

பொதுவாக ஒவ்வொரு சமவாய்ப்புமாறி $x_i$ க்கும், அதற்குரிய நிகழ்கவை $p(x_i)$ அல்லது சுருக்கமாக $p_i$ என்று குறிப்பது வழக்கம்.

| X | $x_1 = 0$ | $x_2 = 1$ | $x_3 = 2$ |
|---|---|---|---|
| $P(x_i)$ | $p(x_1) = \frac{1}{4}$ | $p(x_2) = \frac{2}{4}$ | $p(x_3) = \frac{1}{4}$ |

இந்த அட்டவணையிலுள்ள எல்லா நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல் 1 என்பதைக் கவனிக்க.

$$\text{அதாவது } p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

எனவே சமவாய்ப்பு மாறிகளைக் கொண்ட நிகழ்தகவுப் பரவலில், அதன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும், அதற்குரிய நிகழ்தகவுகளையும், அந்நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல் 1 என்று அறிகிறோம்.

அது போல 3 நாணயங்கள் சுண்டப்படும் பொழுது, தலைகள் விழுவதற்கான சமவாய்ப்பு மாறி X=0, X=1, X=2, X=3 என்ற மதிப்புகளை ஏற்கிறது. மேலும் அவற்றிற்குரிய நிகழ்தகவுகளின்

கூடுதல், அதாவது $\sum p(x_i) = 1$ ஆகிறது.

இரு பகடைகள் உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் கூறுவெளியில், 36 கூறுபுள்ளிகள் உள்ளன. இங்கு X என்பது இரு பகடைகளில் விழும் எண்களின் கூடுதல் என்க. பின் X என்ற சமவாய்ப்புச் சார்பு S இல் வரையறுக்கப்பட்டு $X(i, j) = i + j$ என்ற விதியை உருவாக்குகிறது.

எனவே X என்ற சமவாய்ப்பு மாறி இங்கு 2, 3, 4,...12 என்ற மதிப்புகளை ஏற்கிறது. எனவே, X இன் வீச்சுகள் {2,3, 4, . . . 12} ஆகும்.

### 2.1.1 தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி அல்லது தொடர்ச்சியற்ற சமவாய்ப்பு மாறி (Discrete random variable):

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள் முடிவுறுவதாகவோ எண்ணிடத்தக்க அளவுள்ளதாகவோ இருப்பின், அது தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி அல்லது தொடர்ச்சியற்ற சமவாய்ப்பு மாறி என்று அழைக்கப்பபடுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, 3 நாணயங்கள் சுண்டப்படும் பொழுது, தலை விழுதல் என்பது சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனால், அது பெறும் மதிப்புகள் 0, 1, 2, 3 ஆகும். இது ஒரு எண்ணத்தக்க கணமாகும். இவ்வாறான மாறி ஒரு தனித்த மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

### 2.1.2 தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி (Continuous random variable):

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறி, இடைவெளியில் குறிப்பிட்ட திட்டமான எண்ணிலடங்கா எந்த மதிப்பையும் எடுக்குமாயின் அது தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியில் ஒரு தனித்த மதிப்புக்கு நிகழ்தகவு பூச்சியமாகும் என்பதை அறிக. அதாவது $P(X = x) = 0$ எனவே தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிகள், இரண்டு திட்டமான இடைவெளிகளுக்கு இடையில் மட்டுமே நிகழ்தகவைக் கொண்டிருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு வகுப்பில் மாணவர்களின் உயரமானது 4 அடிக்கும் 6 அடிக்கும் உட்பட்டது என்பதைச் சமவாய்ப்புமாறி $X = \{x \mid 4 \le x \le 6\}$ என்று எழுதுகிறோம்.

மின் விளக்கு தொடர்ச்சியாக உழைப்பதற்கான அதிகபட்ச நேரம் 2000 மணிகள் என்றால் அதன் தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியை $X = \{x \mid 0 \le x \le 2000\}$ என எழுதலாம்.



## 2.2. நிகழ்தகவுத் திண்மைச் சார்பு (Probability mass function):

X என்பது ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி. அது ஏற்கும் மதிப்புகள் $x_1, x_2, ..., x_n$ என்றும் இம்மதிப்புகள் இணைக்கப்படும் ஒவ்வோர் எண்ணும் நிகழ்தகவு $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1,2,3,\ldots,n$ எனப்படும். இச்சார்பானது $x_i$ இன் நிகழ்தகவு என்றும் பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்வதாகவும் இருக்கும்.

(i) $p_i \ge 0$ அதாவது $p_i$ எல்லாம் குறையற்ற எண்கள்

(ii) $\sum p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$
அதாவது எல்லா நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல் 1 ஆகும்.

இச்சார்பு $p_i$ அல்லது $p(x_i)$ என்பது தனித்த மாறி X இன் நிகழ்தகவுத் திண்மைச் சார்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

( x , p(x) ) என்ற வரிசைச் சோடிகளால் ஆன கணம், X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு பரவல் என்று அழைக்கப் படுகிறது.

**குறிப்பு:**

நிகழ்தகவு பரவல் என்ற கருத்து அலைவெண் பரவல் என்ற கருத்தைப் போன்றதே. அலைவெண் பரவலில், எவ்வாறு மொத்த அலைவெண்கள் பல பிரிவு இடைவெளிகளுக்குப் பங்கீடு செய்யப் பட்டிருக்கிறதோ, அது போல நிகழ்தகவுப் பரவலில் மொத்த நிகழ்தகவான 1 பகுதி என்பது, சமவாய்ப்பு மாறியேற்கும் பல்வேறு மதிப்புகளுக்குரிய நிகழ்தகவுகளால் பங்கிடப்பட்டுள்ளன.

இது அட்டவணையில் கீழ்கண்டவாறு எழுதப்படுகிறது.

| X | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | .... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $P(x_1)$ | $P(x_2)$ | $P(x_3)$ | .... | $P(x_n)$ |

### 2.2.1 தனித்த மாறிக்கான நிகழ்தகவுப்பரவல் (Discrete probability distribution):

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி தனித்த மாறியானால், பொதுவாக அதன் பரவலும் தனித்த மாறியாகவே இருக்கும். ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X க்கு, பரவல் சார்பு அல்லது குவிப் பரவல் சார்பு F(x) எனப்படும். அது $F(x) = P(X \le x); \; -\infty < x < \infty$ என்று எழுதப்படுகிறது.

எனவே தனித்த மாறிக்கான நிகழ்தகவுப் பரவலில் எண்ணக்கூடிய அளவிலான புள்ளிகள் $x_1, x_2, \ldots$ ஆகவும், அவற்றின்

நிகழ்தகவுகள் $p_i$ ஆகவும் இருக்க,

$F(x_i) = \sum_{x_i < x} p_i$ , i = 1, 2, …,n என்று குறிப்பிடப்படுகிறது.

**குறிப்பு:**

தனித்த மாறிக்கான நிகழ்தகவுப் பரவலில், $F(x_j) - F(x_{j-1}) = p(x_j)$ ஆகும்.

### 2.2.2. நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (Probability density function):

X என்ற தொடர் சமவாய்ப்புமாறியின், நிகழ்தகவு f(x) அடர்த்திச்சார்பாக இருக்க வேண்டுமாயின்,

(i) $f(x) \geq 0 \quad -\infty < x < \infty$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ என்ற பண்புகளைப் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

**குறிப்பு:**

தனித்த மாறியில் குறிப்பிட்ட ஒரு புள்ளியில் அதாவது $P(x = a)$ என்பது பூச்சியமாக இருக்க வேண்டியதில்லை. ஆனால் தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியில் ஒரு புள்ளியில் காணும் நிகழ்தகவு எப்போதும் பூச்சியத்தைத் தரும்.

அதாவது $$P(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

எனவே $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$ என்று எழுதலாம்.

f(x) என்ற நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்புக்கு, சமவாய்ப்பு மாறி X என்பது (a,b) என்ற இடைவெளியில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

**தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவல் சார்பு (Distribution function for continuous random variable):**

X ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி. அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு f(x) எனில் அதன் பரவல் சார்பு F(x) ஆனது



(i) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = P(X \leq x)\ ; \quad -\infty < x < \infty$

(ii) $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = P(a \leq X \leq b)$ ஆகும்.

### 2.3 பரவல் சார்பின் பண்புகள்:

X என்பது தனித்த அல்லது தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி எனில், பரவல் சார்பின் பண்புகள் பின்வருமாறு.

(i) F(x) என்பது X இல் குறைவற்ற சார்பு.

(ii) $0 \leq F(x) \leq 1\ , -\infty < x < \infty$

(iii) $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

(iv) $F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

(v) X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு f(x) ஆகவும், குவிவுபரவல் சார்பு F(x) ஆகவும் இருந்தால் $F'(x) = f(x)$ ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 1:**

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி பின்வரும் நிகழ்வுப்பரவலைப் பெற்றிருக்கிறது.

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P(x) | $a$ | $3a$ | $5a$ | $7a$ | $9a$ | $11a$ | $13a$ | $15a$ | $17a$ |

1. $a$ இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.
2. பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $P(x < 3)$ (ii) $P(x \leq 3)$ (iii) $P(x > 7)$ (iv) $P(2 \leq x \leq 5)$
(v) $P(2 < x < 5)$

3. குவிவு அலைவெண் பரவலைக் காண்க.

**தீர்வு:**

1. $p_i$ என்பது X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு திண்மைச் சார்பாதலால், $\Sigma p_i = 1$

$\therefore a + 3a + 5a + 7a + 9a + 11a + 13a + 15a + 17a = 1$

$81a = 1$

$a = 1/81$

2. (i) $P(x<3) = P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)$

$$= a + 3a + 5a$$
$$= 9a$$
$$= 9\left(\frac{1}{81}\right)$$
$$= \frac{1}{9}$$

(ii) $P(x \leq 3) = P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)$

$$= a + 3a + 5a + 7a$$
$$= 16a$$
$$= \frac{16}{81}$$

(iii) $P(x>7) = P(x=8)$

$$= 17a$$
$$= \frac{17}{81}$$

(iv) $P(2 \leq x \leq 5) = P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)+P(x=5)$

$$= 5a + 7a + 9a + 11a$$
$$= 32a$$
$$= \frac{32}{81}$$

(v) $P(2 < x < 5) = P(x=3)+P(x=4)$

$$= 7a + 9a$$
$$= 16a$$
$$= \frac{16}{81}$$

நிகழ்தகவுப் பரவல் சார்பு பின்வருமாறு.

| X = x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) = P(X≤ x) | $a$ | $4a$ | $9a$ | $16a$ | $25a$ | $36a$ | $49a$ | $64a$ | $81a$ |
| (or) F(x) | $\frac{1}{81}$ | $\frac{4}{81}$ | $\frac{9}{81}$ | $\frac{16}{81}$ | $\frac{25}{81}$ | $\frac{36}{81}$ | $\frac{49}{81}$ | $\frac{64}{81}$ | $\frac{81}{81} = 1$ |



**எடுத்துக்காட்டு 2:**

இரு பகடைகள் வீசப்படும்போது '6' என்ற எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காண்க.

**தீர்வு:**

இரு பகடைகள் வீசப்படும்போது கிடைக்கும் மொத்த கூறுபுள்ளிகள் 36 ஆகும்.

X என்பது பகடையை வீசும்போது கிடைக்கும் 6 என்ற எண்களின் எண்ணிக்கை என்றால், X இன் மதிப்புகள் 0, 1, 2 என்பதைப் பெறும்.

A என்பது 6 என்ற எண் கிடைப்பதையும் $\overline{A}$ என்பது 6 கிடைக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சியையும் குறிக்கட்டும்.

இதிலிருந்து '6' கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(A) = \frac{1}{6}$

'6' கிடைக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(\overline{A}) = \frac{5}{6}$

$$\therefore P(x=0) = P(\overline{A}, \overline{A})$$
$$= P(\overline{A}) . P(\overline{A})$$
$$= \frac{5}{6} . \frac{5}{6}$$
$$= \frac{25}{36}$$

ஒரு 6 மட்டும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$P(x=1) = P(A, \overline{A})$ அல்லது $P(\overline{A}, A)$

$$= P(A) . P(\overline{A}) + P(\overline{A}) . P(A)$$
$$= \frac{1}{6} . \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \frac{1}{6}$$
$$= \frac{5}{36} + \frac{5}{36}$$
$$= \frac{10}{36}$$
$$= \frac{5}{18}$$

இரண்டிலும் 6 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(x = 2) = P(A, A)$$

$$= P(A).P(A)$$

$$= \frac{1}{6}.\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{36}$$

எனவே X இன் நிகழ்தகவுப் பரவல்

| X = x | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P(X = x) | $\frac{25}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

**எடுத்துக்காட்டு 3:**

ஒரு கொள்கலனில் 6 சிவப்பு மற்றும் 4 வெள்ளை பந்துகள் உள்ளன. 3 பந்துகள் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகின்றன. வெள்ளைப் பந்துகள் பெறும் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்த நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பெறுக.

**தீர்வு:**

கொள்கலனில் உள்ள மொத்த பந்துகளின் எண்ணிக்கை 10. X என்பது வெள்ளைப் பந்துகள் எடுக்கப்படும் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கட்டும்.

3 பந்துகள் எடுக்கப்பட்டால் X பெறும் மதிப்புகள் X= 0, 1, 2, 3 ஆகும். மொத்தமுள்ள 10 பந்துகளிலிருந்து 3 வெள்ளைப் பந்துகளை எடுப்பது பின்வரும் சேர்மானங்களில் அமையும்.

P (வெள்ளை இல்லை, 3 சிவப்பு பந்துகள்) $= \frac{4C_0 6C_3}{10C_3}$

$$= \frac{1 \times 120}{720} = \frac{5}{30}$$

P(1 வெள்ளை, 2 சிவப்பு) $= \frac{4C_1.6C_2}{10C_3} = \frac{15}{30}$



P(2 வெள்ளை, 1 சிவப்பு) $= \frac{4C_2 6C_1}{10C_3} = \frac{9}{30}$

P(3 வெள்ளை, சிவப்பு இல்லை) $= \frac{4C_3 6C_0}{10C_3} = \frac{1}{30}$

எனவே X என்ற மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவல்

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P(X = x) | $\frac{5}{30}$ | $\frac{15}{30}$ | $\frac{9}{30}$ | $\frac{1}{30}$ |

## 2.4 நுண்கணிதத்தின் அடிப்படை செயல்கள் பற்றிய ஓர் அறிமுகம் (An introduction to elementary calculus):

தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியில் அமைந்த கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண்பதற்கு முன், நுண் கணிதத்தில் (**calculus**) உள்ள வகையிடல் (**Differentiation**) மற்றும் தொகையிடல் (**Integration**) என்பவை பற்றிய அடிப்படைக் கருத்துக்களை நாம் தெரிந்துகொள்ள வேண்டியிருக்கிறது.

எனவே, இப்பகுதியில் நுண்கணிதத்தைப் பயன்படுத்திச் செய்யக்கூடிய கணக்குகளுக்கு ஏற்ப, நுண்கணிதத்தைப் பற்றிய சில விளக்கங்களும், சூத்திரங்களும் எளிய முறையில் தரப்படுகின்றன.

### 2.4.1 வகையிடல் (Differentiation):

1. சார்பின் மதிப்பு என்பது மிகச் சரியான மதிப்பாகும். f(x) என்ற சார்பிற்கு $x = a$ என்று பிரதியிட்டுக் கிடைக்கக் கூடிய சார்பின் மதிப்பை $f(a) = k$ என்று எழுதுகிறோம்.
2. எல்லை மதிப்பு என்பது தோராயமான மதிப்பாகும். ஆனால் இம்மதிப்பு மிகச் சரியான மதிப்பை மிகவும் நெருங்கியிருக்கும் மதிப்பாகும். மிகச் சரியான மதிப்பு 4 எனக் கொள்க. நாம் பெறும் எல்லை மதிப்பானது 4.00000000001 ஆகவோ, 3.999999994 ஆகவோ இருக்கும். இங்கு மிகச் சரியான மதிப்பும், எல்லை மதிப்பும் ஏறத்தாழ சமமாகவே இருப்பதைக் காண்கிறோம். எனவே பல சமயங்களில் சிக்கலான கணக்குகளுக்கு நாம் எல்லை மதிப்புகளைப் பயன்படுத்துகிறோம். f(x) என்ற சார்பில் x என்பது 2ஐ நோக்கி மிக நெருங்கிச் சென்றால் *l* என்ற எண் கிடைக்கும் என்பதைக் குறியீடாக பின்வருமாறு எழுதுகிறோம்.

$$\underset{x \to 2}{\text{Limit}}\ f(x) = f(2) = l$$

3.எல்லை மதிப்புகளில், ஒரு சிறப்பான எல்லை மதிப்பான $\underset{h\to 0}{\text{limit}} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ என்பது இருக்குமேயானால், அந்த எல்லை x ஐப் பொருத்த f என்ற சார்பின் வகைக்கெழு என்கிறோம். அதனை $f'(x)$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

4. வகையிடலில் சில விதிகள்:

(i) மாறிலியின் வகைக்கெழு பூச்சியம். அதாவது $f'(c)=0$, c என்பது ஒரு மாறிலி.

(ii) u என்பது x இன் சார்பு, k என்பது மாறிலி, மற்றும் வகையிடலைக் குறிக்க ′ (dash) என்ற குறியை இடுவோம் எனில் $[ku]' = k[u]'$

(iii) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(iv) $(uv)' = u'v + uv'$

(v) $\left[\dfrac{u}{v}\right]' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

5. முக்கியமான சூத்திரங்கள்:

(i) $(x^n)' = nx^{n-1}$

(ii) $(e^x)' = e^x$

(iii) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

**எடுத்துக்காட்டு 4:**

பின் வருவனவற்றிற்கு எல்லை மதிப்புகளைக் காண்க:

(i) $\underset{x\to 2}{\text{Limit}} \dfrac{x^2+5x}{x+2}$ (ii) $\underset{x\to 1}{\text{Limit}} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

**தீர்வு:**

(i) $\underset{x\to 2}{\text{Limit}} \dfrac{x^2+5x}{x+2} = \dfrac{(2)^2+5(2)}{2+2} = \dfrac{4+10}{4} = \dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2}$



(ii) $\underset{x\to 1}{\text{Limit}} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{1^2-1}{1-1} = \dfrac{0}{0}$. இது ஒரு தீர்மானிக்க முடியாத எண்.

எனவே முதலில் கோவையை காரணிப்படுத்திச் சுருக்கியபின் அதே எல்லையை அளிக்க, எல்லை மதிப்பை நாம் பெறலாம்.

$$\therefore \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1$$

$$\therefore \underset{x\to 1}{\text{Limit}} \frac{x^2-1}{x-1} = \underset{x\to 1}{\text{Limit}}\,(x+1) = 1+1 = 2$$

**எடுத்துக்காட்டு 5:**

பின்வருவனவற்றை x ஐப் பொருத்து வகையிடுக.

(i) $x^{12}+7$ (ii) $(x^4+4x^2-5)$ (iii) $(x^3)(e^x)$ (iv) $\dfrac{x^2+1}{x-5}$

:

(i) $y = x^{12}+7$ என்க

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 12x^{12-1}+0 = 12x^{11}$$

(ii) $y = x^3+4x^2-5$

$y' = 4x^3 + 4(2x) - 0$

$= 4x^3 + 8$

(iii) $y = x^3 e^x$

$(uv)' = u'v + uv'$

$= [x^3]'(e^x) + (x^3)[e^x]'$

$= 3x^2 e^x + x^3 e^x$

$= e^x(3x^2+x^3)$

(iv) $y = \dfrac{x^2+1}{x-5}$. $\left[\dfrac{u}{v}\right]' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{[x^2+1]'(x-5)-(x^2+1)[x-5]'}{(x-5)^2}$$

$$= \frac{[2x](x-5)-(x^2+1)[1]}{(x-5)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 10x - x^2 - 1}{(x-5)^2} = \frac{x^2 - 10x - 1}{(x-5)^2}$$

### 2.4.2. தொகையிடல் (Integration) :

தொகையிடல் என்பது, வகையிடல் என்பதின் எதிர்மறைச் செயலாகும். அதாவது $x^3$ இன் வகையீட்டுக் கெழு $3x^2$ எனில் $3x^2$ இன் தொகை $x^3$ ஆகும். இவற்றைப் பின்வருமாறு குறியீட்டில் எழுதலாம்.

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 \qquad \Rightarrow 3\int x^2 dx = x^3$$

அது போல

$$\frac{d}{dx}(x^8) = 8x^7 \qquad \Rightarrow 8\int x^7 dx = x^8$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \Rightarrow \int e^x dx = e^x$$

**குறிப்பு:**

வகைப்படுத்தும்போது மாறிலிகள் பூச்சியமாகின்றன. ஆனால் எதிர்மறைச் செயலான தொகையிடலில், மாறிலியின் மதிப்பு தெரியாவிட்டால் அதைச் சேர்க்க இயலாது. எனவே தொகையிடும் போது கிடைக்கும் மதிப்புடன் c என்ற மாறிலியைச் சேர்க்கிறோம்.

எனவே மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளை $\int e^x dx = e^x + c$ , $\int 8x^7 dx = x^8 + c$ என்று எழுதுவது வழக்கம்.

இவ்வாறு கிடைக்கும் தொகைகள் அறுதியற்ற தொகைகள் அல்லது வரையற்ற தொகைகள் (indfinite integrals) என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

**தொகையிடலில் உள்ள முக்கிய விதிகளும், சூத்திரங்களும் :**

(i) $\int k\, dx = kx$

(ii) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

(iii) $\int e^x dx = e^x$



(iv) $\int \dfrac{1}{x} dx = \log x$

(v) $\int (u \pm v)dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx$

**எடுத்துக்காட்டு 6:**

x ஐப் பொருத்து பின்வருவனவற்றிற்குத் தொகை காண்க.

(i) $\int x^6 dx = \dfrac{x^{6+1}}{6+1} = \dfrac{x^7}{7} + c$

(ii) $\int x^{-5} dx = \dfrac{x^{-5+1}}{-5+1} = \dfrac{x^{-4}}{-4} = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{x^4} = -\dfrac{1}{4x^4} + c$

(iii) $\int \dfrac{1}{x} dx = \log x + c$

(iv) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \dfrac{x^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3} x^{3/2} + c$

(v) $\int (x^4 + 2x^2 + 4x + 8)\, dx$

$= \dfrac{x^5}{5} + 2\dfrac{x^3}{3} + 4\dfrac{x^2}{2} + 8x + c$

(vi) $\int (e^x + x^4 + 1/x^3 + 10)\, dx$

$= e^x + x^5/5 - 1/2x^2 + 10x + c$

மேலே எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்கப்பட்ட தொகைகள் அறுதியற்ற தொகைகள்(indefinite integral) அல்லது வரையற்ற தொகைகள் எனப்படும். வரையறுத்த தொகைகள் என்னும் தொகைகளுக்கு கீழ் எல்லையும் மேல் எல்லையும் உண்டு.

$\int f(x)dx$ என்பது ஒரு வரையற்ற தொகையாகும். அதே சார்புக்குத் தொகைகண்டு அதை ஒரு வரையறைக்குள் $a$, $b$ என்ற எல்லைக்குள் அமைத்தால் அது வரையறுத்த தொகை (definite integral) எனப்படும்.

அதாவது $\int_a^b f(x)dx = k$ (ஒரு நிலையெண்) என்பது ஒரு வரையறுத்த தொகையாகும். $a$ என்பது கீழ் எல்லை எனவும் $b$ என்பது மேல் எல்லை எனவும் கூறப்படும்.

வரையறுத்த தொகையின் மதிப்பைக் காண பின்வரும் விதிமுறையைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$\int f(x)\,dx = F(x)$ எனில்

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ஆகும்.

| **ஆசிரியர்க்கும் மாணவர்க்கும் ஒரு முக்கிய குறிப்பு:** புள்ளியியல் கணக்குகளைப் பொறுத்த அளவில் வகையிடல் மற்றும் தொகையிடல் முறைகளில் எளிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளால் ஆன சார்புகளே பயன்படுத்தப்பட வேண்டும். |
|---|

**எடுத்துக்காட்டு 7:**

மதிப்பிடுக:

(i) $\int_0^4 3x^2dx$  (ii) $\int_1^3 x^3dx$  (iii) $\int_2^5 xdx$

**தீர்வு:**

(i) $\int_0^4 3x^2dx = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_0^4 = \int(u\pm v)c$

$= 4^3 - 0^3 = 64$

(ii) $\int_1^3 x^3dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3$

$= \frac{1}{4}[x^4]_1^3$

$= \frac{1}{4}[3^4 - 1^4]$



$= \frac{1}{4}[81 - 1]$

$= \frac{1}{4}[80]$

$= 20$

(iii) $\int_2^5 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^5$

$= \frac{1}{2}[5^2 - 2^2]$

$= \frac{1}{2}[25 - 4] = \frac{21}{2}$

**எடுத்துக்காட்டு 8:**

X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியில் அமைந்த சார்பு $f(x) = 5x^4,\ 0 < x < 1$ ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகுமா என்பதை ஆராய்க.

**தீர்வு:**

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பானால் $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ எனக் காட்ட வேண்டும். அதாவது $\int_0^1 5(x)^4\,dx = 1$ எனக் காட்ட வேண்டும்.

$\int_0^1 5(x)^4\,dx = 5\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$

$= \frac{5}{5}\left[x^5\right]_0^1$

$= [1^5 - 0] = 1$

$\therefore$ f(x) என்பது ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு.

**எடுத்துக்காட்டு 9:**

ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி X என்பது $f(x) = Ax^2$, $0 < x < 1$.என்ற விதிக்கு உட்பட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகும் எனில் A இன் மதிப்பைக் காண்க.

**தீர்வு:**

f(x) ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாதலால் $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_0^1 Ax^2\,dx = 1$$

$$A\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1$$

$$\frac{A}{3}\left[x^3\right]_0^1 = 1$$

$$\frac{A}{3}[1] = 1$$

$$A = 3$$

**எடுத்துக்காட்டு 10:**

$f(x) = c(1-x)\,x^2$, $0 < x < 1$ என்பது ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில், c இன் மதிப்பைக் காண்க.

**தீர்வு:**

$f(x) = c\,(1-x)\,x^2$, $0 < x < 1$

$f(x)$ என்பது ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாதலால் $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\therefore \int_0^1 c(x^2 - x^3)dx = 1$$

$$c\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)_0^1 = 1$$

$$c\left[\left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4}\right) - (0-0)\right] = 1$$

$$c\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1$$



$$c\left(\frac{1}{12}\right) = 1$$

$$c = 12$$

**எடுத்துக்காட்டு 11:**

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X பின்வரும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைப் பெற்றுள்ளது.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -2 < x < 2 \\ 0, & \end{cases}$$ எனில்

(i) $P(-1 < x < 2)$ (ii) $P(x > 1)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

**தீர்வு:**

(i) $$P(-1 < x < 2) = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}\left[x\right]_{-1}^{+2}$$

$$= \frac{1}{4}\,[2-(-1)]$$

$$= \frac{1}{4}\,[3]$$

$$= \frac{3}{4}$$

இங்கு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் மேல் எல்லை 2 ஆகும். எனவே கொடுக்கப்பட்ட எல்லைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு.

$$P(x > 1) = \int_1^2 \frac{1}{4}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\,[x]_1^2$$

$$= \frac{1}{4}[2-1]$$

$$= \frac{1}{4}[1]$$

$$= \frac{1}{4}$$

## 2.5 கணித எதிர்பார்த்தல் (Mathematical Expectation):

எதிர்பார்த்தல் (Expectation) என்ற அடிப்படைக் கருத்தானது தீர்மானிக்கும் கொள்கை, மேலாண்மை அறிவியல், பகுப்பாய்வுக் கொள்கை, விளையாட்டுக் கொள்கை போன்றவற்றிலும் மேலும் பல துறைகளிலும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. எதிர்பார்த்தலின் சில பயன்பாடுகள் நம் பாடத்திலுள்ள தீர்மானிக்கும் கொள்கை என்ற பகுதயிலும் விளக்கப்படுகின்றது.

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு அல்லது கணித எதிர்பார்த்தல் என்பது, X இன் நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரியாகும். அதன் நிறைகளாக, அச்சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகளுக்குரிய நிகழ் தகவுகள் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன.

X என்ற ஒரு சமவாய்ப்புமாறி ஏற்கும் மதிப்புகளை அதற்குரிய நிகழ்தகவுகளால் பெருக்கி அப்பெருக்கல் பலன்களைக் கூட்டக் கிடைப்பதே எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு எனப்படுகிறது.

### 2.5.1. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறிக்கான கணித எதிர்பார்த்தல் :

X என்பது ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி. அது $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ என்ற மதிப்புகளை, முறையே, அதற்குரிய நிகழ்தகவுகளாக $p_1$, $p_2$, $p_3 \ldots\ldots p_n$ எனக் கொண்டு ஏற்கிறது. அவ்வாறெனின் X இன் கணித எதிர்பார்த்தல்.

$$E(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots\ldots\ldots x_np_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_ip_i\ ,\quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \text{ எனப்படுகிறது.}$$

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் கணித எதிர்ப்பார்த்தலின் தேற்றங்கள் சிலவற்றைப் பயன்பாட்டிற்காக நிரூபணம் இன்றித் தருவோம்.



### 2.5.2 எதிர்பார்த்தலின் தேற்றங்கள்:

1. X ,Y என்ற இரு சமவாய்ப்பு மாறிகளுக்கு E(X) ,E(Y) இருக்குமானால், E(X + Y) = E(X) + E(Y) ஆகும். இது எதிர்பார்த்தலீன் கூட்டல் தேற்றம் எனப்படுகிறது.
2. X ,Y என்ற இரு சார்பற்ற சமவாய்ப்பு மாறிகளுக்கு எதிர்பார்த்தல் மதிப்புகளும் இருக்குமானால் E(XY) = E(X).E(Y) ஆகும். இது எதிர்பார்த்தலின் பெருக்கல் தேற்றம் எனப்படுகிறது.
3. எதிர்பார்த்தலின் மாறிலி மதிப்பு அதே மாறிலி ஆகும்.
   அதாவது E(C) = C
4. E(cX) = cE(X)
5. $E(aX+b) = aE(X) + b$
6. மாறிலியின் பரவல்படி (Variance) பூச்சியமாகும் அதாவது
   Var(c) = 0
7. Var(X+c) = Var X
   (குறிப்பு: இத்தேற்றம் ஆதியை மாற்றினால் பரவல்படி மாறாது என்பதைத் தெரிவிக்கிறது).
8. $\text{Var}(aX) = a^2\ \text{var}(X)$
   (குறிப்பு: இத்தேற்றம் அலகு மாற்றத்தினால் பரவல்படி மாறும் என்பதைத் தெரிவிக்கிறது).
9. $\text{Var}(aX+b) = a^2\text{Var}(X)$
10. $\text{Var}(b-aX) = a^2\ \text{Var}(X)$

#### குறிப்பு:

'variance' என்ற சொல்லை புள்ளியியலில் மாறுபாட்டளவை, விலக்க வர்க்க சராசரி, பரவல்படி என்று பலவாறாகக் கூறுவர்.

#### வரையரை:

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் சார்பு f(x) எனில், f(x) இன் எதிர்பார்த்தல் $E(f(x)) = \Sigma f(x) P(X=x)$ எனப்படுகிறது. அதில் என்பது P(X=x) இன் நிகழ்தகவுச் சார்பு ஆகும்.

#### சில குறிப்பிட்ட முடிவுகள்:

1. $f(x) = X^r$ என எடுத்துக் கொண்டால் $E(X^r) = \Sigma x^r p(x)$ என்பதை A என்னும் ஆதியை யொட்டிய r ஆவது விலக்கப்

பெருக்குத்தொகை ($r^{th}$ **moment about origin**) என்கிறோம். அதை $\mu'_r$ எனக் குறிக்கிறோம்.

எனவே $\mu'_r = E(X^r)$

$$\mu'_1 = E(X)$$
$$\mu'_2 = E(X^2)$$

இங்கு சராசரி $= \overline{X} = \mu'_1 = E(X)$ ஆகும்.

மாறுபாட்டளவை $= \dfrac{\Sigma x^2}{N} - \left[\dfrac{\Sigma x}{N}\right]^2$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$

மாறுபாட்டளவை (Variance) $\mu_2$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

$f(x) = (X - \overline{X})^r$ எனில்

$$E(X - \overline{X})^r = \Sigma(X - \overline{X})^r\, p(x)$$

என்பதை ($r^{th}$ **moment about mean or** $r^{th}$ **central moment**) r ஆவது மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை என்கிறோம். அது $\mu r$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

குறிப்பாக r = 2 எனில்

$$\mu_2 = E(X - \overline{X})^2$$
$$= \Sigma(X - \overline{X})^2\, p(X)$$
$$= E[X - E(X)]^2$$
$$= E(X) - E(X)]^2$$ ஆகும்.

இந்த இருவிதிகளும், எதிர்பார்த்தல் மூலம் நிகழ்தகவின் மாறுபாட்டளவையைக் காண உதவுகின்றன.

**எடுத்துக்காட்டு 12:**

ஒரு பகடையை வீசும்போது ஏற்படும் விளைவுகள் X எனில், X இன் எதிர்பார்த்தலைக் காண்க.

**தீர்வு:**

இங்கு ஒரு பகடையை வீசுவதால் ஏற்படும் விளைவுகள் 1, 2, 3, 4, 5 மற்றும் 6 என்ற எண்களாகும். இவை ஒவ்வொன்றும் $\frac{1}{6}$ என்ற



நிகழ்தகவைக் கொண்டிருக்கும். எனவே இவற்றின் நிகழ்தகவுப் பரவல் பின்வருமாறு:

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p(x) | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

எனவே X இன் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு

$$E(X) = \Sigma x_i p_i$$
$$= x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 + x_5p_5 + x_6p_6$$
$$E(X) = \left[1\times\frac{1}{6}\right] + \left[2\times\frac{1}{6}\right] + \left[3\times\frac{1}{6}\right] + \left[4\times\frac{1}{6}\right] + \left[5\times\frac{1}{6}\right] + \left[6\times\frac{1}{6}\right]$$
$$= \frac{7}{2}$$
$$E(X) = 3.5$$

**குறிப்பு:**

வாய்ப்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட விளையாட்டுகளில், எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு, விளையாட்டின் மதிப்பாக, விளையாடுவோரால் எடுத்துக் கொள்ளப் படுகிறது. எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு மிகை எண்ணாக இருந்தால் அது சாதகமான மதிப்பு என்றும், குறை எண்ணாக இருந்தால் அது சாதகமற்ற மதிப்பு என்றும் கருதப்படுகிறது. எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு பூச்சியம் என்றால் இரண்டுமற்ற நிலை என்று கூறப்படுகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 13:**

ஒருவர் நல்ல பகடை ஒன்றை வீசுகிறார். அதில் பகா எண் வந்தால் வரும் எண்ணிற்குரிய பணத்தை எடுத்து வெற்றி பெறுகிறார். மற்ற எண் வந்தால் அந்த எண்ணுக்குரிய பணத்தைக் கொடுத்து தோல்வியுறுகிறார் எனில் விளையாடுபவரின் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பைக் கணித்து உன் கருத்தைக் கூறுக.

**தீர்வு:**

ஒரு பகடையை வீசுவதால் கிடைக்கும் ஆறு விளைவுகளுக்கும் குறிப்பிட்ட பணம் லாபமாகவோ, நஷ்டமாகவோ தரப்படுகிறது. எனவே எதிர்பார்த்தல் மதிப்பைக் காண அவ்விளைவுகளுக்கான பணமதிப்பு அளிக்கப்படுகிறது. இதை X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியாகக் குறிப்போம். இவற்றைப் பின்வருமாறு அட்டவணையில் எழுதலாம்.

| பகடையில் ஏற்படும் விளைவுகள் | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| அதையொட்டிய விளைவுகளின் பயன்கள் ($x_i$) | -1 | 2 | 3 | - 4 | 5 | - 6 |
| $P(x_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

2, 3, 5 என்பவை பகா எண்கள் என்பதறிக.

$$E(x) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i$$

$$= (-1)\left[\frac{1}{6}\right] + (2)\left[\frac{1}{6}\right] + (3)\left[\frac{1}{6}\right] + (-4)\left[\frac{1}{6}\right] + (5)\left[\frac{1}{6}\right] + (-6)\left[\frac{1}{6}\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{6}\right]$$

இவ்விளையாட்டின் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு குறையெண்ணாக இருப்பதால், இது விளையாடுவோர்க்குச் சாதகமற்றது எனத் தெரிகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 14:**

ஒரு கொள்கலனில் 7 வெள்ளை மற்றும் 3 சிவப்பு நிறப்பந்துகள் உள்ளன. இரு பந்துகள் ஒருங்கே சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகின்றன. வெள்ளைப்பந்துகள் வருவதற்கான எதிர்பார்த்தலைக் காண்க.

**தீர்வு:**

கொள்கலனில் உள்ள 7 வெள்ளை மற்றும் 3 சிவப்பு நிறப் பந்துகளில், இரு பந்துகள் $10C_2$ வழிகளில் எடுக்கலாம்.



X என்பது வெள்ளைப் பந்துகளை எடுக்கக் குறிப்பிடப்படுமானால், X இன் மதிப்புகள் 0, 1, 2 ஆக இருக்கும். எனவே, X இன் நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பின்வருமாறு பெறலாம்.

P(0) = பந்துகள் இரண்டும் வெள்ளை நிறமற்று இருக்க நிகழ்தகவு

(அல்லது)

பந்துகள் இரண்டும் சிவப்பு நிறமாக இருக்க நிகழ்தகவு

$$= \frac{3C_2}{10C_2} = \frac{3\times 2}{10\times 9} = \frac{1}{15}$$

P(1) = 1 வெள்ளை, 1 சிவப்பாக இருக்க நிகழ்தகவு

$$= \frac{7C_1\times 3C_1}{10C_2} = \frac{7\times 3\times 2}{10\times 9} = \frac{7}{15}$$

P(2) = 2 வெள்ளை நிறமாக இருக்க நிகழ்தகவு

$$= \frac{7C_2}{10C_2} = \frac{7\times 6}{10\times 9} = \frac{7}{15}$$

எனவே இரு வெள்ளை நிறப்பந்துகள் வருவதற்கான எதிர்பார்த்தல்,

$$E(x) = \Sigma\, x_i\, p(x_i) = \left[0\times\frac{1}{15}\right] + \left[1\times\frac{7}{15}\right] + \left[2\times\frac{7}{15}\right]$$

$$= \frac{7}{5} = 1.4$$

**எடுத்துக்காட்டு 15:**

தொலைகாட்சிப் பெட்டிகளை விற்பனை செய்யும் ஒருவர், ஒரு நாளில் விற்பனையாகும் தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கையின் நிகழ்தகவுகளைத் தமது முந்தைய விற்பனை விவரங்களிலிருந்து தந்திருக்கிறார். ஒரு நாளில் அவரது விற்பனை எண்ணிக்கையின் எதிர்பாத்தலைக் காண்க.

| விற்பனையான தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| நிகழ்தகவு | 0.02 | 0.10 | 0.21 | 0.32 | 0.20 | 0.09 | 0.06 |

**தீர்வு:**

ஒரு நாளில் விற்பனையாகும் தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியில் அமைந்துள்ளது எனில், அது ஏற்கும் மதிப்புகள் 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகவும் அதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

X இன் எதிர்பார்த்தல் = $E(X) = \Sigma x_i p_i$

$= x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 + x_5p_5 + x_6p_6$

$= (0)(0.02) + (1)(0.010) + 2(0.21) + (3)(0.32) + 4(0.20) + (5)(0.09) + (6)(0.06)$

$E(X) = 3.09$

அதாவது $E(X) = 3$

**எடுத்துக்காட்டு 16:**

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறி பின்வரும் நிகழ்தகவுப் பரவலைக் கொண்டிருக்கிறது.

எனில் சராசரி, மாறுபாட்டளவையைக் காண்க.

| X | -3 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|
| P(X= x) | 1/6 | 1/2 | 1/3 |

**தீர்வு:**

$$E(x) = \Sigma x_i p_i$$
$$= (-3)\left[\frac{1}{6}\right] + (6)\left[\frac{1}{2}\right] + (9)\left[\frac{1}{3}\right]$$
$$= \left[\frac{11}{2}\right]$$

$$E(x^2) = \Sigma x_i^2 p_i$$
$$= (-3)^2\left[\frac{1}{6}\right] + (6)^2\left[\frac{1}{2}\right] + (9)^2\left[\frac{1}{3}\right] = \left[\frac{93}{2}\right]$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$



$$= \left[\frac{93}{2}\right] - \left[\frac{11}{2}\right]^2$$
$$= \left[\frac{93}{2}\right] - \left[\frac{121}{4}\right]$$
$$= \frac{186-121}{4}$$
$$= \frac{65}{4}$$

எனவே கூட்டுச்சராசரி 11/2 , மாறுபாட்டளவை = 65/4 ஆகும்.

### 2.5.3 தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிக்கான கணித எதிர்பார்த்தல் (Expectation of a continuous random variable):

X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு f(x) எனில் X இன் கணித எதிர்பார்த்தல் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$ , தொகையிடல் இருக்குமெனில்

**தீர்வு:**

g(x) என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறிச்சார்பு மேலும் E[g(x)] இருக்குமெனில்

$$E[(g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)dx$$ ஆகும்

**எடுத்துக்காட்டு 17:**

X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு $f(x) = 4x^3, 0 < x < 1$ எனில் , X இன் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பைக் காண்க.

**தீர்வு:**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

இக்கணக்கில் $E(X) = \int_{0}^{1} x(4x^3)dx$

$$= 4\int_0^1 x(x^3)\,dx$$

$$= 4\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{5}\left[x^5\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{5}\,[1^5 - 0^5]$$

$$= \frac{4}{5}[1] = \frac{4}{5}$$

**எடுத்துக்காட்டு 18:**

X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = 3x^2,\ 0 < x < 1$ எனில் கூட்டுச்சராசரியையும் மாறுபாட்டளவையையும் காண்க.

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

$$E(x) = \int_0^1 x[3x^2]\,dx$$

$$= 3\int_0^1 x^3\,dx$$

$$= 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{4}\left[x^4\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{4}\left[1^4 - 0\right]$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2[3x^2]\,dx$$

$$= 3\int_0^1 x^4\,dx$$

$$= 3\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{5}\left[x^5\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{5}\left[1^5 - 0\right] = \frac{3}{5}$$

மாறுபாட்டளவை $= E(x^2) - [E(x)]^2$

$$= \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \frac{3}{5} - \frac{9}{16}$$

$$= \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80}$$

## 2.6 விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு (Moment Generating Function (M.G.F)) :

விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் (**Moments**) காண்பதற்கு, விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு (**Moment generating function**) ஒரு சிறந்த கருவியாக விளங்குகிறது. இது கணித எதிர்பார்த்தலில் ஒரு சிறந்த வடிவமாகும். இது நிகழ்தகவுப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை உருவாக்கப் பயன்படுகிறது.

**வரையறை:**

X ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனில் $e^{tX}$ இன் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு, விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு எனப்படுகிறது. இதில் ஒவ்வொரு t மதிப்பிற்கும், $-h < t < h$ என்ற இடைவெளியில்

எதிர்பார்த்தல் மதிப்பைப் பெற்றிருக்க வேண்டும். (h ஒரு மிகை மெய்யெண்).

விலக்கப் பெருக்குத்தொகை **(M.G.F)** உருவாக்கும் சார்பு $M_x(t)$ என்று குறிப்பிடப்படுகிறது.

தனித்த சமவாய்ப்பு மாறிக்கான மைய விலக்க பெருக்குத் தொகை,

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$
$$= \Sigma\, e^{tx}\, p(x)$$
$$= \Sigma \left(1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \ldots\ldots\right) p(x)$$
$$M_x(t) = \left(1 + t\mu_1' + \frac{t^2}{2!}\mu_2' + \frac{t^3}{3!}\mu_3' + \ldots\ldots\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!}\mu_r'$$

மேற்கண்ட கோவையில், ஆதியை யொட்டிய r ஆவது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை, $\frac{t^r}{r!}$ இன் குணகமாகக் கிடைக்கிறது. பெருக்குத் தொகைகளைக் காண்பதற்கு, விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பை, t ஐப் பொருத்து, ஒருமுறை, இருமுறை, மூன்றுமுறை . . . வகைப்படுத்தி அதில் t = 0 என்பதை பிரதியிட, நாம் முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது . . . விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைப் பெறலாம்.

இதிலிருந்து மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் (central moments) காண்பதற்கு இரண்டிற்குமுள்ள தொடர்பு விதிகளைப் பயன்படுத்திப் பெறலாம்.

### 2.7 சிறப்பியல்புச் சார்பு (Charecteristic function):

விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு எல்லாப் பரவல்களுக்கும் வரையறுக்க இயலாது. எனவே எல்லாப் பரவல்களுக்கும் பொருந்தக்கூடிய சார்பாக விளங்கும் மற்றொரு சார்பான சிறப்பியல்புச் சார்பு **(Characteristic function)** இங்கு அறிமுகப்படுத்தப்படுகிறது.

இது $e^{itx}$ இன் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பாகும். இதில் $i = \sqrt{-1}$, t என்பது மெய்மதிப்பைக் கொண்டதாகும்.

x என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் சிறப்பியல்புச் சார்பு $\phi_x(t)$ என்று குறிப்பிடப்படுகிறது.



X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு f(x) எனில், சிறப்பியல்புச் சார்பு $\phi_x(t) = \int_a^b e^{itx} f(x)dx$ , $a < x < b$ ஆகும்.

## பயிற்சி - 2

### I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்:

1. $\sum_{i=1}^{n} p(x_i)$ என்பது

   (அ) 0 (ஆ) 1 (இ) −1 (ஈ) ∞

2. F(x) என்பது ஒரு பரவல் சார்பானால் $F(-\infty)$ என்பது

   (அ) −1 (ஆ) 0 (இ) 1 (ஈ) $-\infty$

3. கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமவாய்ப்பு மாறி அட்டவணையில் $a$ இன் மதிப்பு

| X = x | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | $a$ | $2a$ | $a$ |

   (அ) 1 (ஆ) $\frac{1}{2}$ (இ) 4 (ஈ) $\frac{1}{4}$

4. . E(2x+3) என்பது

   (அ) E(2x) (ஆ) 2E(x) +3 (இ) E(3) (ஈ) 2x+3

5. Var(x+8) என்பது

   (அ) var (8) (ஆ) var(x) (இ) 8 var(x) (ஈ) 0

6. Var(5x+2) என்பது

   (அ) 25 var (x) (ஆ) 5 var (x) (இ) 2 var (x) (ஈ) 25

7. சமவாய்ப்பு மாறி X இன் மாறுபாட்டளவை

   (அ) $E(x^2) - [E(x)]^2$ (ஆ) $[E(x)]^2 - E(x^2)$
   (இ) $E(x^2)$ (ஈ) $[E(x)]^2$

8. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவல்படி $\frac{1}{16}$ எனில் அதன் திட்ட விலக்கம்

அ) $\frac{1}{256}$ (ஆ) $\frac{1}{32}$

(இ) $\frac{1}{64}$ (ஈ) $\frac{1}{4}$

9. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X இல் $E(x) = 2$ , $E(x^2) = 8$ எனில் அதன் மாறுபாட்டளவை

(அ) 4 (ஆ) 6

(இ) 8 (ஈ) 2

10. f(x) என்பது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு x எனில் $E(x^2)$ என்பது

(அ) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ (ஆ) $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$

(இ) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$ (ஈ) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2)\,dx$

## II.கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக:

11. f(x) ஒரு பரவல்சார்பு எனில் $F(+\infty)$ என்பதின் மதிப்பு ____________
12. f(x) ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியில் அமைந்த நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு F(x) என்பது அதன் குவிவு பரவல் சார்பு எனில் $F'(x)=$ ____________
13. X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியில் அமைந்த f(x) ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில், $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx =$ ____________
14. X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் கணித எதிர்பார்த்தல் ____________ என்றும் அழைக்கப்படும்.
15. மாறிலியின் பரவல்படி ____________
16. Var (12x) என்பது ____________
17. Var (4x+7) என்பது ____________
18. X என்ற தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகளின் நிகழ்தகவுகள் $p_i$ என்றால் $x^2$ இன் கணித எதிர்பார்த்தலை ____________ என்று எழுதுகிறோம்.



19. f(x) என்ற நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்புடன் கூடிய தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி X இன் எதிர்பார்த்தல் ____________ என்று எழுதப்படுகிறது.
20. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறிக்கான விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உருவாக்கும் சார்பு ____________ ஆகும்.

## III. பின்வருவனவற்றிற்கு விடையளிக்க:

21. சமவாய்ப்பு மாறியை வரையறுக்க.
22. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியை வரையறுக்க.
23. தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியை வரையறுக்க.
24. நிகழ்தகவுத் திண்மைச் சார்பு என்றால் என்ன?
25. தனித்த பரவல்சார்பு என்றால் என்ன?
26. நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை வரையறுக்க.
27. பரவல்சார்பின் பண்புகளை எழுதுக.
28. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறிக்கான கணித எதிர்பார்த்தலை வரையறுக்க.
29. தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிக்கான எதிர்பார்த்தலை வரையறுக்க.
30. விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பை (mgf)எழுதுக.
31. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறிக்கான சிறப்பியல்புச் சார்பை (characteristic function) எழுதுக.
32. தொடர் சமவாய்ப்பு மாறிக்கான சிறப்பியல்புச் சார்பை எழுதுக.
33. விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உருவாக்கும் சார்பு (mgf) பற்றி ஒரு சிறுகுறிப்பு எழுதுக.
34. சிறப்பியல்புச் சார்பு பற்றி ஒரு சிறுகுறிப்பு எழுதுக.
35. X என்பது தலைவிழுதலைக் குறிக்குமானால், 3 நாணயங்களைச் சுண்டுவதால் ஏற்படும் பரவல் சார்பைக் காண்க.
36. இரு பகடைகள் ஒருங்கே வீசப்படுகின்றன. 3 என்ற எண் பெறுவது வெற்றியாகக் கருதப்படுகிறது என்றால் மூன்றுகள் விழுவதற்கான பரவல் சார்பினைப் பெறுக.
37. மூன்று சீட்டுகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக, திரும்பவும் அதே சீட்டுக்கட்டில் வைக்கும் முறையில் எடுக்கப் படுகின்றன. 52 சீட்டுகள் உள்ள அக்கட்டில் டைமண்ட் சீட்டு வருவது வெற்றியாகக் கருதப்பட்டால், வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையை நிகழ்தகவுப் பரவலில் பெறுக.
38. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X பின்வரும் நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பெற்றிருக்கிறது.

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| P(X = x) | $3a$ | $4a$ | $6a$ | $7a$ | $8a$ |

$a$ இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க

$p(1 < x < 4)$ ஐக் காண்க.

$P(1 \le x \le 4)$ ஐக் காண்க.

$P(x > 2)$ பரவல் சார்பைக் காண்க.

39. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X பின் வரும் நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பெற்றிருக்கிறது.

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P(x) | 0 | k | 2k | 2k | 3k | $k^2$ | $2k^2$ | $7k^2+k$ |

(i) k இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க

(ii) $p(0 < x < 5)$ ஐக் காண்க.

(iii) $p(x \le 6)$ ஐக் காண்க

40. பின்வருவன நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்புகளா என சரிபார்க்க.

(i) $f(x) = 6x^5$, $0 < x < 1$

(ii) $f(x) = \frac{2x}{9}$, $0 < x < 3$

41. ஒரு தொடர் சமவாய்ப்பு மாறி x, பின்வரும் அடர்த்திச் சார்பைக் கொண்டிருக்கிறது, அது $f(x) = Ax^3, 0 < x < 1$ எனில், Aஇன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

42. X என்ற சமவாய்ப்பு மாறி $f(x) = Ax^3, 0 < x < 1$ என்ற அடர்த்திச் சார்பைக் கொண்டிருக்கிறது. 0.2, 0.5 இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட நிகழ்தகவைக் காண்க.

43. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X பின்வரும் நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பெற்றிருக்கிறது.

| X = x | 5 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|
| P(x) | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

Xஇன் எதிர்பார்த்தலைக் காண்க.



44. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X பின்வரும் நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பெற்றிருக்கிறது.

| x | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| P(x) | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ |

$E(x)$, $E(x^2)$, $Var(x)$ஆகியவற்றைக் காண்க.

45. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X இல் $E(x) = \frac{1}{2}$, $E(x^2) = \frac{1}{2}$ எனில் அதன் பரவற்படியையும், திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க.

46. ஒரு தொடர் சமவாய்ப்புமாறியில்., நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = \frac{3}{4}x(2-x)$, $0 < x < 2$, எனில் X இன் எதிர்பார்த்தலைக் காண்க.

47. ஒரு தொடர்சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = \frac{x}{2}$, $0 < x < 2$ எனில் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டளவையைக் காண்க.

**விடைகள்:**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **I** 1. (ஆ) | 2. (ஆ) | 3. (ஈ) | 4. (ஆ) | 5. (ஆ) |
| 6. (அ) | 7. (அ) | 8. (ஈ) | 9. (அ) | 10. (இ) |

**II** 11. 1   12. f(x)   13. 1

14. சராசரி   15. zero   16. 144 var(x)

17. 16 var(x)

18. $\Sigma x_i^2 p_i$   19. $\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx$   20. $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!}\mu!_r$

**III.**

35.

| X = x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(x_i)$ | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

36.

| X=x | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P(x=x) | $\frac{25}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

37.

| X = x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(x_i)$ | $\frac{27}{64}$ | $\frac{27}{64}$ | $\frac{9}{64}$ | $\frac{1}{64}$ |

38. (i) $a = 1/28$ (ii) 13/28 (iii) 25/28 (iv) 15/28

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | $\frac{3}{28}$ | $\frac{7}{28}$ | $\frac{13}{28}$ | $\frac{20}{28}$ | $\frac{28}{28} = 1$ |

39. (i) k = 1/10 (ii) 4/5 (iii) 83/100

40. (i) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு.

(ii) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

41. A = 4

42. $P(0.2 < x , 0.5) = 0.117$

43. 2.5

44. E(x) = 1/2 , var (x) = 19/12

45. 1/4 , 1/2

46. E(x) = 1

47. E(x) = 4/3 , var (x) = 2/9

# 3. சில முக்கிய கோட்பாட்டுப் பரவல்கள்

## 3.1 ஈருறுப்புப் பரவல்

### 3.1.0 அறிமுகம்:

நாம் இப்பாடப்பிரிவில் தனித்த மாறிகளின் பரவல்களின் கோட்பாடுகளைக் காண்போம். கணிதத்தின் அடிப்படையிலும், முடிவுறு நிகழ்தகவு விதிகளின்படியும், மாறிகளின் பரவல் அமைந்திருப்பதை விளக்கமாக அறியலாம். மீண்டும் மீண்டும் இரு நிகழ்ச்சிகள் மட்டுமே நிகழக் கூடிய அதாவது வெற்றி அல்லது தோல்வி ஐ மாறிகளாக கொண்ட கணத்தைக் கொண்டு விளக்கக்கூடிய தனித்த (எண்ணிடத்தக்கதாக) மாறியின் பரவல் ஈருறுப்புபரவல் என்றழைக்கப்படும். இப்பரவல் வணிகம் மற்றும் சமூக அறிவியல் போன்ற பல்வேறு துறைகளில் பெருமளவில் பயன்படுத்தப் படுகிறது.

### 3.1.1 பெர்னோலியின் பரவல்:

சமவாய்ப்பு மாறி x ஆனது 0 மற்றும் 1 என்ற மதிப்புகளின் நிகழ்தகவுகள் q மற்றும் p முறையே ஏற்கிறது ie $P(x = 1) = p$ மற்றும் $P(x = 0) = q$, $q = 1 - p$ எனில், இவைகள் பெர்னோலியின் மாறிகள் என்று அழைக்கப்படும். வெற்றி மற்றும் தோல்விகளின் நிகழ்தகவுகள் முறையே p மற்றும் q என்றமைந்த பரவல் பெர்னோலியின் பரவல் என்றழைக்கப்படும். இதனை சுவிஸ் நாட்டு கணித மேதை **ஜேம்ஸ்பெர்னோலி** என்பவர் (1654-1705) கண்டுபிடித்தார்.

எடுத்துக்காட்டாக, பெர்னோலியின் முயற்சிகள் கீழ்வருமாறு:

1. நாணயம் சுண்டுதல் ( தலை அல்லது பூ விழுதல் )
2. பகடை ஒன்று வீசுதல்(ஒற்றைப் படை எண் அல்லது இரட்டைப்படை எண் கிடைத்தல் ).
3. தேர்வில் மாணவர் பெறும் முடிகள் (வெற்றி அல்லது தோல்வி )

### 3.1.2 ஈருறுப்புப் பரவல் :

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$P(X = x) = P(x) = \begin{cases} nC_x\, p^x q^{n-x} \,; & x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 \,; & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$



என்றமையும் போது சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது ஈருறுப்புப் பரவலை பின்பற்றுகிறது எனலாம்.

இரு சார்பற்ற மாறிலிகளான n மற்றும் p ஈருறப்புப்பரவலின் பண்பளவைகள் ஆகும். எனவே. n மற்றும் p ன் மதிப்புகள் தெரிந்தால் மட்டுமே ஈருறுப்புப்பரவலை முழுமையாக நிர்ணயிக்கமுடியும்.

N எண்ணிக்கை கொண்ட தொகுதியில் n முயற்சிகள் மேற்கொள்ளும்போது கிடைக்கும் வெற்றிகள் x ஆகக் கொண்டால் மொத்த வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை, $N(nCx\, p^x q^{n-x})$ ஆகும்.

மேலும் $N(q + p)^n$ என்ற விரிவின் உறுப்புகள் 0,1,2, ....,n வெற்றிகளின் நிகழ்தகவுகளாகவும் இவை N என்ற தொகுதியில் மேற்கொள்ளப்படும் n முயற்சிகளுக்கு அமைகிறது.

### 3.1.3 ஈருறுப்புப் பரவலின் நிபந்தனைகள்:

ஈருறுப்புப்பரவல் காண்பதற்கான செயல்முறை நிபந்தனைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1. முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை "n " ஒரு முடிவுறு எண்ணாக (எண்ணிடத்தக்கதாக) இருத்தல் வேண்டும்.
2. முயற்சிகள் ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவையாக இருத்தல் வேண்டும்.
3. வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு 'p' ஆனது ஒவ்வொரு முயற்சிக்கும் மாறாத எண்ணாக அமைதல் வேண்டும்.
4. ஒவ்வொரு முயற்சியும் வெற்றி அல்லது தோல்வியாகத்தான் இருத்தல் வேண்டும். நாணயம் சுண்டுதல் அல்லது பகடைவீசுதல் அல்லது சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுத்தல் ( திரும்ப வைத்தல் ) போன்ற நிகழ்ச்சிகள் யாவும் ஈருறுப்புப் பரவலைச் சார்ந்து அமைகிறது.

### 3.1.4 ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்புகள்:

1. ஈருறுப்புப் பரவல் ஒரு தனித்தமாறி பரவலாகும். இங்கு சமவாய்ப்பு மாறி x ஆனது 0,1,2, ... n ( வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை ) என்ற முடிவுறு மதிப்புகளை ஏற்கிறது.
2. சராசரி = np, மாறுபாடு = npq மற்றும் திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{npq}$,

கோட்டளவைக்கெழு= $\dfrac{q-p}{\sqrt{npq}}$, தட்டையளவைக்கெழு = $\dfrac{1 - 6pq}{npq}$.

நிகழ்தகவுகள் யாவும் எதிரிடை எண்ணாக (non – negative) அமையாது என்றும், நிகழ்தகவு மதிப்புகளின் மொத்தக் கூடுதல் ஒன்று எனத் தெளிவாக அறிகிறோம், ($p<1$, $q<1$ மற்றும் $p+q = 1$, $q=1-p$).

3. அதிக அலைவெண் மதிப்புடைய மாறி எதுவோ அதன் மதிப்பே ஈருறுப்பு பரவலின் முகடு (mode) ஆகும். இப்பரவலில் ஒன்று அல்லது இரண்டு முகடுகள் இருக்கலாம்,

4. X மற்றும் Y எனும் இரு சம வாய்ப்பு மாறிகள் ஈருறுப்புபரவலின் கீழ், முறையே ($n_1$, p) மற்றும் ($n_2$, p) பண்பளவைகளாக கொண்டுள்ளது எனில், அவைகளின் கூடுதல் (X + Y) என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் ஈருறுப்புப் பரவலின் கீழ் பண்பளவையாக ($n_1 + n_2$, p) அமைகிறது.

5. n சார்பற்ற முயற்சிகள் N முறைகள் செய்யும் போது. அதாவது N தொகுதிகளின் n முயற்சிகள் நடைபெறும் போது x வெற்றிகளின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் $N(nc_x\ p^x\ q^{n-x})$, ஆகும். எனவே, 0,1,2, . . . , n என்ற வெற்றிகளின் எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்தகவுகள் $N(q + p)^n$ என்ற விரிவின் தொடர்ச்சியாக அடுத்தடுத்து வரும் உறுப்புகளாக அமைகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 1:**

ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி 5 மற்றும் அதன் மாறுபாடு 9 என்ற கூற்றை விளக்குக.

**தீர்வு:**

ஈருறுப்பு பரவலின் பண்பளவைகளாவன n மற்றும் p.

இதில் சராசரி $\Rightarrow$ $np = 5$

மாறுபாடு $\Rightarrow$ $npq = 9$

$$\therefore q = \frac{npq}{np} = \frac{9}{5}$$

$$q = \frac{9}{5} > 1$$

q என்பது நிகழ்தகவு ஆகும். ஆகவே q என்பது எப்பொழுதும் 1 க்கும் குறைவாக இருக்கும். எனவே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரங்கள் தவறானவை ஆகும்.



**எடுத்துக்காட்டு 2:**

பிழையற்ற எட்டு நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகின்றன, எனில் குறைந்தது ஆறு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

**தீர்வு:**

இங்கு முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை, $n = 8$,

தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= p$

$$\therefore p = \frac{1}{2} \text{ மற்றும் } q = \frac{1}{2}$$

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியானது கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பதாகக் கொண்டால், n முயற்சிகளில் கிடைக்கும் (தலைகளின் எண்ணிக்கை) வெற்றிகளின் நிகழ்தகவுச் சார்பு.

$$P(X = x) = nc_x\, p^x\, q^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, ..., n$$

$$= 8C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{8-x} = 8C_x \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$= \frac{1}{2^8} 8C_x$$

குறைந்தது 6 தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(x \geq 6) = P(x = 6) + P(x = 7) + P(x = 8)$$

$$= \frac{1}{2^8} 8C_6 + \frac{1}{2^8} 8C_7 + \frac{1}{2^8} 8C_8$$

$$= \frac{1}{2^8} [8C_6 + 8C_7 + 8C_8]$$

$$= \frac{1}{2^8} [28 + 8 + 1]$$

$$= \frac{37}{256}$$

**எடுத்துக்காட்டு 3 :**

பிழையற்ற பத்து நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. அவற்றில் i) குறைந்தது 7 தலைகள் ii) சரியாக 7 தலைகள் iii) அதிகபட்சம் 7 தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

**தீர்வு:**

$$p = \text{தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு} = \frac{1}{2}$$

$$q = \text{தலை கிடைக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு} = \frac{1}{2}$$

10 நாணயங்கள் வீசும் போது தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு சார்பு.

$$P(X = x) = nC_x\, p^x q^{n-x}. \quad , \quad x = 0, 1, 2, ..., n$$

$$= 10C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} = \frac{1}{2^{10}}\, 10C_x$$

i) குறைந்தது 7 தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(x \geq 7) = P(x = 7) + P(x = 8) + P(x = 9) + P(x = 10)$$

$$= \frac{1}{2^{10}} [10C_7 + 10C_8 + 10C_9 + 10C_{10}]$$

$$= \frac{1}{1024} [120 + 45 + 10 + 1] = \frac{176}{1024}$$

ii) சரியாக 7 தலைகள் மட்டும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(x = 7) = \frac{1}{2^{10}} 10C_7 = \frac{1}{2^{10}}(120)$$

$$= \frac{120}{1024}$$

iii) அதிகபட்சம் 7 தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(x \leq 7) = 1 - P(x > 7)$$

$$= 1 - \{P(x = 8) + P(x = 9) + P(x = 10)\}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{10}} \{10C_8 + 10C_9 + 10C_{10}\}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{10}} [45 + 10 + 1]$$

$$= 1 - \frac{56}{1024} = \frac{968}{1024}$$



**எடுத்துக்காட்டு 4:**

ஒரு பெட்டியில் உள்ள 100 கைக் கடிகாரங்களில் 20 கைக் கடிகாரங்கள் குறைபாடுள்ளவை. சமவாய்ப்பு முறையில் 10 கடிகாரங்கள் தேர்ந்தெடுக்கும் பொழுது

i) 10 ம் குறைபாடுள்ளவையாக ii) 10 ம் நல்லவையாக iii) குறைந்தது ஒன்றாவது குறைபாடுள்ளதாக iv) அதிகபட்சம் 3 குறைபாடுள்ளவையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவை காண்க.

**தீர்வு :**

x = குறைபாடுள்ள கைக்கடிகாரங்கள் என்க

100 கைக் கடிகாரங்களில் குறைபாடுள்ளவை 20.

$$\text{குறைபாடுள்ள கடிகாரத்தின் நிகழ்தகவு } p = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore q = 1 - p = \frac{4}{5}$$

சமவாய்ப்பு முறையில் 10 கடிகாரங்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன.

n =10, ஈருறுப்புப் பரவலின் சார்பு

$$P(X = x) = nC_x\, p^x q^{n-x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, ..., 10$$

$$= 10C_x \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(\frac{4}{5}\right)^{10-x}$$

i) 10 ம் குறைபாடுள்ள கடிகாரங்களாக இருக்க நிகழ்தகவு

$$P(x = 10) = 10C_{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{10} \left(\frac{4}{5}\right)^0$$

$$= 1. \frac{1}{5^{10}}.1 = \frac{1}{5^{10}}$$

ii) 10 ம் நல்ல கடிகாரங்களாக தேர்ந்தெடுக்க நிகழ்தகவு (குறைபாடில்லாத)

$$P(x = 0) = 10C_0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$$

$$= 1.1. \left(\frac{4}{5}\right)^{10} = \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$$

iii) குறைந்தது ஒன்று குறைபாடுள்ளதாக இருக்க நிகழ்தகவு

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x < 1)$$
$$= 1 - P(x = 0)$$
$$= 1 - 10C_0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$$
$$= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$$

iv) அதிக பட்சம் 3 கடிகாரங்கள் குறைபாடுள்ளவையாக இருக்க நிகழ்தகவு

$$P(x \leq 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3)$$
$$= 10C_0\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^{10} + 10C_1\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^9 + 10C_2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^8$$
$$+ 10C_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^7$$
$$= 1.1.\left(\frac{4}{5}\right)^{10} + 10\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^9 + \frac{10.9}{1.2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^8$$
$$+ \frac{10.9.8}{1.2.3}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^7$$
$$= 1.(0.107) + 10(0.026) + 45(0.0062) + 120(0.0016)$$
$$= 0.859 \quad \text{(தோராயம்)}$$

**எடுத்துக்காட்டு 5:**

X என்பது ஈருறுப்புப் பரவலின் சமவாய்ப்பு மாறி ஆகும். மேலும் $9P(X = 4) = P(X = 2)$, $n = 6$ என்ற நிலையில் p ன் மதிப்பைக் காண்க.

**தீர்வு:**

சமவாய்ப்பு மாறி X இன் ஈருறுப்புப் பரவல் சார்பு

$P(X = x) = nC_x\, p^x q^{n-x}$. , $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

$n = 6 \quad \therefore\ P(X = x) = 6C_x\, p^x q^{6-x}$

$$P(x = 4) = 6C_4\, p^4 q^2$$
$$P(x = 2) = 6C_2\, p^2 q^4$$



$$9.\ P(x = 4) = P(x = 2)$$
$$9.\ 6C_4\, p^4 q^2 = 6C_2\, p^2 q^4$$
$$\Rightarrow 9 \times 15p^2 = 15q^2$$
$$9p^2 = q^2$$

இருபுறமும் வர்க்க மூலம் (மிகை மதிப்பு) எடுக்க,

$$3p = q$$
$$= 1 - p$$
$$4p = 1$$
$$\therefore p = \frac{1}{4} = 0.25$$

### 3.1.5 ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துக (Fitting of a Binomial Distribution):

கண்டறியப்பட்ட (கொடுக்கப்பட்ட) விவரங்களுக்கு ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துவதற்கான வழிமுறைகளைக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1. சராசரி $\bar{x} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f} = np$ ஐக் காண்க.

   $\Rightarrow p = \dfrac{\bar{x}}{n}$ இதில் n என்பது முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்.
2. $q = 1 - p$, என q ன் மதிப்பைக் காண்க.
3. $P(x) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x}$ என்ற நிகழ்தகவுச் சார்பில், $x = 0$,என மதிப்பிட்டு $P(0) = q^n$ என்றும் $f(0) = N \times P(0)$ என அமைத்து எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் மதிப்பு காண்க.
4. மற்ற எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் மதிப்புகளை மறுதரவு தொடர்பு (recurrence relation) $f(x+1) = \dfrac{n-x}{x+1}\ \dfrac{p}{q}\ f(x)$ ஐ பயன்படுத்திக் காணலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு 6:**

ஒரே மாதிரியான 3 நாணயங்கள் ஒருசேர 100 முறை சுண்டப்படுகின்றன. இதன் முடிவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| தலைகளின் எண்ணிக்கை: | 0 | 1 | 2 | 3 |
| நிகழ்வெண்: | 36 | 40 | 22 | 2 |

ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துக.

**தீர்வு:**

| X | f | fx |
|---|---|---|
| 0 | 36 | 0 |
| 1 | 40 | 40 |
| 2 | 22 | 44 |
| 3 | 2 | 6 |
| | $\Sigma f = 100$ | $\Sigma fx = 90$ |

சராசரி $= \bar{x} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \dfrac{90}{100} = 0.9$

$$p = \frac{\bar{x}}{n}$$

$$= \frac{0.9}{3} = 0.3$$

$$q = 1 - 0.3$$

$$= 0.7$$

இங்கு, $n = 3$, $p = 0.3$, $q = 0.7$

நிகழ்தகவுச் சார்பு , $P(x) = nC_x\, p^x\, q^{n-x}$

$$\therefore P(x) = 3C_x\,(0.3)^x\,(0.7)^{3-x}$$

$x = 0$ எனில், $P(0) = 3C_0\,(0.3)^0\,(0.7)^3$

$$= (0.7)^3 = 0.343$$

$$\therefore f(0) = N \times P(0) = 0.343 \times 100 = 34.3$$

மற்ற எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் மறுதரவு தொடர்பின் மூலம் காணலாம்.

$f(x+1) = \dfrac{n-x}{x+1}\left(\dfrac{p}{q}\right) f(x)$ இதில் $x = 0, 1, 2$ என மதிப்பிட்ட பிற எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடலாம்.

$$f(1) = \frac{3-0}{0+1}\left(\frac{p}{q}\right) \times 34.3$$

$$= 3 \times (0.43) \times 34.3 = 44.247$$

$$f(2) = \frac{3-1}{1+1}\left(\frac{p}{q}\right) f(1)$$



$$= \frac{2}{2}\,(0.43) \times 44.247$$

$$= 19.03$$

$$f(3) = \frac{3-2}{2+1}\left(\frac{p}{q}\right) f(2)$$

$$= \frac{1}{3}(0.43) \times 19.03$$

$$= 2.727$$

கண்டறியப்பட்ட மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் கீழ் வருமாறு அட்டவனை செய்யப்பட்டுள்ளது.

| | | | | | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|
| கண்டறியப்பட்ட அலைவெண்கள் | 36 | 40 | 22 | 2 | 100 |
| எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் | 34 | 44 | 19 | 3 | 100 |

**எடுத்துக்காட்டு 7:**

நான்கு நாணயங்கள் சுண்டப்பட்டு கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கை குறிக்கப்படுகிறது. இச்சோதனை 200 முறை திரும்பத் திரும்ப செய்யப்படும் போது கீழ்க்கண்ட பரவல் கிடைக்கிறது.

| தலைகளின் எண்ணிக்கை | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| ஆலைவெண் | 62 | 85 | 40 | 11 | 2 |

ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துக

**தீர்வு:**

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | 62 | 85 | 40 | 11 | 2 | 200 |
| Fx | 0 | 85 | 80 | 33 | 8 | 206 |

சராசரி $= \bar{x} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \dfrac{206}{200} = 1.03$

$$p = \frac{\bar{x}}{n} = \frac{1.03}{4} = 0.2575$$

$$\therefore q = 1 - 0.2575 = 0.7425$$

இங்கு $n = 4$, $p = 0.2575$; $q = 0.7425$

ஈருறுப்புப் பரவலின் நிகழ்தகவு சார்பு

$$P(x) = nC_x\ p^x q^{n-x}$$
$$P(x) = 4C_x\ (0.2575)^x (0.7425)^{4-x}$$
$$P(0) = (0.7425)^4 = 0.3039$$
$$\therefore\ f(0) = NP(0)$$
$$= 200 \times 0.3039 = 60.78$$

மற்ற நிகழ்வெண்களை மறுதரவு தொடர்பைப் (recurrence relation) பயன்படுத்திக் காணலாம்

$f(x+1) = \dfrac{n-x}{x+1}\left(\dfrac{p}{q}\right) f(x)$. இதில் $x = 0,1,2,3$ என மதிப்பிட்டு பிற எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடலாம்

$x = 0$, எனில் $f(0+1) = f(1) = \dfrac{4-0}{0+1}(0.3468)(60.78)$
$$= 84.3140$$

$x = 1$, எனில் $f(1+1) = f(2) = \dfrac{4-1}{1+1}(0.3468)(84.3140)$
$$= 43.8601$$

$x = 2$, எனில் $f(2+1) = f(3) = \dfrac{4-2}{2+1}(0.3468)(43.8601)$
$$= 10.1394$$

$x = 3$, எனில் $f(3+1) = f(4) = \dfrac{4-3}{3+1}(0.3468)(10.1394)$
$$= 0.8791$$

கண்டறியப்பட்ட மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

| | | | | | | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|---|
| கண்டறியப்பட்ட அலைவெண்கள் | 62 | 85 | 40 | 11 | 2 | 200 |
| எதிர்பார்ககப்படும் அலைவெண்கள் | 61 | 84 | 44 | 10 | 1 | 200 |



## 3.2 பாய்சான் பரவல்

### 3.2.0 அறிமுகம் :

கணிதம் மற்றும் இயற்பியல் சார்ந்த மேதையான பிரான்சு நாட்டுக்காரர் **சைமன் டெனிஸ் பாய்சான்** என்பவர் 1837 ஆம் ஆண்டு பாய்சான் பரவலைக் கண்டுபிடித்தார். பாய்சான்பரவல் ஓர் தனித்த மாறி பரவல் ஆகும். இப்பரவலை இவர் ஈருறுப்புப் பரவலின் நெருக்கமாக, எல்லையாக அமைகிறது என நிருவியுள்ளார்.

$n$ முயற்சிகளுக்கு $x$ வெற்றிகளின் ஈருறுப்புப் பரவல் $P(X=x) = nC_x\ p^x\ q^{n-x}$ ஆகும். இங்கு $n$ முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாகவும், மற்றும் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு $p$ மிகச்சிறியதாகவும் மேலும் $np = m$ என்ற எதிர்எண் அற்ற முடிவுறு எண்ணாக அமைகிறது.

அதாவது $x$ வெற்றிகளுக்கான பாய்சான் பரவல்,

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-m} m^x}{x!}; & x = 0,1,2, \ldots \text{க்கு} \\ 0 & ; \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

எனக் கொடுக்கப்படுகிறது.

இங்கு $m$ என்பது இப்பரவலின் பண்பளவையாகும். மேலும் $m > 0$ முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாகவும் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு மிகச்சிறியதாக அமையும்போது இத்தகைய நிகழ்ச்சிகள் அரிய நிகழ்ச்சிகளாக அமைகிறது. எனவே பாய்சான் பரவலானது இவ்வாறு அமையும் அரிய நிகழ்ச்சிகளுடன் தொடர்புடையதாக அமைகிறது.

**குறிப்பு:**

1) e ன் மதிப்பு $e = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots = 2.71828$

2) $P(X=0) = \dfrac{e^{-m} m^0}{0!}$, இங்கு $0! = 1$ மற்றும் $1! = 1$

3) $P(X=1) = \dfrac{e^{-m} m^1}{1!}$

**பாய்சான் பரவலுக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகள் :**

1. ஒரு குறிப்பிட்ட வருடத்தில் ஒரு நகரில் பிறவிக் குருடாக பிறக்கும் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை.

2. தட்டச்சு செய்யப்பட்ட ஒரு பக்கத்தில் உள்ள தட்டச்சுப் பிழைகளின் எண்ணிக்கை.
3. எல்லா பாடங்களிலும் மிக அதிக மதிப்பெண் எடுத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.
4. ஒரு குறிப்பிட்ட வாரத்தில் ஏற்பட்ட விமான விபத்துகளின் எண்ணிக்கை.
5. ஒரு நல்ல தொழிற்சாலையில் செய்யப்பட்ட திருகாணிகளில் 100 கொண்ட பெட்டியில் குறைபாடுள்ள திருகாணிகளின் எண்ணிக்கை.
6. குறிப்பிட்ட ஒரு நாளில் பதிவான தற்கொலைகளின் எண்ணிக்கை.

### 3.2.1 நிபந்தனைகள் :

ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லைகளாக ( நெருக்கமாக ) அமைந்த பாய்சான் பரவலுக்கான நிபந்தனைகள் கீழ்வருவன.

1. முயற்சிகளின் ( முடிவுகளின் ) எண்ணிக்கை n ஆனது எல்லையற்ற அளவிற்கு அதிகமாகும் ie., $n \to \infty$
2. ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு மிகவும் சிறியதாகும். ie., $p \to 0$
3. np = m, இது ஓர் முடிவுறு எண். மேலும் $m > 0$

### 3.2.2 பாய்சான் பரவலின் பண்புகள் :

1. தனித்த பரவல் : பாய்சான் பரவலும். ஈருறுப்புப் பரவலைப் போன்றே தனித்த பரவல் ஆகும். இதன் சமவாய்ப்பு மாறியானது எண்ணிடதக்க மதிப்புகளான 0,1,2, ..., ∞ ஐ ஏற்கிறது.
2. p மற்றும் q இன் மதிப்புகள் : ஒரு நிகழ்ச்சியின் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p இன் மதிப்பு மிகவும் குறைவாகவும். மற்றும் தோல்விக்கான நிகழ்தகவு q இன் மதிப்பு அதிகமாகவும், n ன் மதிப்பு மிகமிக அதிகமாகும்போது இப்பரவல் அமைகிறது.
3. பண்பளவை : பாய்சான் பரவலின் பண்பளவை m ஆகும். m ன் மதிப்பு தெரியுமானால், பாய்சான் பரவலின் அனைத்து நிகழ்தகவுகளையும் கணக்கிடலாம்.
4. மாறிலிகளின் மதிப்புகள் : சராசரி = m = மாறுபாட்டளவை ஆகும். திட்டவிலக்கம் = $\sqrt{m}$ . பாய்சான் பரவலுக்கு ஒன்று அல்லது இரண்டு முகடுகள் இருக்கலாம்.
5. கூட்டுப்பண்பு : X மற்றும் Y எனும் ஒன்றையொன்று சாராத பாய்சான் மாறிகளின் பண்பளவைகள் முறையே $m_1$ மற்றும் $m_2$ எனில் ( X + Y ) என்ற பாய்சான் மாறியின் பண்பளவை ( $m_1 + m_2$ ) ஆகும்.



6. ஈருறுப்புப் பரவலின் ஓர் எல்லையாக ( தோராயமாக ):
n ன் மதிப்பு மிக அதிகமாகவும் p ன் மதிப்பு மிகக்குறைவாகவும் அமைந்து, np = m ன் மதிப்பு நிலையாக (மாறிலியாக ) இருக்கும்போது ஈருறுப்புபரவலின் எல்லை நிலையில் பாய்சான்பரவல் அமைகிறது.
7. பாய்சான் பரவல் பின்வரும் அனுமானங்களை கொண்டுள்ளது.
   i) ஒரு நிகழ்ச்சியில் ஏற்படும் நிகழ்வு அல்லது நிகழாமை வேறு எந்த நிகழ்ச்சியின் நிகழ்வு அல்லது நிகழாமையைப் பாதிப்பதில்லை (ஆதிக்கம் செய்வதில்லை )
   ii) ஒரு சிறிய கால இடைவெளியிலோ அல்லது கூறுவெளியின் ஒரு பகுதியிலோ வெற்றியின் நிகழ்தகவானது மொத்தகால இடைவெளி அல்லது கூறுவெளியின் விகிதசமத்தில் அமையும்.
   iii) ஒரு மிகச்சிறிய இடைவெளியில் ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு தவிர்க்கதக்கதாக இருக்கும்.

**எடுத்துக்காட்டு 8:**

ஒரு குறிப்பிட்ட மாவட்டத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டில் சராசரியாக 1000 வீடுகளில் 1 வீடு தீ விபத்துக்குள்ளாகிறது. 2000 வீடுகள் உள்ள அம்மாவட்டத்தில் அவ்வாண்டில் சரியாக 5 வீடுகள் மட்டும் தீவிபத்து ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?.

**தீர்வு :**

n = 2000 மற்றும் $p = \frac{1}{1000}$

சராசரி $\bar{x} = np$

$$np = 2000 \times \frac{1}{1000}$$

அதாவது m = 2

x என்பது தீ விபத்து ஏற்படும் வீடுகள் என்க. பாய்சான் பரவலின் நிகழ்தகவு சார்பானது,

$$P(X=x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

$$\therefore P(X=5) = \frac{e^{-2} 2^5}{5!} = \frac{(0.13534)\times 32}{120} = 0.036$$

**எடுத்துக்காட்டு 9:**

பாய்சான் பரவலில் $3P(X = 2) = P(X = 4)$ எனில், பண்பளவை 'm' ன் மதிப்பைக் காண்க.

**தீர்வு :**

$$P(X=x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

$$3P(x = 2) = P(x = 4)$$

$$3. \frac{e^{-m} m^2}{2!} = \frac{e^{-m} m^4}{4!}$$

$$m^2 = \frac{3 \times 4!}{2!}$$

$$\therefore \quad m = \pm 6$$

m ஆனது எப்பொழுதும் நேரிடையாகும். ஆகவே $m = 6$

**எடுத்துக்காட்டு 10:**

ஒரு நிறுவனத்தில் தயாரிக்கப்பட்ட விளக்குகளில் 2% குறைபாடுள்ளவை. 200 விளக்குகள் கொண்ட கூறில் (i) 2 விளக்குகளுக்கும் குறைவாக ii) 3 விளக்குகளுக்கும் மேலாக குறைபாடுகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

**தீர்வு:**

x = குறைபாடாக உள்ள மின்விளக்குகள் என்க.

ஒரு மின்விளக்கு குறைபாடாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$p = \frac{2}{100} = 0.02, \quad n = 200$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

p ன் மதிப்பு மிகக் குறைவுவாகவும் n ன் மதிப்பு அதிகமாகவும் உள்ளதால் இங்கு பாய்சான் பரவலைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

சராசரி $m = np = 200 \times 0.02 = 4$

பாய்சான் நிகழ்தகவு திண்ம சார்பு $P(X = x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$

i) 2 மின் விளக்குகளை விடக் குறைவான குறைபாடுகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X < 2) = P(x = 0) + P(x = 1)$$



$$= \frac{e^{-4}4^0}{0!} + \frac{e^{-4}4^1}{1!}$$

$$= e^{-4} + e^{-4}(4)$$

$$= e^{-4}(1 + 4) = 0.0183 \times 5$$

$$= 0.0915$$

ii) குறைபாடுள்ள மின் விளக்குகள் 3 க்கும் அதிகமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு.

$$P(x > 3) = 1 - P(x \le 3)$$

$$= 1 - \{P(x = 0) + P(x = 1) + P(x=2) + P(x=3)\}$$

$$= 1 - e^{-4}\{1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!}\}$$

$$= 1 - \{0.0183 \times (1 + 4 + 8 + 10.67)\} = 0.567$$

### 3.2.3 பாய்சான் பரவலைப் பொருத்துதல் :

பாய்சான் பரவலைப் பொருத்துதலுக்கான வழிமுறைகள்

1. முதலில் நாம் சராசரியைக் கணக்கிட வேண்டும்.

$$\text{சராசரி } \bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = m$$

2. $e^{-m}$ ன் மதிப்பைக் காணவும்.

3. பாய்சான் பரவல் $P(X=x) = \frac{e^{-m}.m^x}{x!}$ ஐ பயன்படுத்தி

அதில் $x = 0$ என மதிப்பிட்டு, $P(0) = e^{-m}$ ஐ கணக்கிடவும்.

பின்னர் $f(0) = N \times P(0)$ ஐ காண்க.

மற்ற எதிர்பார்க்கபடும் அலைவெண்களை பின்வரும் மறுதரவு (Recurrence relation) தொடர்பு $f(x+1) = \frac{m}{x+1} f(x)$ ஐ பயன்படுத்தி $x = 0,1,2,\ldots$ என மதிப்பிட்டு காணலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு** 11:

புத்தகம் ஒன்றில் ஒரு பக்கத்தில் உள்ள பிழைகளின் எண்ணிக்கை பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதற்கு பாய்சான் பரவலைப் பொருத்துக.

| பிழைகளின் எண்ணிக்கை (பக்கம் ஒன்றில்) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| பக்கங்களின் எண்ணிக்கை | 211 | 90 | 19 | 5 | 0 |

**தீர்வு:**

| $x_i$ | $f_i$ | $f_ix_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 211 | 0 |
| 1 | 90 | 90 |
| 2 | 19 | 38 |
| 3 | 5 | 15 |
| 4 | 0 | 0 |
| | N = 325 | $\Sigma fx = 143$ |

$$\text{சராசரி} = \bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N}$$

$$= \frac{143}{325} = 0.44 = m$$

எனவே $e^{-m} \Rightarrow e^{-0.44} = 0.6440$

$$e^{-m} = e^{-0.44} = 0.6440$$

பாய்சான் நிகழ்தகவு திண்மச் சார்பு (mass function),

$$P(x) = e^{-m}\frac{m^x}{x!}$$

x = 0, எனில் $P(0) = e^{-0.44}\,\frac{44^0}{0!}$

$$= e^{-0.44}$$
$$= 0.6440$$
$$\therefore f(0) = N\,P(0)$$
$$= 325 \times 0.6440$$
$$= 209.43$$

மற்ற எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களை மறுதரவு தொடர்பு மூலம் காணலாம்.

$f(x+1) = \dfrac{m}{x+1} f(x)$, இதில் x = 0,1,2,3 என மதிப்பிட்டு பிற எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடலாம்.

$$f(1) = 0.44 \times 209.43 = 92.15$$

$$f(2) = \frac{0.44}{2} \times 92.15 = 20.27$$



$$f(3) = \frac{0.44}{3} \times 20.27 = 2.97$$

$$f(4) = \frac{0.44}{4} \times 2.97 = 0.33$$

| | | | | | | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|---|
| கண்டறியப்பட்ட அலைவெண்கள் | 211 | 90 | 19 | 5 | 0 | 325 |
| எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் | 210 | 92 | 20 | 3 | 0 | 325 |

**எடுத்துக்காட்டு 12:**

குதிரைப் போர் வீரர் அணியிலிருந்து குதிரை ஏற்றத்தின்போது குதிரையால் உதைபட்டு, இறந்தவர்களின் எண்ணிக்கை கணக்கிடப்பட்டு 20 ஆண்டு விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பாய்சான் பரவல் பயன்படுத்தி சராசரி மற்றும் மாறுபாடு காண்க.

| x : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f : | 109 | 65 | 22 | 3 | 1 | 200 |

**தீர்வு :**

| $x_i$ | $f_i$ | $f_ix_i$ | $f_ix_i^2$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 109 | 0 | 0 |
| 1 | 65 | 65 | 65 |
| 2 | 22 | 44 | 88 |
| 3 | 3 | 9 | 27 |
| 4 | 1 | 4 | 16 |
| மொத்தம் | N = 200 | $\Sigma fx = 122$ | $\Sigma fx^2 = 196$ |

$$\text{சராசரி} = \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N}$$

$$= \frac{122}{200}$$

$$= 0.61$$

$$\text{மாறுபாடு} = \sigma^2 = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{N} - \left(\bar{x}\right)^2$$

$$= \frac{196}{200} - (0.61)^2$$

$$= 0.61$$

இங்கு சராசரி = மாறுபாடு = 0.61

**எடுத்துக்காட்டு 13:**

கார் ரேடியோக்கள் தயாரிக்கும் போது 100 ரேடியோக்களில் காணப்பட்ட குறைபாடுகளின் எண்ணிக்கை விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதற்கு பாய்சான் பரவலைப் பொருத்துக.

| குறைபாடுகள் | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| குறைபாடுகளுள்ள ரேடியோக்களின் எண்ணிக்கை | 79 | 18 | 2 | 1 | 0 |

**தீர்வு:**

| x | f | f x |
|---|---|---|
| 0 | 79 | 0 |
| 1 | 18 | 18 |
| 2 | 2 | 4 |
| 3 | 1 | 3 |
| 4 | 0 | 0 |
| | N = 100 | $\Sigma fx = 25$ |

$$\text{சராசரி} = \bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N}$$

$$= \frac{25}{100}$$

$$\therefore m = 0.25$$

$$e^{-m} = e^{-0.25} = 0.7788 = 0.779$$

பாய்சான் நிகழ்தகவுப் பரவல்.

$$P(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

$$P(0) = \frac{e^{-0.25}(0.25)^0}{0!} = (0.779)$$



$$\therefore f(0) = N.P(0) = 100 \times (0.779) = 77.9$$

மறுதரவு தொடர்பு மூலம் மற்ற எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் கணக்கிடப்படுகிறது.

$$f(x+1) = \frac{m}{x+1} f(x).$$

இங்கு x = 0,1,2,3 என மதிப்பிட்டு பிற எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் கீழ்கண்டவாறு கணக்கிடப்படுகிறது.

$$f(1) = f(0+1) = \frac{m}{0+1} f(0)$$

$$f(1) = \frac{0.25}{1}(77.9) = 19.46$$

$$f(2) = \frac{0.25}{2}(19.46) = 2.43$$

$$f(3) = \frac{0.25}{3}(2.43) = 0.203$$

$$f(4) = \frac{0.25}{4}(0.203) = 0.013$$

| | | | | | | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|---|
| கண்டறியப்பட்ட அலைவெண்கள் | 79 | 18 | 2 | 1 | 0 | 100 |
| எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் | 78 | 20 | 2 | 0 | 0 | 100 |

**எடுத்துக்காட்டு 14 :**

குழந்தைகள் பிறப்பு கணக்கெடுக்கும்பொழுது, 80 பிரசவங்களில் ஒன்று இரட்டைக் குழந்தைகளாகப் பிறக்கிறது எனக் கொண்டால். 30 பிரசவங்களில் இரண்டும் அதற்கு மேலும் இரட்டைக் குழந்தைகளாகப் பிறப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க. இதனை (i) ஈருறுப்புப் பரவல் மற்றும் (ii) பாய்சான் பரவலைக் கொண்டு ஒப்பிடுக.

**தீர்வு :**

**(i) ஈருறுப்புப் பரவலை பயன்படுத்தி**

x = இரட்டைக் குழந்தை பிரசவங்களின் எண்ணிக்கை என்க.

இரட்டைக் குழந்தை பிறப்பதற்கான நிகழ்தகவு =

$$p = \frac{1}{80} = 0.0125$$

$$\therefore \; q = 1 - p = 1 - 0.0125$$
$$= 0.9875$$
$$n = 30$$

ஈருறுப்புப் பரவலின் நிகழ்தகவு திண்மச்சார்பு $P(x) = nC_x \; p^x \, q^{n-x}$

இரண்டும் இரண்டிற்கு மேலும் இரட்டைக் குழந்தைகளாகப் பிறப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$\begin{aligned} P(x \geq 2) &= 1 - P(x < 2) \\ &= 1 - \{P(x = 0) + P(x = 1)\} \\ &= 1 - \{30C_0 (0.0125)^0 (0.9875)^{30} \\ &\qquad + 30C_1 (0.0125)^1 (0.9875)^{29}\} \\ &= 1 - \{1.1(0.9875)^{30} + 3\,(0.125)\,(0.9875)^{29}\} \\ &= 1 - \{0.6839 + 0.2597\} \\ &= 1 - 0.9436 \end{aligned}$$

$$P(x \geq 2) = 0.0564$$

**ii) பாய்சான் பரவலைப் பயன்படுத்தி**

பாய்சான் பரவலின் நிகழ்தகவு திண்மச்சார்பு

$$P(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

$$\begin{aligned} \text{சராசரி} = m &= np \\ &= 30\,(0.0125) \\ &= 0.375 \end{aligned}$$

இரண்டும் இரண்டிற்கு மேலும் இரட்டைக் குழந்தைகளாகப் பிறப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$\begin{aligned} P(x \geq 2) &= 1 - P(x < 2) \\ &= 1 - \{P(x = 0) + P(x = 1)\} \\ &= 1 - \left\{ \frac{e^{0.375}(0.375)^0}{0!} + \frac{e^{-0.375}(0.375)^1}{1!} \right\} \\ &= 1 - e^{-0.375}\,(1 + 0.375) \\ &= 1 - (0.6873)\,(1.375) \\ &= 1 - 0.945 \\ &= 0.055 \end{aligned}$$



## 3.3 இயல்நிலைப்பரவல்

### 3.3.0 அறிமுகம் :

தனித்த மாறிப் பரவல்களான ஈருறுப்புப்பரவல் மற்றும் பாய்சான் பரவல் இரண்டையும் இதற்கு முந்தய பகுதியில் நாம் விளக்கமாக அறிந்தோம். இப்பகுதியில் முக்கியமான தொடர்மாறிப்பரவலைப் பற்றிக் காண்போம். இத்தொடர்மாறிப்பரவலை ‘இயல்நிலை நிகழ்தகவுப்பரவல் அல்லது ‘இயல்நிலைப்பரவல்’ என்று அழைக்கிறோம். புள்ளியியல் கோட்பாடுகளில் முக்கியப்பங்கு வகிப்பதால் இப்பரவல் மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது.

முதன் முதலாக 1733 ல் ஆங்கில கணிதமேதை **டீ மாய்வர்** என்பவர் ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லை நிலையாகக் கொண்ட இயல்நிலைப்பரவலைக் கண்டுபிடித்தார். பின்னர் பிரான்சு கணிதமேதை **லாப்லாஸ்** என்பவரால் 1777 ல் பொது மற்றும் சமூக அறிவியலில் இப்பரவல் பயன்படுத்தப்பட்டது. **கார்ல் பிரிடெரிக் காஸியன்** (1809) என்பவர் இப்பரவலை உருவாக்கியதால் அவருக்கு மரியாதை செலுத்தும் வகையில் அவர் பெயரிலேயே “காஸியன் பரவல்” என்றும் இயல்நிலைப் பரவலை அழைக்கப்பட்டது.

### 3.3.1 வரையறை :

X என்ற தொடர் சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்

சார்பு $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ ; $-\infty < x < \infty$ , $-\infty < \mu < \infty$,

$\sigma > 0.$ எனில் X ன் சார்பானது சராசரி = $\mu$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் = $\sigma$ ஐ உடையதாக அமையும் போது இப்பரவலை இயல்நிலைப்பரவல் என்று அழைக்கிறோம்.

**குறிப்பு :**

சராசரி $\mu$. திட்டவிலக்கம் $\sigma$ ஆகியவை இயல்நிலைப்பரவலின் பண்பளவைகளாக அமைகிறது. எனவே இயல்நிலைப்பரவலை

$X \sim N\,(\mu, \sigma^2)$ என்று குறிக்கப்படும்

### 3.3.2 இயல்நிலைப் பரவலின் நிபந்தனைகள்:

ஈருறுப்பு பரவலின் எல்லை நிலையாக இயல்நிலைப் பரவல் அமைகிறது என கீழ் காணும் நிபந்தனைகள் மூலம் பெறலாம்.

அ) முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை n ஆனது மிகப்பெரிய முடிவறா எண் (ie., $n \to \infty$) ஆக அமைகிறது மற்றும்

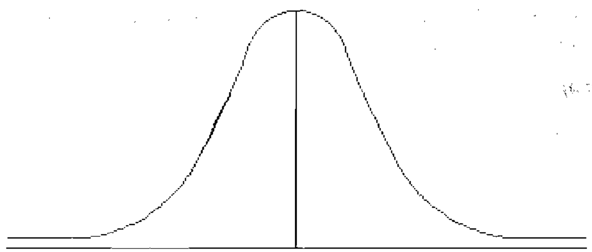
ஆ) p ம் q ம் மிகச்சிறியது அல்ல.

அதேபோல் பாய்சான் பரவலின் நெருக்கமாக ( எல்லைநிலையாக) அதன் பண்பளவை m ன் மதிப்பு அதிகமாகும் போது (ie m → ∞) இது இயல்நிலைப்பரவல் ஆகிறது.

இ) இயல்நிலைப் பரவலின் மாறிலியாக சராசரி = $\mu$ மாறுபாடு = $\sigma^2$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் = $\sigma$ ஆக அமைகின்றன.

### 3.3.3 இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைகோடு:

இயல்நிலைப் பரவலை அளிக்கக்கூடிய 'வளைகோடு இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைகோடு' என்றழைக்கப்படும்.இவ் வளைகோடு சராசரி $\mu$ விற்கு இருபுறமும் சமச்சீராகவும், மணிவடிவத்தில் அமைகிறது. இருபுறமும் வலது மற்றும் இடது இறுதி முடிவிலி (∞) வரை செல்லும். இவ்வளை கோட்டின் வடிவம் கீழ்காணும் படம் மூலம் அறியலாம்.




### 3.3.4 இயல்நிலைப் பரவலின் பண்புகள்:

1. இயல்நிலை வளைகோடு மணிவடிவம் உடையது மற்றும் சராசரி $\mu$ விற்கு இருபுறம் சமச்சீர் ஆக அமைகிறது
2. பரவலின் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு மூன்றும் ஒன்றுகின்றன.( ஒரே மதிப்புடையது)
   i.e.: சராசரி = இடைநிலை = முகடு = $\mu$
3. $x = \mu$ என்ற புள்ளியில் ஒரே ஒரு முகடு மட்டும் உண்டு.
4. இப்பரவல் சமச்சீர் வடிவம் கொண்டதால் கோட்டஅளவை = $\beta_1 = 0$, மற்றும் தட்டையளவு = $\beta_2 = 3$ ஆக அமைகிறது.
5. வளைவரையின் வளைவுமாற்று புள்ளிகள் $x = \mu \pm \sigma$ல் அமையும்.



6. வளைவரையின் மீப்பெரு உயரம் ( உச்சம் ) $x = \mu$ ல் அமையும்
   $\therefore$ மீப்பெரு நிலைத்தூரம் ( உயரம் ) = $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$
7. x – அச்சானது வளைவரைக்கு தொலைத் தொடுகோடாக அமைகிறது (ie, வளைகோடானது x- அச்சினை தொடர்ந்து சென்றாலும் x அச்சினை தொடாமல் இணையாக செல்லும் ).
8. முதல் மற்றும் மூன்றாம் கால்மானங்கள் இடைநிலை அளவிலிருந்து சம தூரத்தில் அமையும்
9. சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம் = $(4/5)\,\sigma$ ஆகும்.
10. கால்மான விலக்கம் = $(2/3)\,\sigma$
11. x மற்றும் y என்ற சார்பற்ற இரு இயல்நிலை மாறிகளின் சராசரிகள் $\mu_1$மற்றும் $\mu_2$ மற்றும் மாறுபாடுகள் $\sigma_1^2$ மற்றும் $\sigma_2^2$ முறையே இருப்பின் (x+y) என்ற இயல்நிலை மாறியின் சராசரி $(\mu_1 + \mu_2)$ மற்றும் மாறுபாடு $(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ ஆகவும் அமையும்.
12. பரப்பளவு பண்புகள்

$$P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = 0.6826$$
$$P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = 0.9544$$
$$P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

### 3.3.5 திட்ட இயல்நிலைப்பரவல் :

சமவாய்ப்பு மாறி x ன் இயல்நிலைப்பரவலின் சராசரி $\mu$ மற்றும் மாறுபாடு $\sigma^2$ என இருந்தால் சராசரி $\mu = 0$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் $\sigma = 1$ ஐ கொண்ட இயல்நிலைப்பரவலை திட்ட இயல்நிலைப்பரவல் என்று அழைக்கிறோம். இதன் மாறி $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. திட்ட இயல்நிலைப் பரவலின் சார்பு

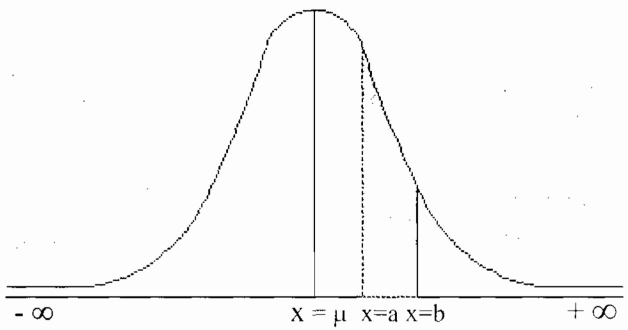
$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}; \quad -\infty < z < \infty \quad \text{ஆகும்.}$$

இப்பரவலுக்கு பண்பளவைகள் ஏதும் இல்லை என்பதால் இது மிகவும் முன்னேற்றமுடையப் பரவலாகும். எனவே, Z ன் வாயிலாக

இயல்நிலை வளைகோட்டின் கீழ் அமையும் பரப்புகளைக்கொண்டு நிகழ்தகவுகள் கணக்கிடப்படுகிறது.

### 3.3.6 இயல்நிலைப் பரவலின் பரப்பளவு பண்புகள்:

X அச்சின் மீது அமையும் இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைகோட்டின் மொத்தபரப்பளவின் மதிப்பு ஒன்று ஆகும். மேலும் இவ்வளைகோடு 'திட்ட நிகழ்தகவு வளைகோடு' என்றும் அழைக்கப்படும். $x = a$ மற்றும் $x = b$ என்ற $(a < b)$ நிலைக்கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள பரப்பானது; x ன் மதிப்புகளான $x = a$ மற்றும் $x = b$ இவைகளுக்கு இடையில் அமையும் நிகழ்தகவுகளைக் குறிக்கும் (ie. $P(a \le x \le b)$ ) என்பதை கீழ்காணும் படத்தின் மூலம் அறியலாம்

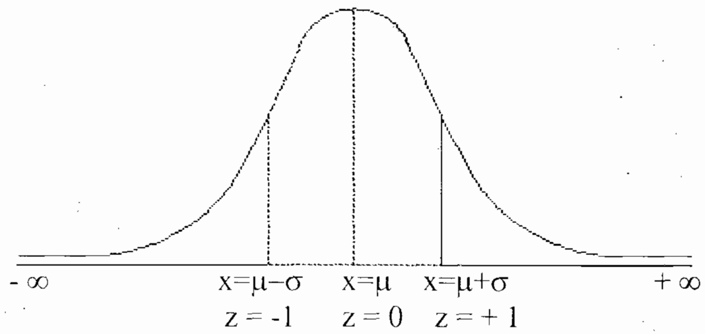



x ன் எந்த ஒரு மதிப்பிற்கும் நிகழ்தகவு காண வேண்டுமெனில், முதலில் திட்ட இயல்நிலை மாறி $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ க்கு மாற்றவேண்டும். பின்னர் Z க்கு உரிய பரப்பினை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி காண வேண்டும்.

எடுத்துகாட்டாக. இயல்நிலை மாறி x ன் மதிப்புகள் $(\mu - \sigma,\ \mu + \sigma,)$ என்ற இடைவெளியில் அமையும்போது நிகழ்தகவு,

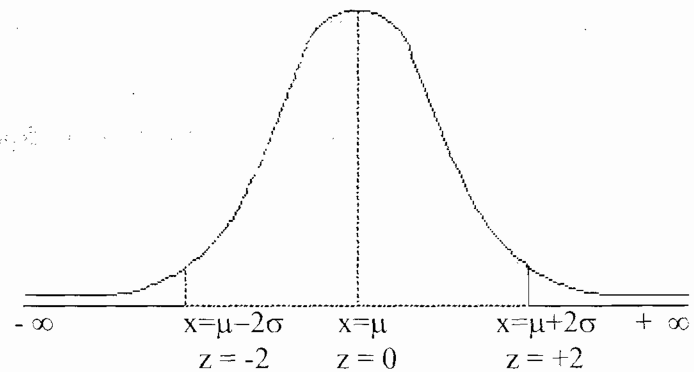
$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) &= P(-1 \le z \le 1) \\ &= 2P(0 < z < 1) \\ &= 2\,(0.3413) \\ &= 0.6826 \end{aligned}$$



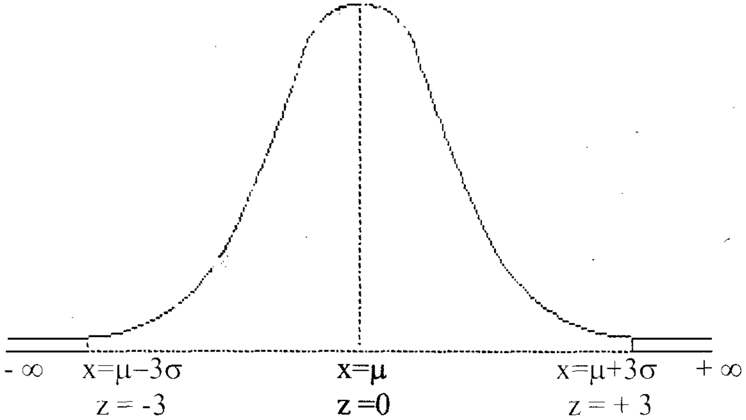



குறிப்பு : $x = \mu \pm \sigma$ ல் அமையும் புள்ளிகள் வளைவுமாற்று புள்ளிகள் எனப்படும்.

அது போல $$\begin{aligned} P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) &= P(-2 < z < 2) \\ &= 2P(0 < z < 2) \\ &= 2\,(0.4772) = 0.9544 \end{aligned}$$




$$\begin{aligned} P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) &= P(-3 < z < 3) \\ &= 2P(0 < z < 3) \\ &= 2\,(0.49865) = 0.9973 \end{aligned}$$




இயல்நிலை மாறி x ன் மதிப்புகள் $\mu \pm 3\sigma$ என்ற எல்லைக்கு வெளியில் அமையும் போது அதன் நிகழ்தகவு

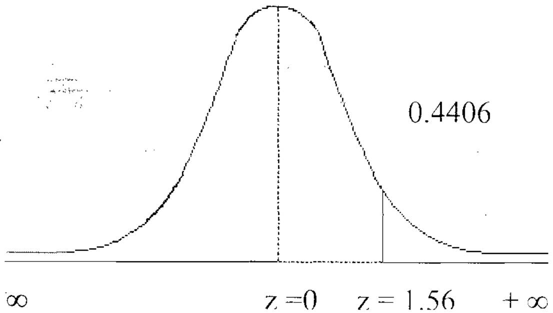
$$P(|x-\mu| > 3\sigma) = P(|z| > 3) = 1 - P(-3 \le z \le 3)$$
$$= 1 - 0.9773 = 0.0027$$

எனவே கோட்பாட்டின்படி இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைகோட்டின் எல்லை $-\infty$ முதல் $\infty$ வரை இருந்தாலும் மதிப்புகள் (நிகழ்தகவுகள்) வளைவரையின் $\mu \pm 3\sigma$ எல்லைக்குள் அமைவதாக எதிர் பார்க்கப்படுகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 15 :**

திட்ட இயல்நிலை மாறியின் மதிப்பு 0 மற்றும் 1.56 க்கு இடையில் அமையும் எனில் அதன் நிகழ்தகவு காண்க

**தீர்வு:**



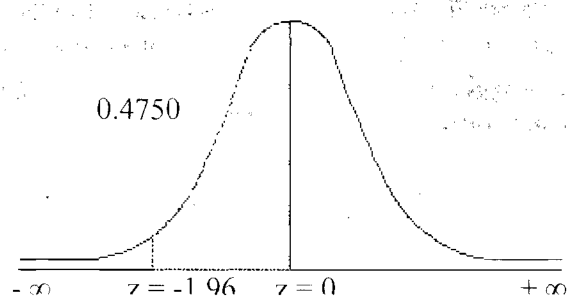



$P(0 < z < 1.56)$ என்பது $z = 0$ மற்றும் $z = 1.56$ இடையே உள்ள பரப்பானது 0.4406 ஆகும்.

**எடுத்துக்காட்டு 16 :**

$z = -1.96$ லிருந்து $z = 0$ வரையுள்ள திட்ட இயல் நிலை மாறியின் பரப்பு காண்க.

**தீர்வு :**



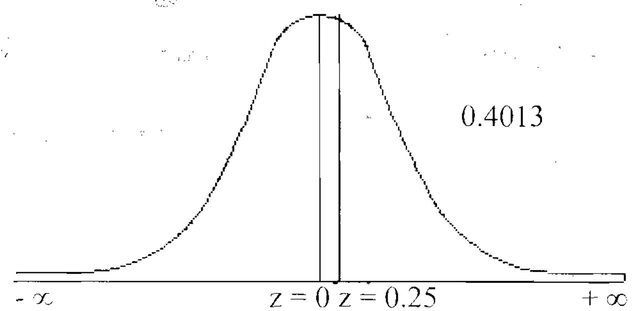

$z = 1.96$ லிருந்து $z = 0$ வரையுள்ள திட்ட இயல்நிலை மாறியின் பரப்பு என்பது $z = -1.96$ லிருந்து $z = 0$ வரையுள்ள பரப்பிற்கு சமம். அதாவது $P(-1.96 < z < 0) = P(0 < z < 1.96)$(சமச்சீர் )

$$= 0.4750$$

**எடுத்துக்காட்டு : 17**

$z = 0.25$ க்கு வலப்பறம் அமையும் பரப்புகாண்க

**தீர்வு :**

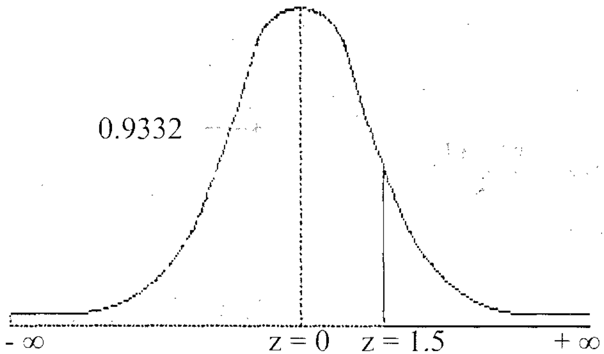


$$P(z > 0.25) = P(0 < z < \infty) - P(0 < z < 0.25)$$
$$= 0.5000 - 0.0987$$
$$= 0.4013$$

**எடுத்துக்காட்டு18:**

z = 1.5 க்கு இடப்புறம் அமையும் பரப்பைக் காண்க

**தீர்வு :**

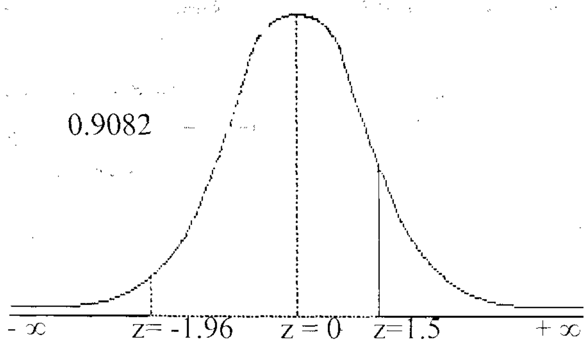



$$P(z < 1.5) = P(-\infty < z < 0) + P(0 < z < 1.5)$$
$$= 0.5 + 0.4332 = 0.9332$$

**எடுத்துக்காட்டு 19 :**

திட்ட இயல்நிலை மாறியின் மதிப்பு = −1.96 மற்றும் 1.5 க்கு இடைபட்ட பரப்பைக் காண்க

**தீர்வு :**






$$P(-1.96 < z < 1.5) = P(-1.96 < z < 0) + P(0 < z < 1.5)$$
$$= P(0 < z < 1.96) + P(0 < z < 1.5) \text{ (சமச்சீர்)}$$
$$= 0.4750 + 0.4332$$
$$= 0.9082$$

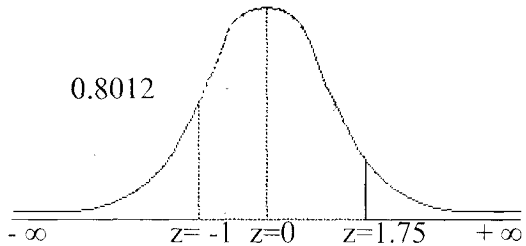
**எடுத்துக்காட்டு 20 :**

$\mu = 50$ மற்றும $\sigma = 8$ ஐ கொண்ட இயல்நிலைப்பரவலில் x ன் மதிப்பு 42 மற்றும் 64க்கு இடையில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

**தீர்வு :**

கொடுக்கப்பட்டவை $\mu = 50$ மற்றும் $\sigma = 8$

திட்ட இயல்நிலை மாறி $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$




X = 42 எனில் $Z_1 = \dfrac{42 - 50}{8} = \dfrac{-8}{8}$
$= -1$

X = 64 எனில் $Z_2 = \dfrac{64 - 50}{8} = \dfrac{14}{8}$
$= 1.75$

$$\therefore P(42 < x < 64) = P(-1 < z < 1.75)$$
$$= P(-1 < z < 0) + P(0 < z < 1.95)$$
$$= P(0 < z < 1) + P(0 < z < 1.75) \text{ (சமச்சீர்)}$$
$$= 0.3413 + 0.4599$$
$$= 0.8012$$

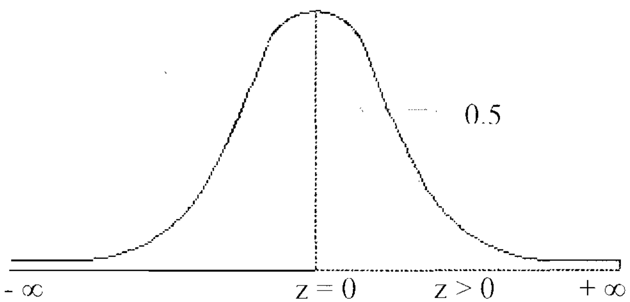
**எடுத்துக்காட்டு 21 :**

ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களுக்கு திறமைக்கான சோதனை கொடுக்கப்பட்டது. அவர்களுடைய மதிப்பெண்களின் பரவல், சராசரி 60 ம், திட்டவிலக்கம் 5 ம் கொண்ட இயல் நிலைப் பரவலைச் சார்ந்துள்ளதாகத் தெரியவருகிறது. எத்தனை சதவீதம் மாணவர்கள் i) 60 க்கு மேற்பட்ட மதிப்பெண்களும் ii) 56 க்கு கீழ் மதிப்பெண்களும் iii) 45 மற்றும் 65 மதிப்பெண்களுக்கு இடையில் பெற்றுள்ளனர் எனக்காண்க.

**தீர்வு:**

கொடுக்கப்பட்டவை, சராசரி $\mu = 60$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் $\sigma = 5$

திட்ட இயல் நிலை மாறி $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$




$X = 60$, எனில் $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{60-60}{5} = 0$

$\therefore P(x > 60) = P(z > 0) = P(0 < z < \infty) = 0.5000$

எனவே 60 மதிப்பெண்களுக்கு மேல் வாங்கிய மாணவர்களின் சதவீதம் = 0.5000 ( 100 ) = 50 %

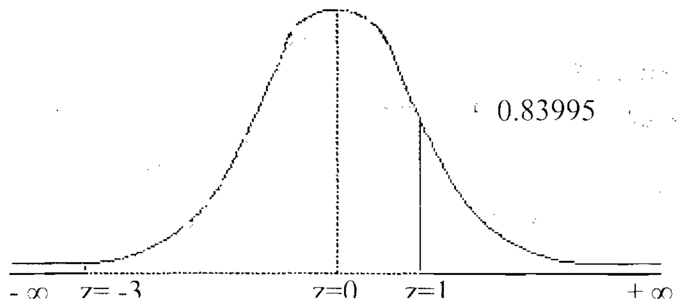
$X = 56$, எனில் $Z = \dfrac{56-60}{5} = \dfrac{-4}{5} = -0.8$

$$\begin{aligned} P(x < 56) &= P(z < -0.8) \\ &= P(-\infty < z < 0) - P(-0.8 < z < 0) \\ &= P(0 < z < \infty) - P(0 < z < 0.8) \quad \text{(சமச்சீர்)} \\ &= 0.5 - 0.2881 = 0.2119 \end{aligned}$$

எனவே, 56 மதிப்பெண்களுக்கு கீழ் உள்ள மாணவர்களின் சதவீதம் 0.2119(100) = 21.19%



$X = 45$, எனில் $z = \dfrac{45-60}{5} = \dfrac{-15}{5} = -3$




$X = 65$ எனில் $z = \dfrac{65-60}{5} = \dfrac{5}{5} = 1$

$$\begin{aligned} P(45 < x < 65) &= P(-3 < z < 1) \\ &= P(-3 < z < 0) + P(0 < z < 1) \\ &= P(0 < z < 3) + P(0 < z < 1) \quad \text{(சமச்சீர்)} \\ &= 0.4986 + 0.3413 \\ &= 0.8399 \end{aligned}$$

45 மற்றும் 65 மதிப்பெண்களுக்கு இடையில் உள்ள மாணவர்களின் சதவீதம் = 0.8399 (100) = 83.99 %

**எடுத்துக்காட்டு 22:**

சராசரி 2 மற்றும் திட்ட விலக்கம் 3 எனக் கொண்ட இயல்நிலைப்பரவலை x தழுவுகிறது. x ஆனது நிகழ்தகவு 0.4115 ஐ ஏற்கின்ற நிலையில் மாறி x ன் மதிப்பைக் காண்க.

**தீர்வு :**

கொடுக்கப்பட்டவை, $\mu = 2$, $\sigma = 3$. z ஐ தேவையான திட்ட நிலை மதிப்பாகக் கொள்வோம். எனவே, அட்டவணையிலிருந்து 0.4115 என்ற பரப்பிற்கு உரிய சரியான z ன் மதிப்பு 1.35 ஆகும் அதாவது $z = 1.35$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$1.35 = \frac{x-2}{3}$$

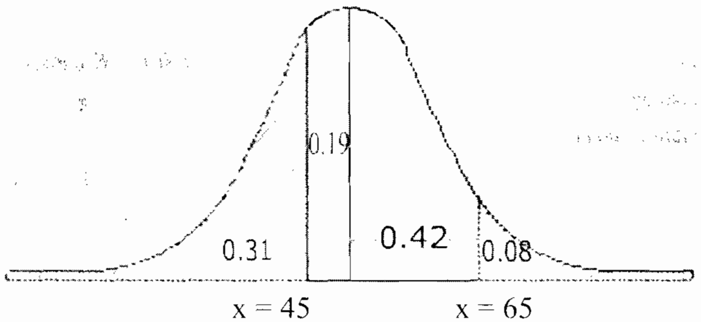
$$x = 3(1.35) + 2$$
$$= 4.05 + 2 = 6.05$$

**எடுத்துக்காட்டு 23:**

ஓர் இயல் நிலைப்பரவலில் 31 % உறுப்புகள் 45க்கு கீழும் 8 % உறுப்புகள் 64க்கு மேலும் உள்ளன.அதன் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு காண்க.

**தீர்வு:**

இயல்நிலைப் பரவலில் சராசரி $\mu$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் $\sigma$ என்றும் உறுப்புகள் $x$ என குறிப்பதாகக் கொள்வோம்




$x = 45,\ z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{45-\mu}{\sigma} = -z_1$ என்க

படத்தின் வாயிலாக $x = 45$ மற்றும் $x = 65$ ஐ குறிக்கப்பட்டிருப்பதை அறியலாம்.

31 % உறுப்புகள் $x = 45$ க்கீழ் அமைவதால். $x$ ன் நிலையானது $x = \mu$ என்ற நிலைக்கோட்டிற்கு இடதுபுறம் அமைகிறது.

8 % உறுப்புகள் $x = 64$ க்கு மேல் அமைவதால். $x$ ன் நிலையானது $x = \mu$ என்ற நிலைக்கோட்டிற்கு வலதுபுறம் அமைகிறது.

ஏனெனில் $x$ ன் மதிப்பு $x = \mu$ க்கு இடப்புறம் உள்ளதால் $z_1$ன் மதிப்பு எதிர்எண்ணாக $(-z_1)$ எடுக்கப்படுகிறது.

மேலும் படத்தின் முலமாக

$$P(x < 45) = 0.31$$



$$P(z < -z_1) = 0.31$$
$$P(-z_1 < z < 0) = P(-\infty < z < 0) - P(-\infty < z < z_1)$$
$$= 0.5 - 0.31 = 0.19$$
$$P(0 < z < z_1) = 0.19 \qquad \text{(சமச்சீர்)}$$
$$z_1 = 0.50$$
$$P(x > 64) = 0.08$$
$$P(0 < z < z_2) = P(0 < z < \infty) - P(z_2 < z < \infty)$$
$$= 0.5 - 0.08 = 0.42$$
$$z_2 = 1.40$$

$z_1$ மற்றும் $z_2$ ன் மதிப்புகளை பிரதியிட.

எனவே

$$\frac{45-\mu}{\sigma} = -0.50 \quad \text{மற்றும்} \quad \frac{64-\mu}{\sigma} = 1.40$$

$$\mu - 0.50\,\sigma = 45 \quad \text{-----} \ (1)$$
$$\mu + 1.40\,\sigma = 64 \quad \text{-----} \ (2)$$
$$(2) - (1) \Rightarrow 1.90\,\sigma = 19 \Rightarrow \sigma = 10$$

திட்டவிலக்கம் $\sigma = 10$ ஐ (1) ல் பிரதியிட

$$\mu = 45 + 0.50(10)$$
$$= 45 + 5 = 50$$

$\therefore$ சராசரி $\mu = 50$ மற்றும் மாறுபாடு $\sigma^2 = 100$

## பயிற்சி - 3

**I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும் :**

1. ஈருறுப்புப் பரவலின் பயன்பாட்டிற்குரியது
   அ) அரிய நிகழ்ச்சிகள்
   ஆ) திரும்ப திரும்ப நடைபெறும் இருநிகழ்ச்சிகள்
   இ) 3 நிகழ்ச்சிகள்
   ஈ) நடைபெறாத நிகழ்ச்சிகள்

2. ஈருறுப்புப் பரவலின் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p மற்றும் தோல்விக்கான நிகழ்தகவு q எனில் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு இரண்டிற்கும் இடையே உள்ள உறவு
   அ) சராசரி $<$ மாறுபாடு ஆ) சராசரி $>$ மாறுபாடு
   இ) சராசரி = மாறுபாடு ஈ) சராசரி $\leq$ மாறுபாடு

3. ஈருறுப்புப் பரவலின் மாறுபாடானது

அ) npq　　ஆ) np　　இ) $\sqrt{npq}$　　ஈ) 0

4. ஈருறுப்புப்பரவல்　$15Cx\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{15-x}$　எனில் சராசரியானது

அ) 5　　ஆ) 10　　இ) 15　　**ஈ) 3**

5. ஈருறுப்புபரவலின் சராசரி 8 மற்றும் மாறுபாடு 4 எனில் P(x = 1) ன் மதிப்பானது

அ) $\frac{1}{2^{12}}$　　ஆ) $\frac{1}{2^{4}}$　　இ) $\frac{1}{2^{6}}$　　ஈ) $\frac{1}{2^{8}}$

6. ஈருறுப்புபரவலில் n = 4 மற்றும் P(x = 2) = 3P(x =3) என அமையும்பொழுது p ன் மதிப்பானது

அ) $\frac{9}{11}$　　ஆ) 1　　இ) $\frac{1}{3}$　　ஈ) இதில் ஏதுமில்லை

7. சராசரி 10ம் முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை 30 ம் உடைய ஈருறுப்பு பரவலில் தோல்விக்கான நிகழ்தகவு

அ) 0.25　　ஆ) 0.333　　இ) 0.666　　ஈ) 0.9

8. ஈருறுப்புப்பரவலின் மாறுபாடு 2 எனில் அதன் திட்டவிலக்கம்

அ) 2　　ஆ) 4　　இ) 1/2　　ஈ) $\sqrt{2}$

9. ஈருறுப்புப்பரவலில் சார்பற்ற முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை n எனில் n வெற்றிகளுக்கான நிகழ்தகவு

அ) $nC_xp^xq^{n-x}$　　ஆ) 1　　இ) $p^n$　　ஈ) $q^n$

10. ஈருறுப்ப்புப்பரவலை முழுமையாக நிர்ணயிக்க இவை தெரிந்தால் போதும்

அ) p மட்டும்　　ஆ) q மட்டும்

இ) p மற்றும் q　　ஈ) p மற்றும் n

11. ஈருறுப்புப் பரவலில் முயற்சிகளானது

அ) ஒன்றை ஒன்று விலக்குவன

ஆ) ஒன்றை ஒன்று விலக்காதவை

இ) சார்பற்றவை

ஈ) சார்பற்றவை அல்ல



12. ஒன்றை ஒன்று சாராத இரு மாறிகள் x மற்றும் y ஆகியவற்றின் ஈருறுப்புப்பரவல்களின் பண்பளவைகளாக ($n_1$, p) மற்றும் ($n_2$, p) முறையே இருந்தால் அவைகளின் கூடுதல் (x + y) இன் ஈருறுப்புபரவலின் பண்பளவையானது

அ) ($n_1 + n_2$, 2p)　　ஆ) (n, p)

இ) ($n_1 + n_2$, p)　　ஈ) ($n_1 + n_2$, p + q)

13. பாய்சான் பரவலில்

அ) சராசரி > மாறுபாடு　　ஆ) சராசரி = மாறுபாடு

இ) சராசரி < மாறுபாடு　　ஈ) சராசரி ≠ மாறுபாடு

14. பாய்சான் பரவலுடன் தொடர்புடையவை

அ) அரிய நிகழ்ச்சிகள்

ஆ) குறிபிட்ட நிகழ்ச்சிகள்

இ) நடைபெற முடியாத நிகழ்ச்சிகள்

ஈ) பெரும்பாலும் நிச்சயமான நிகழ்ச்சிகள்

15. $m_1$ மற்றும் $m_2$ என்பன x மற்றும் y என்ற பாய்சான் மாறிகளின் பண்பளவைகள் எனில் ( x + y ) என்ற பாய்சான் மாறியின் பண்பளவையானது.

அ) $m_1 m_2$　　ஆ) $m_1 + m_2$　　இ) $m_1 - m_2$　　ஈ) $m_1 . m_2$

16. பாய்சான் பரவல் ஒரு

அ) தொடர்ச்சியான பரவல்　　ஆ) தனித்த பரவல்

இ) தொடர்ச்சியாக அல்லது தனித்த பரவலாக

ஈ) தொடர்ச்சியும் அல்ல தனித்த பரவலும் அல்ல

17. ஈருறுப்பு பரவலின் எல்லை நிலையாகப் பாய்சான்பரவல் அமைவதற்கு தேவையான நிபந்தனை

அ) $n \to \infty$ ; $p \to 0$ மற்றும் $np = \sqrt{m}$

ஆ) $n \to 0$ ; $p \to \infty$ மற்றும் p = 1/m

இ) $n \to \infty$ ; $p \to \infty$ மற்றும் np = m

(ஈ) $n \to \infty$ ; $p \to 0$ மற்றும் ,np = m

18. பாய்சான் பரவலின் எதிர்பார்க்கப்படும் சராசரி மதிப்பானது 1 எனில் P (x < 1) ன் மதிப்பு

அ) $e^{-1}$　　ஆ) $1-2e^{-1}$

இ) $1- 5/2e^{-1}$　　ஈ) இதில் ஏதுமில்லை

19. இயல்நிலைப்பரவல். ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லை நிலையாக தேவையான நிபந்தனை

அ) $n \to \infty$ $p \to 0$ ஆ) $n \to 0$ , $p \to q$

இ) $n \to \infty$ , $p \to n$ ஈ) $n \to \infty$ மற்றும் p ம் q ம் சிறியதல்ல.

20. இயல் நிலைப் பரவலில் கோட்ட அளவு

அ) ஒன்று ஆ) பூச்சியம்

இ) ஒன்றை விட பெரியது ஈ) ஒன்றை விட சிறியது

21. இயல்நிலைப் பரவலின் முகடு

அ) $\sigma$ ஆ) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ இ) $\mu$ ஈ) 0

22. திட்ட இயல்நிலைப் பரவலை இவ்வாறு குறிப்பிடலாம்

அ) N(0,0) ஆ) N(1,1) இ) N(1,0) ஈ) N(0,1)

23. இயல் நிலை நிகழ்தகவு வளைகோட்டின் கீழ் அமையும் மொத்த பரப்பு

அ) ஒன்றை விட சிறியது ஆ) ஒன்று

இ) ஒன்றை விட பெரியது ஈ) பூச்சியம்

24. சமவாய்ப்பு மாறி x ன் மதிப்புகள் $(\mu - 2\sigma , \mu + 2\sigma)$ என்ற இடைவெளிக்குள் ஏற்படுத்தும் நிகழ்தகவு

அ) 0.9544 ஆ) 0.6826 இ) 0.9973 ஈ) 0.0027

25. $P(-\infty < z < 0)$ இன் பரப்பளவு

அ) 1 ஆ) 0.1 இ) 0.5 ஈ) 0

26. திட்ட இயல்நிலைப்பரவலில்

அ) $\mu = 1, \sigma = 0$

ஆ) $\mu = 0, \sigma = 1$

இ) $\mu = 0 ,\sigma = 0$

ஈ) $\mu = 1, \sigma = 1$

27. சமவாய்ப்புமாறி x ன் இயல்நிலைப் பரவல் $f(x) = C. e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-100)^2}{25}}$ எனில் C ன் மதிப்பு

அ) $5\sqrt{2\pi}$ ஆ) $\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}$ இ) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ஈ) 5



28. இயல்நிலைப் பரவலுக்கு

அ) முகடு இல்லை ஆ) ஒரே ஒரு முகடு உண்டு

இ) இரு முகடுகள் உண்டு ஈ) பல முகடுகள் உண்டு

29. இயல் நிலைப் பரவலுக்கு

அ) சராசரி = இடைநிலை = முகடு

ஆ) சராசரி < இடைநிலை < முகடு

இ) சராசரி > இடைநிலை > முகடு

ஈ) சராசரி > இடைநிலை < முகடு

30. இயல்நிலைப்பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $P(X = x) =$

$\frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-30)^2}{25}}$ ; $-\alpha < x < \alpha$ எனில் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு

அ) சராசரி = 30 , மாறுபாடு = 5 ஆ) சராசரி = 0 , மாறுபாடு = 25

இ) சராசரி = 30 , மாறுபாடு = 25 ஈ) சராசரி = 30 , மாறுபாடு = 10

31. இயல்நிலைப்பரவலின் சராசரி = 60 எனில் இதன் முகடு ஆனது

அ) 60 ஆ) 40 இ) 50 ஈ) 30

32. இயல்நிலை மாறி x க்கு $\mu = 100$ மற்றும் $\sigma^2 = 25$ எனில் $P(90 < x < 120)$ இன் மதிப்பு

அ) $P(-1 < z < 1)$ ஆ) $P(-2 < z < 4)$

இ) $P(4 < z < 4.1)$ ஈ) $P(-2 < z < 3)$

33. x என்ற மாறியானது N(6, 1.2) மற்றும் $P(0 \le z \le 1) = 0.3413$, எனில் $P(4.8 \le x \le 7.2)$ இன்மதிப்பு

அ) 0.3413 ஆ) 0.6587 இ) 0.6826 ஈ) 0.3174

## II. கோடிட்ட இடங்களை பூர்த்திசெய்க:

34. நாணயத்தை தொடர்ந்து சுண்டுவதால் தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு __________ ஆகும்

35. ஈருறுப்பு பரவலின் சராசரி = 4 மற்றும் மாறுபாடு = 2 எனில் பண்பளவைகளானது___________ ஆகும்

36. $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^9$ என்பது ஈருறுப்பு பரவலை குறிக்கும் போது இதன் திட்டவிலக்கம் _______ ஆகும்

37. ஈருறுப்புபரவலில் முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை மிகப்பெரியதாகவும் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு பூச்சியமாகவும் அமைந்த நிலையில் இப்பரவல் _______ ஆகும்.

38. பாய்சான் பரவலில் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு ________ஆகும்.

39. பாய்சான் பரவலின் சராசரி = 0.49 எனில் திட்டவிலக்கம் ____ ஆகும்

40. பாய்சான் பரவலில், எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் காண பயன் படுத்தப்படும் மறுதரவு தொடர்பானது ____________ ஆகும்.

41. $\frac{\sum fx^2}{N} - (\bar{x})^2$ என்ற வாய்ப்பாடு மூலம்_______ கண்டறியலாம்.

42. இயல்நிலைப் பரவலில் சராசரியானது ______முதல்_______ வரை மதிப்புகளைப் பெறும்.

43. $\mu = 0$ மற்றும் $\sigma = 1$ எனில் இயல்நிலைப்பரவல் _________என அழைக்கப்படும்.

44. $P(-\infty < z < 0)$ எடுத்து கொள்ளும் பரப்பளவு__________ஆகும்

45. $\mu = 1200$ மற்றும் $\sigma = 400$ எனில் $x = 800$ க்குரிய திட்ட இயல்நிலை மாறி z ன் மதிப்பு _________ ஆகும்

46. $x = \mu \pm \sigma$ என்ற புள்ளிகள்___________என்றழைக்கப்படும்

47. $P(-3 < z < 3)$ ன் மதிப்பு_________ஆகும்

48. இயல் நிலை வளை கோட்டிற்கு x அச்சு_________ ஆகும்.

## III. பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளி

49. ஈருறுப்புபரவலில் சராசரி = 7 மற்றும் மாறுபாடு = 16 என்ற கூற்றை விளக்குக:

50. சராசரி 3 மற்றும் மாறுபாடு 2 எனக் கொண்ட ஈருறுப்பு பரவலைக் காண்க.

51. ஈருறுப்புப்பரவலின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் முறையே 12 மற்றும் 2 எனில் n மற்றும் p ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

52. இரு பகடைகள் 4 முறை வீசப்படுகின்றன. ஒரே மாதிரியான எண்கள் இருபகடையில் கிடைத்தலை வெற்றி எனக்கொண்டால், 2 வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

53. ஈருறுப்புப் பரவல் - விளக்குக

54. ஈருறுப்புப்பரவலின் பண்புகளை விவரிக்கவும்.

55. ஈருறுப்புப் பரவலின் மாறிகளின் நிபந்தைனைகளைக்கூறுக.



56. ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துதல் பற்றி விவரிக்கவும்

57. $(0.68 + 0.32)^{10}$ என்ற ஈருறுப்புப் பரவலின் கீழ் இரு வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவை காண்க.

58. ஈருறுப்புபரவலில் ஓர் நிகழ்ச்சி நடைபெற நிகழ்கதவு = 1/5 மற்றும் முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை 100 எனில் அதன் சராசரி என்ன?

59. துறைமுகம் ஒன்றில் 10 கப்பல்களில் சராசரியாக 8 கப்பல்கள் பாதுகாப்பான முறையில் வந்தடைகின்றன. 1600 கப்பல்களில் பாதுகாப்பான முறையில் வந்தடைவதற்கான சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்க.

60. கல்லூரிகளில் மாலை நேரக்கல்வி பெறும் மாணவர்களில் இள நிலை பட்டம் பெறுபவர்களின் நிகழ்தகவு = 0.4 எனில் 5 மாணவர்களில் i) ஒருவரும் இல்லை ii) ஒருவர்மட்டும் iii) குறைந்தது ஒருவர் மட்டும் பட்டம் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

61. நான்கு நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகின்றன எனில் i) 2 தலைகள் மற்றும் 2 பூக்கள் ii) குறைந்தது 2 தலைகள் iii) குறைந்தது ஒரு தலை கிடைக்க நிகழ்தகவு காண்க

62. ஒரு தானியங்கி இயந்திரத்தின் 10% குறைபாடுள்ளவையாக கண்டறியப்படுகிறது. 20 திருகாணிகள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும்போது i) சரியாக 2 மட்டும் குறைபாடாக ii) அதிகபட்சம் 3 குறைபாடாக iii) குறைந்தது 2 குறைபாடாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க

63. 5 பகடைகள் ஒன்று சேர 96 முறைகள் வீசப்படுகின்றன. இதில் 4, 5 அல்லது 6 கிடைப்பதற்கான அலைவெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் காண்க. மற்றும் கண்டறியப்பட்ட மற்றும் எதிர்பார்க்கபடும் அலை வெண்களுக்கு திட்டவிலக்கத்தை கணக்கிட்டு ஒப்பிடுக

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.5 (அ) 6 கிடைத்தல் | : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| அலைவெண் | : | 1 | 10 | 24 | 35 | 18 | 8 |

64. கீழ்வரும் விவரங்களுக்கு ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துக.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| f : | 18 | 35 | 30 | 13 | 4 |

65. 8 நாணயங்கள் ஒருசேர 256 முறை சுண்டப்படுகின்றன. தலை விழுதலுக்கான எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களைக் காண்க. எதிர்பார்க்கப்படும்

அலைவெண்களுக்கு சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்க. மேலும் கண்டறியப்பட்ட அலைவெண்களுக்கு சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்க.

| தலைகளின் எண்ணிக்கை : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| அலைவெண்கள்: | 2 | 6 | 39 | 52 | 67 | 56 | 32 | 10 | 1 |

66. பாய்சான் பரவல் பற்றி விவரிக்கவும்.
67. பாய்சான் பரவலுக்கு எடுத்துகாட்டுகள் இரண்டைத்தருக.
68. பாய்சான் பரவலின் பண்புகளைக் கூறவும்.
69. பாய்சான் பரவலைப் பொருத்துதல் பற்றி விவரிக்கவும்
70. பாய்சான் பரவலில் மாறி x ன் சராசரி 6 எனில் i) $p(x = 0)$ மற்றும் $p(x = 2)$ மதிப்புகளைக் காண்க
71. பாய்சான் பரவலின் மாறுபாடு 0.5 எனில் $p(x = 3)$ ன் மதிப்புகாண்க $[e^{-0.5} = 0.6065]$
72. பாய்சான் பரவலின் கீழ் சமவாய்ப்பு மாறி x க்கு $P(x = 1) = P(x = 2)$ எனில் பரவலின் சராசரி மற்றும் $P(x = 0)$ ன் மதிப்புகாண்க $[e^{-2} = 0.1353]$
73. ஒரு நிறுவனத்தால் தயாரிக்கப்படும் விளக்குகளில் 3% குறைபாடாக உள்ளது 100 விளக்குகள் கொண்ட ஒரு கூறில் சரியாக 5 விளக்குகள் குறைபாடாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க
74. ஒரு தொழிற் பேட்டையில் கடந்தகால அனுபவத்தின் மூலமாக மாதம் ஒன்றிற்கு சராசரியாக 4 தொழிற்சாலை விபத்துகள் நடைபெறுவதாகக் கணக்கிடப்படுகிறது. கொடுக்கப்பட்ட ஓர் ஆண்டில் 3க்கும் குறைவான விபத்துகள் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க. இதற்கு பாய்சான் பரவலைப் பயன்படுத்துக $[e^{-4} = 0.0183]$
75. தொலைகாட்சிப் பெட்டிகள் தயாரிக்கும்போது அதில் சராசரியாக 5% குறைபாடுள்ளவையாகத் தெரிகிறது. 100 அடங்கிய ஒரு தொகுதியினை விற்பனை செய்யும்போது 4க்கு மேல் குறைபாடு இல்லை என உறுதி அளிக்கின்றனர். அந்த உறுதி மொழியை நிறைவுசெய்ய முடியாமல் போவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க
76. ஒரு கூர்கத்தி உற்பத்திச் செய்யும் தொழிற்சாலையில் உற்பத்தியின் போது 5% குறைபாடுள்ளவையாக இருக்கிறது. 10 கூர்கத்திகள் கொண்ட பெட்டிகளாக விற்கபடுகின்றன. பாய்சான் பரவலைப் பயன்படுத்தி 1.00.000 அடங்கிய பெட்டிகளில் i) ஒன்று குறைபாடாக ii) இரண்டு குறைபாடாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க.



77. அதிகமபடி வேலை செய்யும் ஒரு தொழிற்சாலையில். ஒருவேலைப்பருவத்தில் சராசரியாக 3 பேர் விடுப்பில் உள்ளனர் . ஒரு குறித்த பருவத்தில் 1) சரியாக இருவர் 2) நான்கு நபர்களுக்கு மேல் விடுப்பில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.
78. மருந்து புட்டிகளை தயாரிக்கும் ஒருவர் தமது தயாரிப்பில் 1 % புட்டிகள் குறைபாடு உள்ளதைக் காண்கிறார். அவைகள் 500 புட்டிகள் கொண்டதாக பெட்டிகளில் அடைக்கப்படுகின்றன. மருந்து விற்பனையாளர் 100 பெட்டிகளை வாங்குகிறார். பாய்சான் பரவலைப் பயன்படுத்தி எத்தனைப்பெட்டிகள்
    i) குறைபாடில்லாத ii) சரியாக இரண்டு குறைபாடுள்ளவை
    iii) குறைந்தது 2 குறைபாடுள்ள பெட்டிகள் இருக்கும் எனக் காண்க
79. தட்டச்சு செய்யும் போது ஏற்படும் தட்டச்சுப் பிழைகளின் எண்ணிக்கையின் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதற்கு பாய்சான் பரவலைப் பொருத்துக.

| ஒருபக்கத்தில் உள்ள பிழைகளின் எண்ணிக்கை: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| பக்கங்களின் எண்ணிக்கை: | 142 | 156 | 69 | 57 | 5 | 1 |

80. கீழ்காணும் விவரங்களுக்கு பாய்சான் பரவலைப் பொருத்துக.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | மொத்தம் |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f | 229 | 325 | 257 | 119 | 50 | 17 | 2 | 1 | 0 | 1000 |

81. ஒரு நகரில். 50 நாட்கள் கொண்ட ஒரு கால அட்டவணையின்போது ஏற்படும் 'விபத்துகளின் எண்ணிக்கை, நாட்கள்' விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதற்கான பாய்சான் பரவலைப் பொருத்துக.

| விபத்துகளின் எண்ணிக்கை : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| ஏற்பட்ட நாட்களின் எண்ணிக்கை : | 21 | 18 | 7 | 3 | 1 |

82. திட்ட இயல் நிலை மாறியின் மதிப்பு $Z = 0.78$ மற்றும் $Z = 2.75$ க்கு இடைபட்ட மதிப்பின் நிகழ்தகவு காண்க.
83. இயல் நிலை திட்ட வளைகோட்டின் கீழ் $Z = 0$ மற்றும் $Z = 1.75$ இடைபட்ட பரப்பு காண்க
84. இயல்நிலை திட்ட வளைவரைக்கு கீழ் $Z = -1.5$ மற்றும் $Z = 2.6$ க்கு இடைபட்டபரப்பு காண்க.
85. $Z = 1.96$ க்கு இடப்புறம் அமையும் பரப்பைக் காண்க
86. இயல் நிலை திட்ட வளைகோட்டின் கீழ் $Z = 2.70$ க்கு வலப்புறம் அமையும் பரப்பு காண்க.

87. சராசரி = 50 மற்றும் திட்டவிலக்கம் = 8 எனக் கொண்ட இயல் நிலைப்பரவலில் $x = 34$ மற்றும் $x = 62$ இடையே உள்ள நிகழ்தகவு காண்க.

88. இயல் நிலைப் பரவலின் சராசரி = 20 மற்றும் திட்டவிலக்கம் = 10 எனில் $x = 15$ மற்றும் $x = 40$ க்கு இடைபட்டபரப்பு யாது?

89. சராசரி 30 ம் திட்டவிலக்கம் 5 எனவும் கொண்ட இயல்நிலை வளை கோட்டில் 26 மற்றும் 40க்கு இடைபட்ட பரப்பு காண்க.

90. ஒரு பல்பொருள் அங்காடியில் வாடிக்கையாளர்களின் நிலுவைத் தொகைகள் ரூ1200 ஐ சராசரியாகவும், ரூ.400 ஐ திட்டவிலக்கமாகவும் கொண்ட இயல் நிலைப்பரவலாக அமைகிறது எனில் i) ரூ1500க்கு அதிகமாக உள்ள நிலுவை கணக்குகளின் சதவீதம் ii) ரூ1000 க்கும் ரூ 1500 க்கும் இடையில் உள்ள நிலுவை கணக்குகளின் சதவீதம் iii) ரூ 1500 க்கு குறைவான நிலுவை உள்ள கணக்குகளின் சதவீதம் காண்க.

91. தொழில் நுட்ப நுழைவுத்தேர்விற்கு பயிற்சி வகுப்புகள் எடுக்கும் விரிவுரையாளர்கள் 100 பேர்களின் வாராந்திர ஊதியம் சராசரி ரூ 700 ம் திட்டவிலக்கம் ரூ 400 மாக கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாகக் கொண்டது எனில் i) ரூ 720 மற்றும் ரூ 750 க்கு இடையே பெறுபவர்கள் ii) ரூ 750 க்கு மேல் பெறுபவர்கள் iii) ரூ630 க்கும் குறைவாக பெறுபவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

92. X ஐ மாறியாகக் கொண்ட இயல் நிலைப்பரவலில் சராசரி 12 ம் திட்டவிலக்கம் 4ம் எனில்
i) $X \geq 20$ ii) $X \leq 20$ iii) $0 < x < 12$ க்கான மதிப்புகளுக்கு நிகழ்தகவு காண்க

93. 100 உலர்மின் கலங்கள் அடங்கிய ஒரு மாதிரியில் அவைகளின் பலன் தரும் காலங்களை சோதனையிட்டு கிடைப்பதை பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது.
சராசரி $\mu = 12$ மணிகள், திட்டவிலக்கம் $\sigma = 3$ மணிகள்
இவ்விவரங்கள் இயல்நிலைப்பரவலைப் பெற்றுள்ளதாகக் கொண்டு எத்தனை சதவீதம் மின்கலங்கள் i) 15 மணி நேரத்திற்கு மேல் ii) 10 மற்றும் 14 மணிநேரத்திற்கு இடையில் iii) 6 மணி நேரத்திற்கு கீழ் பலன் தருபவையாக இருக்கும் எனக்காண்க

94. ஒரு தேர்வில் 44 % மாணவர்கள் 55 மதிப்பெண்களுக்கு கீழும். 6 % மாணவர்கள் 80 மதிப்பெண்களுக்கு மேலும் பெற்றனர் எனில் அத்தேர்வு மதிப்பெண்களின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்க.



95. ஓர் இயல் நிலைப் பரவலில் 7 % உறுப்புகள் 35 க்கு கீழும் 89 % உறுப்புகள் 63 க்கு கீழும் உள்ளன. அதன் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்க

**விடைகள்**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) ஆ | 2) ஆ | 3) அ | 4) ஆ | 5) அ | 6) இ |
| 7) இ | 8) ஈ | 9) இ | 10) ஈ | 11) இ | 12) இ |
| 13) ஆ | 14) அ | 15) ஆ | 16) ஆ | 17) ஈ | 18) அ |
| 19) ஈ | 20) ஆ | 21) இ | 22) ஈ | 23) ஆ | 24) அ |
| 25) இ | 26) ஆ | 27) ஆ | 28) ஆ | 29) அ | 30) இ |
| 31) அ | 32) ஆ | 33) இ | | | |

34. $\frac{1}{2}$ 35. $(8, \frac{1}{2})$ 36. $\sqrt{2}$ 37. பாய்சான் பரவல்

38. சமம் 39. 0.7

40. $f(x+1) = \frac{m}{x+1} f(x)$ 41. மாறுபாடு 42. $-\infty, +\infty$

43. திட்டஇயல்நிலைப் பரவல் 44. 0.5 45. –1

46. வளைவு மாற்று புள்ளிகள் 47. 0.9973

48. தொலைத் தொடுகோடு

49. இது ஏற்க முடியாத விவரம். ஏனெனில் $q = \frac{16}{7} > 1$

50. $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^9$, $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$ மற்றும் $n = 9$

51. $n = 18,\ p = \frac{2}{3}$. 52. $\frac{25}{216}$

57. $10\,C_2\,(0.32)^2 + (0.68)^8$ 58. 20 59. 1280

60. i) 0.08 ii) 0.259 iii) 0.92 61. i) $\frac{3}{8}$ ii) $\frac{11}{16}$ iii) $\frac{15}{16}$

62. (i) $190 \times \frac{9^{18}}{10^{20}}$ (ii) $\frac{1}{10^{20}}\,[9^{20} + 20 \times 9^{19} + 190 \times 9^{18} + 1140 \times 9^{17}]$

(iii) $1 - \frac{1}{10^{20}}\,[9^{20} + 20 \times 9^{19} + 190 \times 9^{18}]$

63. கண்டறியப்பட்ட திட்ட விலக்கம் = 1.13 எதிர்பார்க்கப்படும் திட்ட விலக்கம் = 1.12

65. கண்டறியப்பட்ட சராசரி = 4.0625 திட்ட விலக்கம் = 1.462

70. i).0.00279 ii) 0.938

71. 0.0126

72. a) சராசரி = 2 b) P(x=0) = 0.1353

73. P(x = 5) = 0.1008

74. 0.2379

75. 0.9598

76. i) 98,020 ii)1960 iii) 20

77. i) 0.2241 ii) 0.1846

78. i) 61 ii) 76 iii) 9

79. $P(x) = \frac{e^{-1} 1^x}{x!}$

80. $P(x) = \frac{e^{-1.5} (1.5)^x}{x!}$

81. $P(x) = \frac{e^{-0.9} (0.9)^x}{x!}$

82. 0.2147

83. 0.4599

84. 0.9285

85. 0.9750

86. 0.0035

87. 0.9104

88. 0.6687

89. 0.7653

90. i) 22.66 % ii) 46.49 % iii) 77.34 %

91. i) 16 ii)16 iii) 8

92. i) 0.0228 ii) 0.9772 iii) 0.4987

93. i) 15.87 % ii) 49.72 % iii) 2.28 %

94. சராசரி = 57.21 , திட்ட விலக்கம் = 14.71

95. சராசரி = 50.27, திட்ட விலக்கம் = 10.35

# 4. சிறப்புகாண் சோதனைகள்
# (பொதுக் கோட்பாடுகள்)

## 4.0 அறிமுகம்:

முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றி எல்லா விவரங்களும் சேகரித்தல் என்பது எளிதானதல்ல. ஏனெனில் முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகள் (முடிவுறு அல்லது முடிவுறா) முழுவதும் அறிய இயலாமல் போவதற்கான காரணங்களாக அமைவன காலம், செலவினம் மற்றும் வேறு இடர்பாடுகளும் ஆகும். ஆதலால் அதிலிருந்து மாதிரிகள் (கூறுகள்) எடுக்கப்படுகிறது. மாதிரி (கூறு) என்பது புள்ளியியல் மாறியின் தனித்தன்மையுடையதாகவும் அத்தொகுதியின் முடிவுறு உட்கணமாகவும் அமைகிறது. மாதிரியில் உள்ள தனித்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையே அம்மாதிரியின் 'மாதிரி அளவு' (கூறு அளவு) எனப்படும்.

அன்றாட வாழ்க்கையில் நாம் மாதிரி எடுத்தல் என்பது அடிக்கடி பயன்படுத்தக் கூடியதொன்றாகும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு கடையில் உள்ள அரிசி, கோதுமை மற்றும் வேறு எந்த ஒரு பொருள்களின் தரத்தை நாம் அறிந்து கொள்ள விரும்பினால் பையிலிருந்து ஒரு கைப் பிடி எடுத்துப் பார்க்கிறோம். அதன் பிறகே அதனை வாங்குவதா அல்லது இல்லையா என்பதை தீர்மானிக்கின்றோம்.

## 4.1 முழுமைத் தொகுதிப்பண்பளவை மற்றும் புள்ளியியல் அளவை:

முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும் எடுத்துக்கொண்டு கணக்கிடப்படும் புள்ளியியல் மாறிலிகளான சராசரி ($\mu$), மாறுபாடு ($\sigma^2$), ஒட்டுறவுக்கெழு ($\rho$) மற்றும் முழுமைத் தொகுதி விகிதசமம் (P) ஆகியவைகள் முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகள் என அழைக்கப்படும்.

முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரிகளுக்கு கணக்கிடப்படும் புள்ளியியல் மாறிலிகளான சராசரி ($\bar{x}$), மாறுபாடு ($S^2$), மாதிரி ஒட்டுறவுக்கெழு (r), விகிதசமம் (p) ஆகியவைகள் மாதிரிப்புள்ளியியல் அளவைகள் என அழைக்கப்படும்.

பண்பளவைகள் அனைத்தும் முழுமைத் தொகுதி மதிப்புகளின் சார்பாகவும், மாதிரிப் புள்ளியியல் அளவைகள் மாதிரி மதிப்புகளின்



சார்பாகவும் அமைகிறது. பொதுவாக முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகள் தெரியாத நிலையில், மாதிரிப் புள்ளியியல் அளவைகள் அவற்றின் மதிப்பீடுகளாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

## 4.2 மாதிரிப் பரவல்:

N அளவு கொண்ட முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட n அளவு கொண்ட அனைத்து மாறிகளின் புள்ளியியல் அளவையின் பரவலே அந்த புள்ளியியல் அளவையின் மாதிரிப்பரவல் என்று அழைக்கப்படும் (டேனியல் மற்றும் பொ்ரல்). முழுமைத் தொகுதியில் N மதிப்புக்கள் உள்ளதாகக் கருதுவோம். இம்முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n அளவுடைய சமவாய்ப்பு மாதிரி எடுக்கப்படுகிறது எனில் கிடைக்கப்பெறும் மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை

$$NC_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} = K$$ ஆகும். இவ்வாறு கிடைக்கப்பெற்ற K மாதிரிகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் புள்ளியியல் அளவைகள் (சராசரி, மாறுபாடு, ஒட்டுறவுக்கெழு, கோட்ட அளவை மற்றும் பல) கணக்கிடப்பட்டு அந்த K மதிப்புகளுக்கு ஒரு அலைவெண் பரவல் அமைக்கலாம். அவ்வாறு அமைக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவலே அப்புள்ளியியல் அளவையின் மாதிரிப்பரவல் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக நாம் $t = t(x_1, x_2, \ldots x_n)$ என்ற புள்ளியியல் அளவையை இந்த K மாதிரிகளுக்கு கண்டுபிடிக்கலாம். பிறகு அந்த புள்ளியியல் அளவை t-ன் மதிப்புகளான $t_1, t_2 \ldots, t_k$ மாதிரிப்பரவலை நிர்ணயம் செய்கிறது. இந்த புள்ளியியல் அளவை t ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியாகவும், அது பெறும் மதிப்புகள் $t_1, t_2, \ldots, t_k$ எனவும் கருதலாம். அந்த மாதிரிப் பரவலுக்கு பல்வேறான புள்ளியியல் மாறிலிகளான சராசரி, மாறுபாடு, கோட்டளவை, தட்டையளவை மற்றும் பல கணக்கிடலாம்.

t - ன் மாதிரிப்பரவலின் சராசரியானது

$$\bar{t} = \frac{1}{K}[t_1 + t_2 + \ldots + t_k] = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{k} t_i$$

மற்றும் t ன் மாறுபாடு $= \frac{1}{K}\left[(t_1 - \bar{t})^2 + (t_2 - \bar{t})^2 + \ldots + (t_k - \bar{t})^2\right]$

## 4.3 திட்டப்பிழை :

ஒரு புள்ளியியல் அளவையின் மாதிரிப் பரவலின் திட்ட விலக்கமே திட்டப்பிழை எனப்படும். இதனை S.E எனக் குறிக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக சராசரி $\bar{x}$ ன் மாதிரிப்பரவலின் திட்ட விலக்கம் அச்சராசரியின் திட்டப்பிழை ஆகும்.

இங்கு,

$$v(\bar{x}) = v\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots\dots\dots x_n}{n}\right)$$

$$= \frac{v(x_1)}{n^2} + \frac{v(x_2)}{n^2} + \dots\dots + \frac{v(x_n)}{n^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n^2} + \frac{\sigma^2}{n^2} + \dots\dots + \frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2}$$

$\therefore$ சராசரியின் திட்டப்பிழை $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

பெருங்கூறுகளில் அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படும் நன்கு அறிந்த புள்ளியியல் அளவைகளின் திட்டப்பிழைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதில் n என்பது மாதிரியின் அளவு, $\sigma^2$ என்பது முழுமைத்தொகுதியின் மாறுபாடு மற்றும் P என்பது முழுமைத்தொகுதியின் விகிதசமம் ஆகும். மேலும் Q = 1 − P. $n_1$ மற்றும் $n_2$ என்பன இரு மாதிரிகளின் அளவுகளாகும்.

| வ.எண் | புள்ளியியல் அளவை | திட்டப்பிழை |
|---|---|---|
| 1. | மாதிரியின் சராசரி $\bar{x}$ | $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ |
| 2. | கண்டறியப்பட்ட மாதிரி விகிதசமம் p | $\sqrt{\frac{PQ}{n}}$ |
| 3. | இரு மாறிகளின் சராசரிகளின் வித்தியாசம் $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ | $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ |
| 4. | இருமாதிரிகளின் விகிதசமங்களின் வித்தியாசம் $p_1 - p_2$ | $\sqrt{\frac{P_1Q_1}{n_1} + \frac{P_2Q_2}{n_2}}$ |

### திட்டப் பிழையின் பயன்பாடுகள்:

1. திட்டபிழையானது பெருங்கூறு கோட்பாடுகளிலும், எடுகோள் சோதனைகளுக்கு அடிப்படையாகவும் பயன்படுகிறது.



2. பண்பளவையின் மதிப்பீட்டின் நுண்மையின் அளவீடாக செயல்படுகிறது.
3. திட்டப் பிழையின் தலைகீழியை மாதிரியின் நுண்மை அல்லது நம்பகத் தன்மையின் அளவாக கொள்ளலாம்.
4. திட்டப்பிழையானது முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவை அமைவதற்கான நிகழ்தகவு எல்லைகளைக் கண்டுபிடிக்க ஏதுவாக அமைகிறது.

**குறிப்பு :**

ஒரு மாதிரியின் அளவையை அதிகரித்து புள்ளியியல் அளவையின் திட்டப்பிழையைக் குறைக்கலாம். ஆனால் இம்முறையில் செலவு, உழைப்பு, மற்றும் நேரம் ஆகியவை அதிகரிக்கின்றன.

### 4.4 இல் எனும் எடுகோள் மற்றும் மாற்று எடுகோள்:

முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவையில் ஊகத்தின் அடிப்படையில் மேற்கொள்ளப்படும் சோதனையே எடுகோள் எனப்படும்.

ஏதேனும் ஒரு காரணத்தின் அடிப்படையில் ஏற்படுத்தப்படும் ஊகமே எடுகோள் எனலாம். ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவையின் ஊகத்தின் அடிப்படையில் அமைக்கப்படும் எடுகோளானது, மரபு சார்ந்த அணுகு முறையில் ஒரே ஒரு எடுகோளாக அமைக்கப்படுவதில்லை. அதற்கு பதிலாக இரு வேறு எடுகோள்கள் அமைக்கப்படுகின்றன. அதில் ஒன்றை ஏற்றுக் கொள்ளும் எடுகோளாகவும் மற்றொன்றை மறுக்கப்படுவதற்கான எடுகோளாகவும் அமைக்கப்படுகின்றன. இதை நேர் எதிர்மாறாகவும் (vice versa) அமைக்கலாம்.

### இல் எனும் எடுகோள்:

எந்த வேறுபாடும் இல்லை என்ற எடுகோளே "இல் எனும் எடுகோள்" எனப்படும். இதனை வழக்கமாக Ho என குறிக்கப்படும்.

"உண்மை என எடுக்கப்பட்ட எடுகோளை மறுப்பதற்கான சோதனைக்குரிய எடுகோளே "இல் எனும் எடுகோள்" என்பது பேராசிரியர் ஃபிஷரின் கூற்றாகும். சிறப்பு காண் சோதனைகளுக்கு இது மிகவும் உபயோகமான கருவியாக அமைகிறது. எடுத்துகாட்டாக, ஒரு நிறுவனம் அது தயாரிக்கும் மின்விளக்குகள் சராசரியாக 1000 மணி நேரம் எரியுமென விளம்பரம் செய்கிறது. இவ்விளம்பரம் ஏற்று கொள்வதா இல்லையா என்பதை அறிய விரும்பினால் இங்கு இல் எனும் எடுகோள் $(H_0)$ ஆனது, நிறுவனம் தயாரிக்கும்

மின்விளக்குகளின் சராசரியாக எரியும் நேரம் 1000 மணி என அமைத்துக் கொள்கிறோம்.

**மாற்று எடுகோள்:**

இல் எனும் எடுகோளுக்கு எந்த ஒரு எடுகோளானது நிரப்புப் பண்பாக (Complementary) அல்லது எதிராக அமைகிறதோ அந்த எடுகோளை 'மாற்று எடுகோள்' என்று அழைக்கப்படுகிறது. அது வழக்கமாக $H_1$ என்று குறிக்கப்படும். எடுத்துகாட்டாக, முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி, $\mu$ யின் குறிப்பிட்ட மதிப்பு $\mu_0$ என்றுள்ளவாறு இல் எனும் எடுகோள் சோதனை செய்ய வேண்டுமெனில்,

படி:1 இல் எனும் எடுகோள்: $H_0: \mu = \mu_0$ என்றும்,

படி :2 மாற்று எடுகோள்: $H_1$ என்பதை கீழ்வருமாறு எடுக்கலாம்.

i) $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (ie $\mu > \mu_0$ or $\mu < \mu_0$)

ii) $H_1 : \mu > \mu_0$

iii) $H_1 : \mu < \mu_0$

இவைகளில் (i) இல் குறிப்பிட்டுள்ள மாற்று எடுகோளானது இருமுனை மாற்று எடுகோள் என்றும்,

(ii) இல் கூறப்பட்டது வல முனை மாற்று எடுகோள் என்றும் மற்றும்

(iii) இல் கூறப்பட்டது இட முனை மாற்று எடுகோள் என்றும் அழைக்கப்படும். இவ்வாறு அமைக்கப்படும் மாற்று எடுகோளின் உதவியால் நாம் பயன்படுத்தக் கூடிய சோதனை, ஒரு முனை (வல மற்றும் இட முனை) சோதனையா அல்லது இரு முனை சோதனையா என முடிவு எடுக்க பெரும் உதவியாக இருக்கும்.

## 4.5 சிறப்புகாண் மட்டம் மற்றும் தீர்மான மதிப்பு:

**சிறப்புகாண் மட்டம்:**

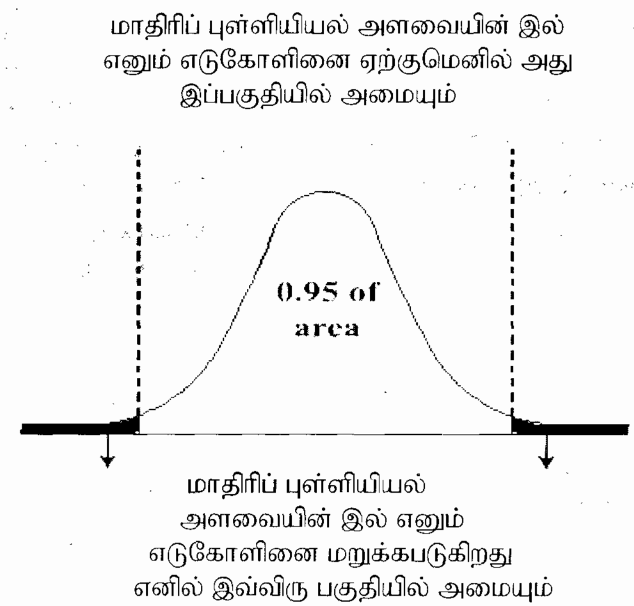
கொடுக்கப்பட்ட எடுகோள் சோதனை செய்யும் போது ஏற்படும் இழப்பை ஏற்று கொள்ளும் அதிகப்படியான நிகழ்தகவு அச்சோதனையின் சிறப்புகாண் மட்டம்" எனப்படும். இந்த நிகழ்தகவு பொதுவாக $\alpha$ என குறிக்கப்படும். பொதுவாக மாதிரிகள் எடுப்பதற்கு முன்னதாகவே $\alpha$ குறிப்பிடப்படுகிறது.

சிறப்பு தன்மை சோதனை செய்யும் போது வழக்கமாக கையாளப்படும் (எடுத்துக் கொள்ளப்படும்) சிறப்பு காண் மட்டம் 0.05 (அல்லது 5%) மற்றும் 0.01 (அல்லது 1%) ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு எடுகோள் சோதனையின் போது சிறப்பு காண் மட்டம் 0.05 (or 5%) என



எடுத்துக் கொள்வோம் எனில் இது 100 வாய்ப்புகளில் ஏற்று கொள்ள வேண்டியவற்றில் 5 வாய்ப்புக்களை நாம் மறுப்போம் என்பதாகும். நாம் எடுத்துள்ள மதிப்புகளில் 95% சரியானதாக எடுத்துள்ளோம் என்ற நம்பிக்கை உண்டாகிறது. இந்த நிலைகளில் 5% சிறப்பு காண் மட்ட எல்லையில் மறுக்கப்படுகிறது என்பதாகும். அதாவது நமது முடிவில் தவறு ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.05 ஆகும் எனக் கூறலாம்.

5% சிறப்பு காண் மட்ட நிலையில் இரு முனை சோதனை செய்யும் போது இல் எனும் எடுகோளை நாம் ஏற்கும் மற்றும் மறுக்கும் பகுதியினை கீழ்க்காணும் படம் விளக்கக் காண்போம்.




**குறிப்பு:**

மறுக்கப்படும் பகுதி (தீர்வு கட்ட பகுதி)

கூறு வெளியில் இல் எனும் சோதனை Ho ஐ எந்தளவு மறுக்கப்படுகிறதோ அந்த அளவே தீர்வு கட்ட பகுதி அல்லது மறுக்கப்படும் பகுதி எனப்படும்.

**தீர்மான மதிப்பு:**

சோதனை புள்ளியியல் அளவையின் எந்த மதிப்பானது ஏற்றுக் கொள்ளும் பகுதி மற்றும் மறுக்கப்படுவதற்கான பகுதியினைப்

பிரிக்கிறதோ அம்மதிப்பே சிறப்பு காண் மட்டம் அல்லது தீர்மான மதிப்பு என்றழைக்கப்படும்.

இது (i) சிறப்பு காண் மட்டம் பயன்படுத்துவதைப் பொறுத்தும்,

(ii) மாற்று எடுகோளாகிய இரு முனை சோதனை மற்றும் ஒரு முனை சோதனைகளை பொறுத்தும் அமைகிறது.

பெருங்கூறுகளில் t புள்ளியியல் அளவையின் திட்ட இயல்நிலை மாறியானது, $n \rightarrow \infty$ என்ற நீள்போக்கு நிலையில்

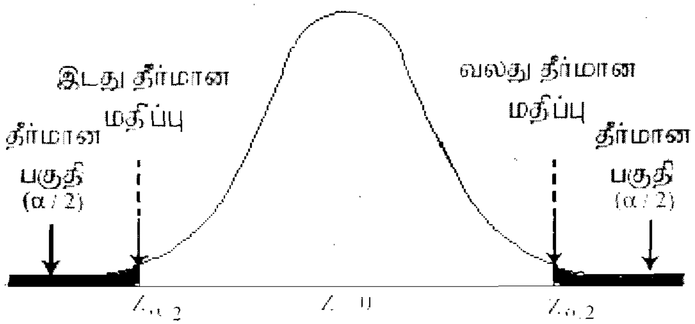
$$Z = \left| \frac{t - E(t)}{S.E.(t)} \right| \sim N(0,1)$$ ஆகும்.

இல் எனும் எடுகோளின் கீழ் Z ன் மதிப்பே சோதனை புள்ளியியல் அளவை எனப்படும். இரு முனை சோதனையில் சிறப்புகாண் மட்டம் $\alpha$ அளவில் திட்ட மதிப்பானது $Z_{\alpha/2}$ எனவும், ஒரு முனைச் சோதனையில் தீர்மான மதிப்பு $Z_\alpha$ எனவும் குறிக்கப்படுகிறது.

இங்கு $Z_\alpha$ ஐ நிர்ணயிக்கும் சமன்பாடு , $P(|Z| > Z_\alpha) = \alpha$. இரு முனைகளிலும் உள்ள மொத்த தீர்வுகட்ட பகுதியானது $\alpha$ என இருக்குமாறு $Z_\alpha$ என்ற மதிப்பு கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது. ஆகவே

$P(Z > Z_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$. ஒவ்வொரு முனையின் பரப்பு $\frac{\alpha}{2}$ ஆகும்.

வலது முனை பரப்பு மற்றும் இடது முனை பரப்பு $\frac{\alpha}{2}$ இருக்குமாறு '$Z_\alpha$' மற்றும் $-Z_\alpha$ ஆகியவை அமையும் என்பதை கீழ்க்காணும் படத்தில் காட்டப்படுகிறது.






## 4.6 ஒரு முனை மற்றும் இரு முனை சோதனைகள்:

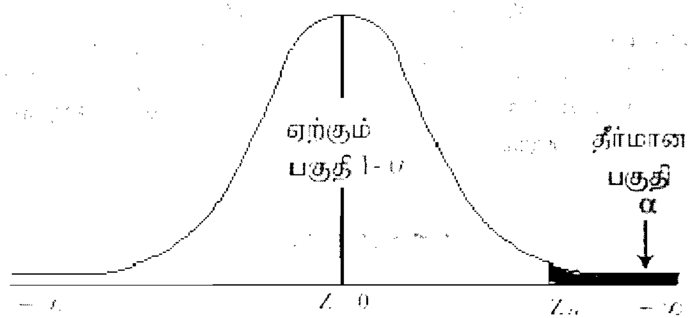
எந்த ஒரு சோதனையானாலும் தீர்மானிக்கும் பகுதியானது புள்ளியியல் அளவைக்குரிய மாதிரி பரவலின் நிகழ்தகவு வளைகோட்டின் கீழ் உள்ள ஒரு பகுதியின் பரப்பைக் குறிப்பிடுவதாகும்.

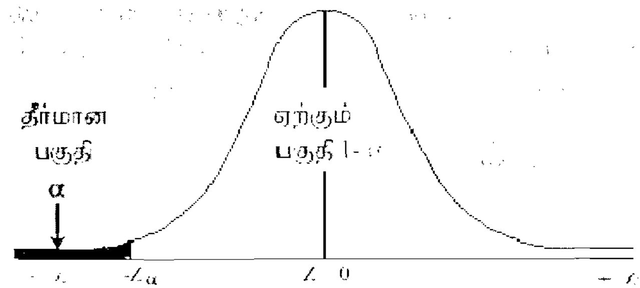
### ஒரு முனை சோதனை :

எத்தகைய புள்ளியியல் எடுகோள் சோதனையானாலும் மாற்று எடுகோளானது ஒரு முனை (இட முனை அல்லது வல முனை)யில் இருந்தால் அது ஒரு முனை சோதனை என்றழைக்கப்படும்.

எடுத்துகாட்டாக, முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி சோதனையில்

$H_0: \mu = \mu_0$, க்கு எதிரான மாற்று எடுகோள் $H_1: \mu > \mu_0$ (வல முனை) அல்லது $H_1: \mu < \mu_0$ (இட முனை) எனும் ஒரு முனை சோதனையாக அமைகிறது. அதாவது சராசரி $\bar{x}$ ன் மாதிரி பரவலின் தீர்வு கட்ட பகுதியானது முழுவதும் வல முனையில் அமைகிறது. இதனை $H_1: \mu > \mu_0$ என குறிக்கப்படும். இது வல முனை சோதனை என்றழைக்கப்படும். இதே போல் தீர்வுகட்டபகுதி முழுவதும் இடமுனையில் அமையுமானால் $H_1 : \mu < \mu_0$ ஐ இட முனை சோதனை என்றழைக்கப்படும்.



## இரு முனை சோதனை:

புள்ளியியல் சோதனையில் இல் எனும் எடுகோள் $H_0 : \mu = \mu_0$ என்பதற்கு எதிரான மாற்று எடுகோள் $H_1: \mu \neq \mu_0$ ($\mu > \mu_0$ மற்றும் $\mu < \mu_0$) என செய்யப்படும் சோதனை இரு முனை சோதனை எனப்படும். இந்நிலையில் தீர்வுகட்ட பகுதியானது புள்ளியியல் சோதனையின் நிகழ்தகவு வளைகோட்டின் இருபுறமும் முனைப்பகுதியில் அமைகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, இரு வகையில் தயாரிக்கப்படும் சலவை இயந்திரங்கள் (Washing machines) எடுத்துக் கொள்வோம். அவைகளில் ஒன்று சாதாரண தரத்துடன் (சராசரி உழைப்பு காலம் $\mu_1$) தயாரிக்கப்படுகிறது. மற்றொன்று சில புதிய தொழில் நுட்ப (சராசரி உழைப்பு காலம் $\mu_2$ ) தரத்துடன் தயாரிக்கப்படுகிறது. இவ்விரு சலவை இயந்திரங்களின் சராசரி உழைப்பு (கெடு) காலத்தின் வேறுபாட்டின் சிறப்புத் தன்மையைச் சோதிக்கவேண்டுமானால்

இல் எனும் எடுகோள்: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ என்றும் மற்றும்

மாற்று எடுகோள்: $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

இது ஓர் இரு முனை சோதனையைக் கொடுக்கிறது. இவ்வாறு இருப்பினும், புதிய தொழில் நுட்பத்துடன் தயாரிக்கப்பட்ட சலவை இயந்திரத்தின் சராசரி உழைப்புகாலம் சாதாரண தரத்துடைய இயந்திரத்தை விட அதிகம் எனக் கொள்வோம் எனில்

இல் எனும் எடுகோள் $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ க்கு எதிரான

மாற்று எடுகோள் $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ என கிடைக்க பெறுவது இட முனை சோதனை ஆகும்.

இதே போன்று புதிய தொழில் நுட்பத்துடன் தயாரிக்கப்பட்ட இயந்திரத்தின் சராசரி உழைப்பு காலம் சாதாரண தரத்துடன் தயாரிக்கப்பட்ட இயந்திரத்தின் சராசரி உழைப்பு காலத்தை விட குறைவு எனக் கொண்டால்

இல் எனும் எடுகோள் $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ க்கு எதிரான

மாற்று எடுகோள் $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ என்பது

வல முனை சோதனையாக அமைகிறது. ஆதலால் இரு முனை சோதனையானாலும் அல்லது ஒரு முனை சோதனை (வல அல்லது இடமுனை) ஆனாலும் இவைகளை அமைப்பது என்பது எடுக்க வேண்டிய தீர்மானங்களை பொறுத்தே அமையும்.



## Z-ன் தீர்மான மதிப்புகள் :

| சிறப்பு காண் மட்டம் $\alpha$ | 0.05 (அ) 5% | | 0.01 (அ) 1% | |
|---|---|---|---|---|
| | இடது | வலது | இடது | வலது |
| ஒரு முனை சோதனைகளில் $Z_\alpha$ ன் தீர்மான மதிப்பு | −1.645 | 1.645 | −2.33 | 2.33 |
| இரு முனை சோதனைகளில் $Z_{\alpha/2}$ன் தீர்வு கட்ட பகுதி | −1.96 | 1.96 | −2.58 | 2.58 |

## 4.7 முதல் வகை (Type I Error) மற்றும் இரண்டாம் வகை (Type II Error) பிழைகள்:

புள்ளியியல் சார்ந்த எடுகோள் சோதனை செய்யும் போது நான்கு வகையான வாய்ப்புகள் அமைவதைக் காண்கிறோம். அவைகள்:

1) எடுகோள் சரியாக (உண்மையாக) இருந்து நமது சோதனை மறுக்கப்படுவது (முதல் வகை பிழை)
2) எடுகோள் தவறாக இருந்து நமது சோதனை ஏற்கப்படுதல் (இரண்டாம் வகை பிழை)
3) எடுகோள் சரியாக இருந்து நமது சோதனை ஏற்றுக்கொள்வது (சரியான முடிவு)
4) எடுகோள் தவறாக இருந்து நமது சோதனை மறுக்கப்படுதல் (சரியான முடிவு)

மேற்கண்ட இந்த நான்கில் முதல் இரண்டும், பிழைகளை ஏற்படுத்தும் வாய்ப்புகளாக அமைகிறது.

புள்ளியியல் சார்ந்த சோதனையின் போது இல் எனும் எடுகோள் சரியாக இருந்து நமது சோதனையானது மறுக்கப்படுவதால் உண்டாகும் `பிழையே முதல்வகை பிழை' எனப்படும். மாறாக இல் எனும் எடுகோள் பிழையாக இருந்து நமது சோதனையானது ஏற்று கொள்ளும் போது உண்டாகும் பிழையே `இரண்டாம் வகை பிழை' எனப்படும்.

இதனை $\alpha$ = P(முதல் வகை பிழை) =P(Ho - ஐ மறுக்கப்படுவது | $H_0$ சரியானது )

$\beta$ = P (இரண்டாம் வகை பிழை) = P ($H_0$ ஐ ஏற்கப்படுவது | $H_0$ தவறானது )

செயல் முறையில் பார்க்கும் போது முதல் வகை பிழையானது குவியல் தரமாக இருந்தும் அதனை மறுக்கப்படுவதாகவும் மற்றும், இரண்டாம் வகைபிழையானது தரமில்லாத குவியலை ஏற்று கொள்ளப்படுவதாகவும் அமைகிறது. இச்சூழல்களை விளக்கும் வகையில் கீழ் உள்ள அட்டவணை அமைந்துள்ளது.

| | $H_0$ ஐ ஏற்றல் | $H_0$ ஐ மறுத்தல் |
|---|---|---|
| $H_0$ சரியானது | சரியான முடிவு | முதல் வகை பிழை |
| $H_0$ பிழையானது | இரண்டாம் வகை பிழை | சரியான முடிவு |

**4.8 சோதனைக்கான வழிமுறைகள்:**

எடுகோள் சோதனை மேற்கொள்ளும் போது பயன்படுத்தும் படிகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. (பெருங்கூறு மற்றும் சிறுகூறு சோதனைகளுக்கு ஏற்புடையது)

1. இல் எனும் எடுகோள்: இல் எனும் எடுகோள் Ho ஐ அமைக்கவும்
2. மாற்று எடுகோள் : Ho க்கு நிரப்பியாக அமையுமாறு மாற்று எடுகோள் $H_1$ ஐ அமைக்கவும். இது ஒரு முனை (இட அல்லது வல சோதனை) அல்லது இரு முனை சோதனையாக அமையும்.
3. சிறப்புகாண் மட்டம்: பொருத்தமான சிறப்புகாண் மட்டம் $\alpha$ ஐ முன்னதாக தீர்மானித்துக் கொள்ளவும்.
4. சோதனை புள்ளியியல் அளவை: இல் எனும் எடுகோள் Ho ன் கீழ் புள்ளியியல் சோதனை அளவையின் மதிப்பு $Z = \frac{t - E(t)}{S.E.(t)}$ ஐ கணக்கிடுக. இங்கு t என்பது புள்ளியியல் அளவையாகும்.
5. முடிவு:
   கண்டறியப்பட்ட $Z_0$ ன் மதிப்பை அட்டவணையிலுள்ள $Z_\alpha$ (ஒரு முனை) அல்லது $Z_{\alpha/2}$ (இரு முனைச் சோதனை) இவற்றுடன் ஒப்பிட்டு அதற்கேற்ப இல் எனும் எடுகோளை ஏற்று கொள்ளுதல் அல்லது மறுத்தல் என முடிவு மேற்கொள்ளப்படுகிறது.
   i) $Z_0 > Z_\alpha$ எனில் இல் எனும் எடுகோள் $\alpha$ மட்ட அளவில் மறுக்கப்படுகிறது.
   ii) $Z_0 < Z_\alpha$ எனில் இல் எனும் எடுகோள் மட்ட அளவில் ஏற்று கொள்ளப்படுகிறது.



**குறிப்பு:**

பெருங்கூறு (பெரிய மாதிரி) : ஓர் மாதிரியானது 30 ம், அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளையும் கொண்டிருக்குமானால் அது பெருங்கூறு என்று அழைக்கப்படும்.

சிறுகூறு: (சிறிய மாதிரி) : ஓர் மாதிரியானது 30 க்கு கீழ் உறுப்புக்களைக் கொண்டிருந்தால் அதனை சிறுகூறு என்று அழைக்கப்படும்.

## பயிற்சி - 4

### I. மிகச்சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும் :

1. மாதிரி அளவையின் பண்புகளாகிய $\bar{x}$ அல்லது S ஐ இவ்வாறு அழைக்கப்படும்.
   (அ) முழுமைத்தொகுதி  ஆ) புள்ளியியல் அளவை
   (இ) பேரண்டம்  ஈ) சராசரி
2. சராசரியின் திட்டப்பிழை
   (அ) $\sigma^2$  (ஆ) $\frac{\sigma}{n}$  (இ) $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  (ஈ) $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$
3. கண்டறியப்பட்ட மாதிரியின் விகிதம் "P" ன் திட்டப்பிழை
   (அ) $\sqrt{\frac{P(1-Q)}{n}}$  (ஆ) $\sqrt{\frac{PQ}{n}}$
   (இ) $\sqrt{\frac{(1-P)Q}{n}}$  (ஈ) $\frac{PQ}{n}$
4. மாற்று எடுகோள் என்பது
   (அ) எப்போதும் இட முனை  (ஆ) எப்போதும் வல முனை
   (இ) எப்போதும் ஓர்முனை  (ஈ) ஒரு முனை அல்லது இரு முனை

5. தீர்வு கட்ட பகுதி என்பது
   (அ) மறுக்கும் பகுதி (ஆ) ஏற்கும் பகுதி
   (இ) நிகழ்தகவு (ஈ) சோதனைப் புள்ளியியல் மதிப்பு
6. சிறப்புகாண் மட்டம் $\alpha$ வில் இரு முனை சோதனையின் தீர்வு கட்ட மதிப்பு
   (அ) $Z_{\alpha/2}$ (ஆ) $Z_{\alpha}$ (இ) $Z_{2\alpha}$ (ஈ) $Z_{\alpha/4}$
7. வல முனை சோதனையில் தீர்வு கட்ட பகுதி
   (அ) 0 (ஆ) 1
   (இ) முழுவதும் வல முனையில் அமையும்
   (ஈ) முழுவதும் இட முனையில் அமையும்
8. 5% சிறப்பு காண் மட்ட அளவில் இருமுனை சோதனைக்கான தீர்வு கட்ட மதிப்பு $|Z_{\alpha}|$ ஆனது
   அ) 1.645 ஆ) 2.33 இ) 2.58 ஈ) 1.96
9. இல் எனும் எடுகோளின் கீழ் சோதனை புள்ளியியல் அளவை Z ன் மதிப்பு
   அ) $\dfrac{t - S.E.(t)}{E(t)}$ ஆ) $\dfrac{t + E(t)}{S.E.(t)}$ இ) $\dfrac{t - E(t)}{S.E.(t)}$ ஈ) $\sqrt{\dfrac{PQ}{n}}$
10. மாற்று எடுகோள் $H_1: \mu \neq \mu_0$ ($\mu > \mu_0$ or $\mu < \mu_0$) ஏற்கும் தீர்வுகட்ட பகுதி
    (அ) வல முனை மட்டும்
    (ஆ) வலது மற்றும் இட முனை பகுதிகள்
    (இ) இட முனை மட்டும்
    (ஈ) ஏற்றுக் கொள்ளும் பகுதி
11. எடுகோள் என்பதை இவ்வாறு வகைப்படுத்தலாம்
    (அ) எளியதாக (ஆ) கலவையாக
    (இ) இல் எனுமாறு (ஈ) மேற்குறித்த அனைத்தும்
12. சோதனையானது ஒரு முனை அல்லது இரு முனை என்பது இதனை பொறுத்ததாகும்
    (அ) மாற்று எடுகோள் (ஆ) கலப்பு எடுகோள்
    (இ) இல் எனும் எடுகோள் (ஈ) எளிய எடுகோள்
13. இல் எனும் எடுகோள் $H_0$ ஐ பற்றி தவறான முடிவு எடுத்தல் என்பது
    (அ) முதல் வகை பிழை (ஆ) இரண்டாம் வகை பிழை
    (இ) மூன்றாம் வகை பிழை (ஈ) நான்காம் வகை பிழை
14. தீர்வு கட்ட பகுதியின் பரப்பானது இதனைச் சார்ந்துள்ளது
    (அ) முதல் வகை பிழையின் அளவு
    (ஆ) இரண்டாம் வகை பிழையின் அளவு



    (இ) புள்ளியியல் அளவையின் மதிப்பு
    (ஈ) கண்டறிந்த எண்ணிக்கை
15. $H_0 : \mu = 70$ எனும் எடுகோளுக்கு எதிரான $H_1 = \mu > 70$ என்ற எடுகோள்
    (அ) ஒரு முனை - இட முனை சோதனை
    (ஆ) ஒரு முனை - வல முனை சோதனை
    (இ) இரு முனை சோதனை
    (ஈ) ஏதும் இல்லை
16. $H_0 : \mu = 1500$ என்ற எடுகோளுக்கு மாறாக $\mu < 1500$ என்ற சோதனை
    (அ) ஒரு முனை - இட முனை சோதனை
    (ஆ) ஒரு முனை - வல முனை சோதனை
    (இ) இரு முனை சோதனை
    (ஈ) மேற் குறித்த அனைத்தும்
17. $H_0 : \mu = 100$ க்கு மாறாக $H_1 : \mu \neq 100$ என்ற சோதனை
    (அ) ஒரு முனை - வல முனை சோதனை
    (ஆ) ஒரு முனை - இட முனை சோதனை
    (இ) இரு முனை சோதனை
    (ஈ) ஏதும் இல்லை
18. $n_1$ மற்றும் $n_2$ என்பன ஒன்றைஒன்று சாரா (சமவாய்ப்பு மாறி) மாதிரிகளின் __________ ஆகும்.
19. கண்டறியப்பட்ட மாதிரி விகிதசமம் p ன் திட்டபிழை __________ ஆகும்.
20. எடுகோள் உண்மையாக இருந்து சோதனை மறுக்கப்படும் போது அது __________ ஆகும்.
21. எடுகோள் பிழையாக இருந்து சோதனை ஏற்கப்படும் போது அது __________ என்றழைக்கபடும்.
22. புள்ளியியலில் அளவை Z ன் மதிப்பு காணும் வாய்ப்பாடு __________ ஆகும்.
23. மாதிரிப் பரவலை வரையறை செய்க
24. புள்ளியியல் அளவை மற்றும் தொகுதிப் பண்பளவை வரையறு.
25. திட்டப் பிழை வரையறுக்க.
26. இரு மாதிரி விகித சமங்களின் வித்தியாசத்திற்கான திட்டப்பிழையைத் தருக.
27. இல் எனும் எடுகோள் மற்றும் மாற்று எடுகோள் வரையறு.

28. தரவு கட்ட மதிப்பு விவரி.

29. சிறப்புகாண் மட்டம் பற்றி நீவிர் அறிவது யாது?

30. 'முதல் வகைப்பிழை மற்றும் இரண்டாம் வகை பிழை இவற்றை தெளிவாக விவரி.

31. எடுகோள் சோதனையின் போது பொதுவாக பின்பற்றப்படும் வழிமுறைகள் யாவை?

32. "எடுகோள் சோதனை" பற்றி நீவிர் அறிவது யாது?

33. ஒரு முனை மற்றும் இரு முனை சோதனைகளைப் பற்றி விரிவான விடைத் தருக.

**விடைகள்**

**I.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. ஆ | 2. இ | 3. ஆ | 4. ஈ |
| 5. அ | 6. அ | 7. இ | 8. ஈ |
| 9. இ | 10. ஆ | 11. ஈ | 12. அ |
| 13. ஆ | 14. அ | 15. ஆ | 16. அ |
| 17. இ | | | |

**II.**

18. அளவு (அல்லது எண்ணிக்கை)

19. $\sqrt{\frac{PQ}{n}}$

20. முதல்வகை பிழை

21. இரண்டாம் வகை பிழை

22. $Z = \frac{t - E(t)}{S.E.(t)}$

# 5. சிறப்பு காண் சோதனை (பெருங்கூறுகள்)

**5.0 அறிமுகம் :**

செய்முறை கணக்குகளில் புள்ளியியலாளர்கள் மாதிரிகள் தரும் விவரங்களைக் கொண்டு ஒரு தற்காலிகமான கணக்கிடுதலைச் செய்ய வேண்டியிருக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டாக,

(அ) பள்ளி மாணவர்களின் சராசரி எடை 35 கிலோ

(ஆ) நாணயம் ஒரு தலைசார்பற்றது.

எனவே அவற்றைத் தீர்மானிப்பதற்கு முழுமைத்தொகுதியின் பண்பளவையைப் பற்றி சில அனுமானங்களை மேற்கொள்ள வேண்டியுள்ளது. அவ்வாறு ஏற்படும் அனுமானமே புள்ளியியல் எடுகோள் ஆகும். மாதிரியை ஆராய்வதன் மூலம் இதன் நம்பகத்தன்மை சோதிக்கப்படுகிறது. இந்தப் புள்ளியியல் எடுகோள்கள் சரியானவையா, தவறானவையா எனச் சோதிக்கப் பயன்படும் முறையே சிறப்பு காண் சோதனை (Test of significance) எனப்படும்.

நாம் ஒரு மதிப்பை முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டு சராசரி என எடுத்துக் கொள்வோம். நமது அனுமானம் சரியானதா என சோதனை செய்ய மாதிரி விவரம் சேகரித்து அதற்கான கூட்டு சராசரியின் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு மற்றும் உண்மையான மதிப்புகளுக்கான வித்தியாசத்தை கண்டறிய வேண்டும். அந்த வித்தியாசம் சிறப்பானதா இல்லையா என நாம் முடிவெடுக்க வேண்டும்.

வித்தியாசம் சிறியதானால் கூட்டுசராசரிக்கான எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழும் தன்மை அதிகமாகும் மேலும் வித்தியாசம் அதிகமானால் கூட்டுசராசரிக்கான எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழும் தன்மை குறையும்.

**5.1 பெருங்கூறுகள் ($n \geq 30$):**

பெருங்கூறுகளுக்கான அனுமானம் சிறு கூறுகளுக்கான அனுமானத்தைவிட வித்தியாசமானது. எனவே, அவற்றுக்கான சிறப்பு காண் சோதனை முறைகளும் மாறுபடுகின்றன. பெருங்கூறுகளின் கணக்குகளுக்கு கீழ்க்காணும் அனுமானங்கள் ஏற்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

(i) அநேகமாக அனைத்து மாதிரிப் பரவல்களும் தொடர்ந்து இணையாது இயல்நிலைப் பரவலை அணுகிச் செல்கின்றன.

(ii) அனைத்து மாதிரி மதிப்புகளும் தோராயமாக முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்புகளுக்கு அருகில் உள்ளது.



கீழ்க்காணும் சோதனைகள், பெருங்கூறு சோதனை முறையில் சோதனை செய்யப்படுகிறது. அவையாவன,

(i) விகிதசமங்களுக்கான சிறப்பு காண் சோதனை

(ii) இரு மாதிரிகளின் விகிதசம வித்தியாசத்திற்கான சிறப்பு காண் சோதனை

(iii) கூட்டு சராசரிக்கான சிறப்பு காண் சோதனை

(iv) இரு மாதிரிகளின் கூட்டு சராசரிகளின் வித்தியாசத்திற்கான சிறப்பு காண் சோதனை

**5.2 விகிதசமங்களுக்கான சிறப்பு காண் சோதனை:**

**சோதனை வழிமுறைகள்:**

**இல் எனும் எடுகோள்** : $H_0 : P = P_0$

**மாற்று எடுகோள்:** $H_1 : P \neq P_0$ ($P > P_0$ அல்லது $P < P_0$)

**சிறப்பு காண் மட்டம்:** $\alpha = 0.05$ அல்லது $0.01$

**புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல்**

$H_0$-ன் கீழ், சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left| \frac{p - P}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}} \right|$$

**எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:**

$$Z_e = \left| \frac{p - P}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}} \right| \sim N(0, 1)$$

$= 1.96$, $\alpha = 0.05$ -க்கு (1.645) (ஒரு முனை)

$= 2.58$ $\alpha = 0.01$ -க்கு (2.33) (ஒரு முனை)

**முடிவு:**

(i) $Z_0 \leq Z_e$ எனில், $H_0$ ஏற்றுகொள்ளப்படுகிறது. எனவே மாதிரியானது $P_0$ எனும் விகிதத்தை உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டது என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

(ii) $Z_0 > Z_e$ எனில், $H_0$ மறுக்கப்படுகிறது. எனவே மாதிரியானது $P_0$ எனும் விகிதத்தை உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படவில்லை என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 1:**

ஒரு மிகப் பெரிய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 400 பேரை சமவாய்ப்பு மாதிரி முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதில் 120 பேர் பெண்கள். எனவே முழுமைத் தொகுதியில் ஆண்களும் பெண்களும் 5:3 என்ற விகிதத்தில் உள்ளனர் எனச் சொல்லலாமா? (சிறப்பு காண் மட்டம் 1%)

**தீர்வு:**

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$$n = 400$$

x = மாதிரியில் உள்ள மொத்த பெண்கள் $= 120$

p = மாதிரியில் உள்ள பெண்களின் விகிதம் $= \dfrac{120}{400} = 0.30$

**இல் எனும் எடுகோள்:**

முழுமைத்தொகுதியில் ஆண்களும் பெண்களும் உள்ள விகிதம் 5:3 அதாவது, $H_0$: P = முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள பெண்களின் விகிதம் $= \dfrac{3}{8} = 0.375$

**மாற்று எடுகோள்:**

$H_1 : P \neq 0.375$ (இரு முனை)

**சிறப்பு காண் மட்டம்:**

$\alpha = 1\,\%$ அல்லது $0.01$

**புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல்:**

$H_0$ -ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left| \frac{p - P}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}} \right|$$



$$= \left| \frac{0.300 - 0.375}{\sqrt{\frac{0.375 \times 0.625}{400}}} \right|$$

$$= \frac{0.075}{\sqrt{0.000586}} = \frac{0.075}{0.024} = 3.125$$

**எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:**

$$Z_e = \left| \frac{p - P}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}} \right| \sim N(0,1) = 2.58$$

**முடிவு:**

இங்கு $Z_0 > Z_e$, என்பதால், 1% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் $H_0$ மறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே முழுமைத் தொகுதியில் ஆண்களும் பெண்களும் 5:3 என்ற விகிதத்தில் இல்லை என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 2:**

ஒரு தொழிற்சாலையில் தயாரிக்கப்படும் பாகங்களில் 400 பாகங்களை மாதிரியாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. அதில் 30 பாகங்கள் பழுதடைந்துள்ளது. ஆனால் அந்த நிறுவனம் அவர்கள் தயாரிப்பில் 5% மட்டுமே பழுதடைந்துள்ள பாகங்கள் உள்ளன என அறிவிக்கிறது. அந்த அறிவிப்பு ஏற்கக் கூடியதா?

**தீர்வு:**

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$$n = 400$$

x = மாதிரியில் உள்ள குறையுள்ள பாகங்கள்

p = மாதிரியில் உள்ள குறையுள்ள பாகங்களின் விகிதம் $= \dfrac{x}{n} = \dfrac{30}{400}$

$= 0.075$

**இல் எனும் எடுகோள்:**

$H_0$: $P = 0.05$ நிறுவனத்தின் அறிவிப்பு ஏற்கக் கூடியது.

**மாற்று எடுகோள்:**

$$H_1 : P > 0.05 \text{ (வல முனை)}$$

**சிறப்பு காண் மட்டம்:**

$\alpha = 5\ \%$ என்க

**புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல்:**

$H_0$-ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left| \frac{p - P}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}} \right|$$

$$= \left| \frac{0.075 - 0.050}{\sqrt{\frac{0.05 \times 0.95}{400}}} \right|$$

$$= \frac{0.025}{\sqrt{0.0001187}} = 2.27$$

**எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:**

$$Z_e = \left| \frac{p - P}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}} \right| \sim N(0, 1) = 1.645$$

**முடிவு:**

இங்கு $Z_0 > Z_e$ என்பதால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே நிறுவனத்தின் அறிவிப்பை ஏற்க இயலாது என முடிவு மேற்கொள்ளப்படுகிறது.

**5.3 இரு மாதிரிகளின் விகிதசம வித்தியாசத்திற்கான சிறப்பு காணு சோதனை:**

**சோதனை வழிமுறைகள்:**

**இல் எனும் எடுகோள் :**

$$H_0 : P_1 = P_2 = P \text{ (என்க)}$$



**மாற்று எடுகோள்:**

$$H_1 : P_1 \neq P_2 \ \ (P_1 > P_2 \text{ அல்லது } P_1 < P_2)$$

**சிறப்பு காண் மட்டம்:**

$\alpha = 0.05$ அல்லது 0.01

**புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல்:**

$H_0$ -ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{P_1 Q_1}{n_1} + \frac{P_2 Q_2}{n_2}}} \right| \quad (P_1, P_2 \text{ தெரிந்த நிலையில்})$$

$$= \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right| \quad (P_1, P_2 \text{ தெரியாத நிலையில் })$$

இங்கு $\hat{P} = \dfrac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$ $\qquad \hat{Q} = 1 - \hat{P}$

**எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:**

$$Z_e = \left| \frac{p_1 - p_2}{S.E(p_1 - p_2)} \right| \sim N(0,1)$$

**முடிவு:**

$Z_0 \leq Z_e$ எனில், $H_0$ ஏற்கப்படுகிறது. விகித சம வித்தியாசத்திற்கான மாதிரித் தேர்வில் ஏற்றத்தாழ்வுகளைப் பொறுத்ததாகும்.

$Z_0 > Z_e$ எனில், $H_0$ மறுக்கப்படுகிறது. எனவே விகித சம வேற்றுமைகள் மாதிரித் தேர்வில் ஏற்றத்தாழ்வுகளைப் பொறுத்ததாகாது.

**எடுத்துக்காட்டு 3:**

ஒரு பல்கலைக்கழக மாணவர்களிடையே வாக்கெடுப்பு நடத்தியதில் 850 மாணவர்களும் 550 மாணவிகளும் வாக்களித்தனர். மாணவர்களில் 530 பேரும் மாணவியரில் 310 பேரும் 'ஆம்' என வாக்களித்தனர். மாணவர்களுக்கும் மாணவியருக்கும் இடையேயான கருத்து வேறுபாடு சிறப்பு வாய்ந்ததா எனக் குறிப்பிடுக.

**தீர்வு:**

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$n_1 = 850 \qquad n_2 = 550 \qquad x_1 = 530 \qquad x_2 = 310$

$$p_1 = \frac{530}{850} = 0.62 \qquad p_2 = \frac{310}{550} = 0.56$$

$$\hat{P} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{530 + 310}{1400} = 0.60$$

$$\hat{Q} = 0.40$$

**இல் எனும் எடுகோள் :**

$H_0$: $P_1 = P_2$ அதாவது கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் மாணவருக்கும் மாணவியருக்கும் இடையேயான கருத்துவேறுபாடு சிறப்பு வாய்ந்ததில்லை எனக் கொள்ளப்படுகிறது.

**மாற்று எடுகோள்:**

$H_1 : P_1 \neq P_2$ (இரு முனை)

**சிறப்பு காண் மட்டம்:**

$\alpha = 0.05$ என்க

**புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல்:**

$H_0$-ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right|$$



$$= \left| \frac{0.62 - 0.56}{\sqrt{0.6 \times 0.4\left(\frac{1}{850} + \frac{1}{550}\right)}} \right|$$

$$= \frac{0.06}{0.027} = 2.22$$

**எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:**

$$Z_e = \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right| \sim N(0,1) = 1.96$$

**முடிவு:**

இங்கு $Z_0 > Z_e$ என்பதால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து மாணவருக்கும் மாணவியருக்கும் இடையேயான கருத்து வேறுபாடு சிறப்பு வாய்ந்தவை எனக் கொள்ளப்படுகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 4:**

ஒரு குறிப்பிட்ட நகரத்தில் 500 ஆண்களில் 125 பேர் சுயதொழில் செய்பவர்கள் மற்றொரு நகரத்தில் 1000 ஆண்களில் 375 பேர் சுயதொழில் செய்பவர்கள். இது முதல் நகரத்தை விட இரண்டாவது நகரத்தில் சுயதொழில் செய்பவர் அதிகம் உள்ளனர் என்பதைக் காட்டுகிறதா?

**தீர்வு:**

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$n_1 = 500 \qquad n_2 = 1000 \qquad x_1 = 125 \qquad x_2 = 375$

$$p_1 = \frac{125}{500} = 0.25$$

$$p_2 = \frac{375}{1000} = 0.375$$

$$\hat{P} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{125 + 375}{500 + 1000} = \frac{500}{1500} = \frac{1}{3}$$

$$\hat{Q} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

**இல் எனும் எடுகோள்:**

$H_0$: $P_1 = P_2$ இரு முழுமைத் தொகுதி விகிதசமங்களுக்கிடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததில்லை.

**மாற்று எடுகோள் :**

$H_1 : P_1 < P_2$ (வல முனை)

**சிறப்பு காண் மட்டம்:**

$\alpha = 0.05$ என்க

**புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல்:**

$H_0$-ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right|$$

$$= \left| \frac{0.25 - 0.375}{\sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\left(\frac{1}{500} + \frac{1}{1000}\right)}} \right|$$

$$= \frac{0.125}{0.026} = 4.8$$

**எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:**

$$Z_e = \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right| \sim N(0,1) = 1.645$$



**முடிவு::**

இங்கு $Z_0 > Z_e$ என்பதால், 5 % சிறப்பு காண் மட்டத்தின் கீழ் இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே இரு முழுமைத் தொகுதி விகிதசமங்களுக்கிடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்தது.

**எடுத்துக்காட்டு 5:**

200 பேருக்கு சிவில் சர்வீஸ் தேர்வு நடந்தது. அவர்களின் மொத்த மதிப்பெண்களைக் கணக்கில் கொண்டு அவர்களை முதல் 30% நபர்கள் மற்றும் பின்னால் உள்ள 70% நபர்கள் என்றும் பிரிக்கப்படுகின்றனர். ஒரு குறிப்பிட்ட வினாவிற்கு முதல் பகுதியில் 40 பேரும் மற்றும் கீழ்ப்பகுதியில் 80 பேரும் சரியாக விடையளித்தனர். இதனை அடிப்படையாகக் கொண்டு இரு பிரிவுகளின் திறமையை சோதிக்க இவ்வினா பயன்படுமா?

**தீர்வு:**

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$n_1 = \frac{30 \times 200}{100} = 60$ $\quad$ $n_2 = \frac{70 \times 200}{100} = 140$

$x_1 = 40$ $\quad$ $x_2 = 80$

$p_1 = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ $\quad$ $p_2 = \frac{80}{140} = \frac{4}{7}$

$$\hat{P} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{40 + 80}{60 + 140} = \frac{120}{200} = \frac{6}{10}$$

$$\hat{Q} = 1 - \hat{P} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{4}{10}$$

**இல் எனும் எடுகோள் :**

$H_0$: $P_1 = P_2$ இரண்டு நிலைகளில் உள்ள நபர்களின் திறமையின் வித்தியாசம் அறிய குறிப்பிட்ட வினா பயன்படவில்லை.

**மாற்று எடுகோள்:** $H_1 : P_1 \neq P_2$ (இரு முனை)

**சிறப்பு காண் மட்டம்:**

$\alpha = 0.05$ என்க

**புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல்:**

$H_0$ -ன் கீழ் சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது