$$Z_0 = \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right|$$

$$= \left| \frac{\frac{2}{3} - \frac{4}{7}}{\sqrt{\frac{6}{10} \times \frac{4}{10}\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{140}\right)}} \right|$$

$$= \frac{10}{\sqrt{21}\sqrt{3}} = 1.3$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$$Z_e = \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right| \sim N(0,1)$$

$$= 1.96$$

முடிவு::

இங்கு $Z_0 < Z_e$ என்பதால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தின் கீழ் இல் எனும் எடுகோள் ஏற்கப்படுகிறது. ஆகவே இரண்டு நிலைகளில் உள்ள நபர்களின் திறமையின் வித்தியாசம் அறிய அந்த குறிப்பிட்ட வினா பயன்படவில்லை.

5.4 கூட்டு சராசரிக்கான சிறப்பு காண்சோதனை:

σ^2 மாறுபாட்டளவை என உள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n மாதிரி எடுக்கப்பட்டது. அவை x_i ($i = 1,2\ldots..n$). அதன் மாதிரியின் கூட்டு சராசரி $\bar{x}$ ஆனது கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots..x_n)$$

$$E(\bar{x}) = \mu$$

$$V(\bar{x}) = V\left[\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots..x_n)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}[(V(x_1) + V(x_2) + \ldots..V(x_n)]$$

$$= \frac{1}{n^2}\, n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\therefore S.E(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

சோதனை வழி முறைகள்:

இல் எனும் எடுகோள் மற்றும் மாற்று எடுகோள்:

H_0: $\mu = \mu_0$.

H_1: $\mu \neq \mu_0$ ($\mu > \mu_0$ அல்லது $\mu < \mu_0$)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ அல்லது 0.01

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல்:

H_0 -ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left| \frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{S.E(\bar{x})} \right| = \left| \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right|$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$$Z_e = \left| \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \sim N(0,1)$$

$$= 1.96, \quad (\alpha = 0.05) \text{ அல்லது } = 2.58, \quad (\alpha = 0.01)$$

முடிவு:

$Z_0 \leq Z_e$ எனில், இல் எனும் எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. ஆகவே மாதிரியானது கூட்டு சராசரி $\mu = \mu_0$ எனக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாகும் என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

$Z_0 > Z_e$ எனில், இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே மாதிரியானது கூட்டு சராசரி $\mu = \mu_0$ எனக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படவில்லை என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

$$\hat{P} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{125 + 375}{500 + 1000} = \frac{500}{1500} = \frac{1}{3}$$

$$\hat{Q} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

இல் எனும் எடுகோள்:

H_0: $P_1 = P_2$ இரு முழுமைத் தொகுதி விகிதசமங் களுக்கிடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததில்லை.

மாற்று எடுகோள் :

$H_1 : P_1 < P_2$ (வல முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல்:

H_0-ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right|$$

$$= \left| \frac{0.25 - 0.375}{\sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\left(\frac{1}{500} + \frac{1}{1000}\right)}} \right|$$

$$= \frac{0.125}{0.026} = 4.8$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$$Z_e = \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right| \sim N(0,1) = 1.645$$

முடிவு::

இங்கு $Z_0 > Z_e$ என்பதால், 5 % சிறப்பு காண் மட்டத்தின் கீழ் இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே இரு முழுமைத் தொகுதி விகிதசமங்களுக்கிடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்தது.

எடுத்துக்காட்டு 5:

200 பேருக்கு சிவில் சர்வீஸ் தேர்வு நடந்தது. அவர்களின் மொத்த மதிப்பெண்களைக் கணக்கில் கொண்டு அவர்களை முதல் 30% நபர்கள் மற்றும் பின்னால் உள்ள 70% நபர்கள் என்றும் பிரிக்கப்படுகின்றனர். ஒரு குறிப்பிட்ட வினாவிற்கு முதல் பகுதியில் 40 பேரும் மற்றும் கீழ்ப்பகுதியில் 80 பேரும் சரியாக விடையளித்தனர். இதனை அடிப்படையாகக் கொண்டு இரு பிரிவுகளின் திறமையை சோதிக்க இவ்வினா பயன்படுமா?

தீர்வு:

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$n_1 = \frac{30 \times 200}{100} = 60$ $\qquad$ $n_2 = \frac{70 \times 200}{100} = 140$

$x_1 = 40$ $\qquad$ $x_2 = 80$

$p_1 = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $p_2 = \frac{80}{140} = \frac{4}{7}$

$$\hat{P} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{40 + 80}{60 + 140} = \frac{120}{200} = \frac{6}{10}$$

$$\hat{Q} = 1 - \hat{P} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{4}{10}$$

இல் எனும் எடுகோள் :

H_0: $P_1 = P_2$ இரண்டு நிலைகளில் உள்ள நபர்களின் திறமையின் வித்தியாசம் அறிய குறிப்பிட்ட வினா பயன்படவில்லை.

மாற்று எடுகோள்: $H_1 : P_1 \neq P_2$ (இரு முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல்:

H_0 -ன் கீழ் சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right|$$

$$= \left| \frac{\frac{2}{3} - \frac{4}{7}}{\sqrt{\frac{6}{10} \times \frac{4}{10}\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{140}\right)}} \right|$$

$$= \frac{10}{\sqrt{21}\sqrt{3}} = 1.3$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$$Z_e = \left| \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right| \sim N(0,1)$$

$$= 1.96$$

முடிவு::

இங்கு $Z_0 < Z_e$ என்பதால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தின் கீழ் இல் எனும் எடுகோள் ஏற்கப்படுகிறது. ஆகவே இரண்டு நிலைகளில் உள்ள நபர்களின் திறமையின் வித்தியாசம் அறிய அந்த குறிப்பிட்ட வினா பயன்படவில்லை.

5.4 கூட்டு சராசரிக்கான சிறப்பு காண்சோதனை:

σ^2 மாறுபாட்டளவை என உள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n மாதிரி எடுக்கப்பட்டது. அவை x_i $(i = 1,2.....n)$. அதன் மாதிரியின் கூட்டு சராசரி $\overline{x}$ ஆனது கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ...x_n)$$

$$E(\overline{x}) = \mu$$

$$V(\overline{x}) = V\left[\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ...x_n)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}[(V(x_1) + V(x_2) + ...V(x_n)]$$

$$= \frac{1}{n^2}\, n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\therefore S.E(\overline{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

சோதனை வழி முறைகள்:

இல் எனும் எடுகோள் மற்றும் மாற்று எடுகோள்:

H_0: $\mu = \mu_0$.

H_1: $\mu \neq \mu_0$ ($\mu > \mu_0$ அல்லது $\mu < \mu_0$)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ அல்லது 0.01

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல்:

H_0 -ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left| \frac{\overline{x} - E(\overline{x})}{S.E(\overline{x})} \right| = \left| \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right|$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$$Z_e = \left| \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \sim N(0,1)$$

$= 1.96$, $(\alpha = 0.05)$ அல்லது $= 2.58$, $(\alpha = 0.01)$

முடிவு:

$Z_0 \leq Z_e$ எனில், இல் எனும் எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. ஆகவே மாதிரியானது கூட்டு சராசரி $\mu = \mu_0$ எனக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாகும் என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

$Z_0 > Z_e$ எனில், இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே மாதிரியானது கூட்டு சராசரி $\mu = \mu_0$ எனக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படவில்லை என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6:

ஒரு கம்பெனி உற்பத்தி செய்த 100 ஒளிரும் ஒளி விளக்குகளின் சராசரி ஆயுட்காலம் 1570 மணி நேரம் மற்றும் அதன் திட்ட விலக்கம் 120 மணி நேரம் ஆகும். அந்த கம்பெனி தயாரித்த அனைத்து விளக்குகளின் சராசரி ஆயுட்காலம் μ எனில் எடுகோள் $\mu = 1600$ மணி நேரம் என்பதை அதற்கு எதிரான மாற்று எடுகோள் $\mu \neq 1600$ மணி நேரத்துக்கு, 5 % சிறப்பு காண் மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

தீர்வு :

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$\bar{x} = 1570$ மணி நேரம் $\mu = 1600$ மணி நேரம்

$s = 120$ மணி நேரம் $n = 100$

இல் எனும் எடுகோள் :

H_0: $\mu = 1600$ மாதிரியின் சராசரிக்கும் முழுமைத்தொகுதியின் சராசரிக்கும் சிறப்பான வித்தியாசம் இல்லை.

மாற்று எடுகோள்:

H_1: $\mu \neq 1600$ (இரு முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல்:

H_0-ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left|\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right|$$

$$= \left|\frac{1570-1600}{\frac{120}{\sqrt{100}}}\right| = \frac{30\times 10}{120} = 2.5$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$$Z_0 = \left|\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right| \sim N(0,1)$$

$$= 1.96$$

முடிவு:

இங்கு $Z_0 < Z_e$ என்பதால், இல் எனும் எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. ஆகவே மாதிரியானது கூட்டு சராசரி $\mu = 1600$ உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாகும் என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 7:

தற்போது உபயோகத்தில் இருக்கும் காரை விட தாங்கள் புதியதாக அறிமுகம் செய்த காரின் பெட்ரோல் உபயோகம் குறைவு என ஒரு கார் உற்பத்தி செய்யும் நிறுவனம் அறிவிப்பு செய்தது. 50 புதிய கார்கள் மாதிரியாக எடுத்து அதன் பெட்ரோல் உபயோகம் குறித்து சோதனை செய்யப்பட்ட போது அது சராசரியாக ஒரு லிட்டருக்கு 30 கி.மீ மற்றும் 1 லிட்டருக்கு அதன் திட்டவிலக்கம் 3.5 கி.மீ என அறியப்பட்டது. புதிய காரின் சராசரி பெட்ரோல் உபயோகம் லிட்டருக்கு 28 கிமீ என்ற நிறுவனத்தின் அறிவிப்பை ஏற்றுக் கொள்ளலாமா என 5 % சிறப்பு காண் மட்டத்தின் கீழ் சோதனை செய்.

தீர்வு:

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை:

$\bar{x} = 30$; $\mu = 28$; $n = 50$; $s = 3.5$

இல் எனும் எடுகோள் :

H_0: $\mu = 28$ அதாவது புதிய காரின் பெட்ரோல் உபயோகம் சராசரியாக லிட்டருக்கு 28 கி.மீ என்ற நிறுவனத்தின் அறிவிப்பு ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டது.

மாற்று எடுகோள்: H_1: $\mu < 28$ (இடது முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல்:

H_0-ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left|\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right|$$

$$= \left|\frac{30-28}{\frac{3.5}{\sqrt{50}}}\right|$$

$$= \frac{2\times\sqrt{50}}{3.5} = 4.04$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$$Z_e = \left|\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right| \sim N(0,1) = 1.645$$

முடிவு:

இங்கு $Z_0 > Z_e$ என்பதால், 5 % சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. எனவே நிறுவனத்தின் அறிவிப்பை ஏற்றுக் கொள்ள முடியாது.

5.5 இரு மாதிரிகளின் கூட்டுசராசரிகளின் வித்தியாசத்திற்கான சிறப்புகாண் சோதனை:

சோதனை வழி முறை:

இல் எனும் எடுகோள் :

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

மாற்று எடுகோள்:

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \ (\mu_1 > \mu_2 \text{ அல்லது } \mu_1 < \mu_2)$$

சிறப்பு காண் மட்டம்:

α % என்க

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல்:

H_0-ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left|\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right|$$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ அதாவது மாதிரிகள் இரண்டும் பொதுவான திட்ட விலக்கம் σ உடைய ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டால் $H_0: \mu_1 = \mu_2$ -ன் கீழ்

$$Z_0 = \left|\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right|$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$$Z_e = \left|\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{S.E(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}\right| \sim N(0,1)$$

முடிவு:

$Z_0 \leq Z_e$, H_0 ஏற்கப்படுகிறது.

$Z_0 > Z_e$, H_0 மறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8:

இரண்டு வகையான கேபிள்களின் உடையும் தன்மையை சோதனை செய்ய $n_1 = n_2 = 100$ என்ற அளவில் இரண்டு வகையிலும் ஒவ்வொரு மாதிரி எடுக்கப்படுகிறது.

கேபிள் I	கேபிள் II
$\bar{x}_1 = 1925$	$\bar{x}_2 = 1905$
$\sigma_1 = 40$	$\sigma_2 = 30$

இரண்டு கேபிள்களின் உடையும் தன்மையின் வித்தியாசத்தைக் காண கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் போதுமான சான்று தருகிறதா? 1 % சிறப்பு காண் மட்டத்தைப் பயன்படுத்துக.

தீர்வு:

$\bar{x}_1 = 1925$ $\bar{x}_2 = 1905$ $\sigma_1 = 40$ $\sigma_2 = 30$

இல் எனும் எடுகோள் :

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ இரண்டு கேபிள்களின் சராசரி உடையும் தன்மையின் வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததல்ல.

மாற்று எடுகோள்:

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (இரு முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.01$ அல்லது 1%

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல்:

H_0-ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right|$$

$$= \left| \frac{1925 - 1905}{\sqrt{\frac{40^2}{100} + \frac{30^2}{100}}} \right| = \frac{20}{5} = 4$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$$Z_e = \left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right| \sim N(0,1) = 2.58$$

முடிவு:

இங்கு $Z_0 > Z_e$ என்பதால், H_0 மறுக்கப்படுகிறது. அதாவது இரண்டு கேபிள்களின் சராசரி உடையும் தன்மையின் வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்தது.

எடுத்துக்காட்டு 9:

முறையே 1000, 2000 எண்ணிக்கையுடைய மிகப் பெரிய மாதிரிகளின் கூட்டுச்சராசரி முறையே 67.5 செ.மீ மற்றும் 68.0 செ.மீ ஆகும். திட்ட விலக்கம் 2.5 செ.மீ உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரிகள் எடுக்கப்பட்டன என்பதை 5% சிறப்புகாண் மட்ட அளவில் சோதனை செய்க.

தீர்வு:

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$n_1 = 1000$ $n_2 = 2000$ $\bar{x}_1 = 67.5$ செ.மீ

$\bar{x}_2 = 68.0$ செ.மீ $\sigma = 2.5$ செ.மீ

இல் எனும் எடுகோள்:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$. அதாவது ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரிகள் எடுக்கப்பட்டன.

மாற்று எடுகோள்:

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ (இரு முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 5\%$

புள்ளியியல் அளவை கணக்கிடுதல்:

H_0-ன் கீழ், சோதனைப் புள்ளியியல் அளவையானது

$$Z_0 = \left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right|$$

$$= \left| \frac{67.5 - 68.0}{2.5\sqrt{\frac{1}{1000} + \frac{1}{2000}}} \right|$$

$$= \frac{0.5 \times 20}{2.5\sqrt{3/5}}$$

$$= 5.1$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$$Z_e = \left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| \sim N(0,1) = 1.96$$

முடிவு::

இங்கு $Z_0 > Z_e$ என்பதால், 5 % சிறப்பு காண் மட்டத்தில் H_0 மறுக்கப்படுகிறது. எனவே ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மாதிரிகள் எடுக்கப்படவில்லை என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

பயிற்சி - 5

I. சரியான விடையை தெரிவு செய்க

1. வெற்றிகளின் எண்ணிக்கைக்கான திட்டப்பிழையானது

(அ) $\sqrt{\frac{pq}{n}}$ (ஆ) $\sqrt{npq}$ (இ) npq (ஈ) $\sqrt{\frac{np}{q}}$

2. பெருங்கூற்றுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்துவது எப்போது எனில்

(அ) $n > 30$ (ஆ) $n < 30$ (இ) $n < 100$ (ஈ) $n < 1000$

3. இரண்டு சராசரிகளுக்கு இடையேயான வித்தியாசத்திற்கான புள்ளியியல் சோதனையானது

(அ) $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ (ஆ) $\frac{p-P}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}}$

(இ) $\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ (ஈ) $\frac{p_1-p_2}{\sqrt{PQ\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$

4. விகித சம வித்தியாசத்திற்கான (p_1-p_2) திட்டபிழையானது, எடுகோள் $H_0: p_1 = p_2$ என உள்ள போது

(அ) $\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$ (ஆ) $\sqrt{\hat{p}(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$

(இ) $\hat{p}\hat{q}\sqrt{(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$ (ஈ) $\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}$

5. புள்ளியியல் அளவை $z = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$ பயன்படுத்தப்படும் இல் எனும் எடுகோளானது

(அ) $H_0: \mu_1+\mu_2 = 0$ (ஆ) $H_0: \mu_1-\mu_2 = 0$

(இ) $H_0: \mu = \mu_0$ (ஒரு மாறிலி)

(ஈ) மேற்கூறியவற்றில் எவையும் இல்லை

II. கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக:

6. $\hat{P} = \frac{2}{3}$ எனில், $\hat{Q} =$ __________

7. $z_0 < z_e$ எனில், இல் எனும் எடுகோளானது ________

8. வித்தியாசமானது __________ எனில், இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது.

9. இரு விகித சமங்களுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசத்திற்கான புள்ளியியல் சோதனையானது ____________

10. கூட்டு சராசரியின் மாறுபாடானது __________

III. கீழ்க்காணும் வினாக்களுக்கு விடை தருக:

11. ஒரு சோதனையில் $z_0 \leq z_e$ எனும் பொழுது, இல் எனும் எடுகோளைப்பற்றி நீவிர் எடுக்கும் முடிவு என்ன?
12. புள்ளியியல் சோதனை அளவீடுகள் தருக.
    அ) விகித சமம்
    ஆ) சராசரி
    இ) இரு கூட்டு சராசரிகளுக்கான வித்தியாசம்
    ஈ) இரு விகித சம வித்தியாசம்
13. இருவிகித சம வித்தியாசங்களின் மாறுபாட்டை எழுதுக
14. விகித சமத்தின் திட்டபிழையை எழுதுக.
15. கீழ்க்கண்டவற்றின் சிறப்பு காண் சோதனைக்கான வழிமுறைகளை எழுதுக.
    அ) விகித சமம் ஆ) கூட்டு சராசரி இ) இரு விகித சம வித்தியாசம் ஈ) இரு கூட்டு சராசரிகளுக்கான வித்தியாசம்

16. ஒரு நாணயம் 400 முறைகள் சுண்டப்படுகிறது. மற்றும் அதில் 216 முறை தலை விழுகிறது. நாணயம் நடுநிலை மாறாததற்கான எடுகோளைச் சோதிக்கவும்.
17. ஒருவர் 10 பகடைகளை 500 முறை வீசும் போது அதில் 2560 முறை 4, 5 அல்லது 6 கிடைக்கின்றது. இது மாதிரி தேர்வின் ஏற்றத்தாழ்வுகளுக்கு காரணமாக உள்ளதா?
18. ஒரு மருத்துவமனையில் ஒரு வாரத்தில் 480 பெண் மற்றும் 520 ஆண் குழந்தைகள் பிறக்கின்றன. இந்த எண்ணிக்கையானது ஆண் மற்றும் பெண் குழந்தைகளின் பிறப்பு சமமாக உள்ளது என்ற எடுகோளை உறுதிப்படுத்துகின்றதா?
19. ஒரு பெரிய நகரத்தில் 600 ஆண்களில் 325 பேர் சுயதொழில் செய்பவர்கள். இந்தச் செய்தியை ஆதாரமாகக் கொண்டு இந்த நகரத்தில் உள்ள பெரும்பான்மையான ஆண்கள் சுயதொழில் செய்பவர் என முடிவு செய்யலாமா?
20. ஒரு இயந்திரம் 500 மாதிரிகளில் 16 குறைபாடுள்ள பொருள்களை தயாரிக்கிறது. இயந்திரத்தை பழுதுபார்த்த பிறகு 100 க்கு 3 குறைபாடுள்ள பொருளைத் தருகின்றது. இயந்திரத்தில் ஏதேனும் முன்னேற்றம் உள்ளதா?
21. 1000 நபர்கள் உள்ள நகரம் A-ல் எடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்பு மாதிரியில் 400 நபர்கள் கோதுமை உணவு சாப்பிடுபவர்கள். 800 நபர்கள் கொண்ட நகரம் B யில் எடுக்கப்பட்ட மாதிரியில் 400 நபர்கள் கோதுமை உணவு சாப்பிடுபவர்கள். கொடுக்கப்பட்ட விவரம், நகரம் A மற்றும் B யின் விகித சம வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்தது என்பதை வெளிப்படுத்துகிறதா?
22. தொழிற்சாலை A யில் தயாரிக்கப்பட்ட 1000 பொருள்களில் 3 % பழுதுள்ளவை தொழிற்சாலை B யில் தயாரிக்கப்பட்ட 1500 பொருள்களில் 2% பழுதுள்ளவை. இரண்டாவது தொழிற்சாலையில் தயாரிக்கப்பட்ட பொருள்களை விட முதல் தொழிற்சாலையில் தயாரிக்கப்பட்ட பொருளின் தரம் குறைந்தது என முடிவெடுக்கலாமா?
23. ஒரு கல்லூரியில் படிக்கும் 600 மாணவர்களில் 400 பேர் நீல நிற மையைப் பயன்படுத்துகின்றனர். மற்றொரு கல்லூரியில் படிக்கும் 900 பேரில் 450 பேர் நீல நிற மையைப் பயன்படுத்துகின்றனர். நீல நிற மையைப் பயன்படுத்துவதில் இரண்டு கல்லூரிகளுக்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததா எனச் சோதனை செய்க.

24. ஒரு சமவாய்ப்பு மாதிரியில் எடுக்கப்பட்ட 100 டயர்களின் சராசரி ஆயுட்காலம் 15269 கி.மீ என உரிமை கொண்டாடப்படுகிறது. இந்த மாதிரி எடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதி டயர்களின் சராசரி ஆயுட்காலம் 15200 கி.மீ மற்றும் அதன் திட்ட விலக்கம் 1248 கி.மீ ஆகும். அந்த உரிமையின் நியாயத்தை சோதனை செய்க.
25. 400 மாதிரிகளின் கூட்டு சராசரி 99. இந்த மாதிரி கூட்டு சராசரி 100 மற்றும் மாறுபாடு 64 உள்ள இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதா என 5% சிறப்புகாண் மட்டத்தின் மூலம் சோதனை செய்க.
26. மிகப்பெரிய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 100 எண்ணிக்கை கொண்ட மாதிரியின் கூட்டு சராசரி 52 ஆகும். முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் 7 எனில், முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி 55 எனக்கொண்ட எடுகோளுக்கு எதிராக மாற்று எடுகோளின் சராசரி 55 அல்ல என்பதை சோதனை செய்க. 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தைப் பயன்படுத்துக.
27. ஒரு நிறுவனம் தயாரித்த ஒளி விளக்குகளின் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி ஆயுட்காலம் 1200 மணி நேரம். அதன் திட்ட விலக்கம் 125 மணி நேரம். 100 விளக்குகள் மாதிரியாக எடுக்கப்பட்டு சோதனை செய்ததில் அதன் சராசரி ஆயுட்காலம் 1150 மணி நேரம் எனக் கிடைக்கப் பெற்றது. முழுமைத் தொகுதி மற்றும் மாதிரியின் கூட்டு சராசரிகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் புள்ளியியல் ரீதியாக சிறப்பு வாய்ந்ததா என 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தின் மூலம் சோதனையிடுக.
28. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு மாதிரிகளின் கூட்டு சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசத்திற்கான சிறப்பு காண் சோதனையை மேற்கொள்ளவும்.

	மாதிரியின் எண்ணிக்கை	சராசரி	திட்ட விலக்கம்
மாதிரி A	100	50	4
மாதிரி B	150	51	5

29. முறையே 40 மற்றும் 50 மாணவர்கள் கொண்ட இரண்டு வகுப்புகளுக்கு ஒரு தேர்வு நடத்தப்பட்டது. முதல் வகுப்பின் சராசரி மதிப்பெண் 74, அதன் திட்ட விலக்கம் 8, இரண்டாம் வகுப்பின் சராசரி 78, அதன் திட்ட விலக்கம் 7. இரண்டு

வகுப்புகளுக்கு நடந்த தேர்வின் செய்கைகளுக்கு இடையே ஏதேனும் வித்தியாசம் உள்ளதா என 0.05 சிறப்பு காண் மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

30. M.A. பொருளாதாரம் படிக்கும் 60 மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 63.60 அங்குலங்கள் மற்றும் 50 M.com படிக்கும் மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 69.51 அங்குலங்கள். பொருளாதாரம் படிக்கும் மாணவர்களை விட வணிகவியல் படிக்கும் மாணவர்கள் அதிக உயரம் உடையவர்கள் என நீவிர் முடிவெடுக்கலாமா? முதுகலை மாணவர்களின் திட்ட விலக்க உயரம் 2.48 அங்குலங்கள் என எடுத்து கொள்ளவும்.

விடைகள்

1. ஆ 2. அ 3. இ 4. அ 5. ஆ

6. $\frac{1}{3}$ 7. ஏற்றுக்கொள்ளப்படும் 8. சிறப்பு வாய்ந்தது

9. $\dfrac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ 10. $\dfrac{\sigma^2}{n}$

16. $z = 1.6$ H_0 ஏற்கப்படுகிறது. 17. $z = 1.7$ H_0 ஏற்கப்படுகிறது

18. $z = 1.265$ H_0 ஏற்கப்படுகிறது 19. $z = 2.04$ H_0 ஏற்கப்படுகிறது

20. $z = 0.106$ H_0 ஏற்கப்படுகிறது 21. $z = 4.247$ H_0 மறுக்கப்படுகிறது

22. $z = 1.63$ H_0 ஏற்கப்படுகிறது 23. $z = 6.38$ H_0 மறுக்கப்படுகிறது

24. $z = 0.5529$ H_0 ஏற்கப்படுகிறது 25. $z = 2.5$ H_0 மறுக்கப்படுகிறது

26. $z = 4.29$ H_0 மறுக்கப்படுகிறது 27. $z = 4$ H_0 மறுக்கப்படுகிறது

28. $z = 1.75$ H_0 ஏற்கப்படுகிறது 29. $z = 2.49$ H_0 மறுக்கப்படுகிறது

30. $z = 12.49$ H_0 மறுக்கப்படுகிறது

6. சிறப்புகாண் சோதனை (சிறு கூறுகள்)

6.0 அறிமுகம் :

பெருங்கூறுகள் சம்மந்தப்பட்ட கணக்குகளை இதற்கு முந்தைய பாடத்தில் நாம் பார்த்தோம். பெருங்கூறு கோட்பாடுகள் இரண்டு முக்கியமான அனுமானத்தின் அடிப்படையில் அமைந்துள்ளன. அவையாவன

அ) புள்ளியியல் அளவையின் சமவாய்ப்பு மாதிரி பரவலானது, தோராயமாக இயல்நிலை பரவலைச் சாரும். மற்றும்,

ஆ) ஒரு மாதிரி விவரத்திலிருந்து கிடைத்த மதிப்புகள் போதுமான அளவு முழுமைத் தொகுதியின் மதிப்புகளுக்கு அருகில் உள்ளது.

எனவே திட்டப் பிழையை வரையறுக்கும் கணக்கீடுகளுக்கு அந்த மதிப்பு பயன்படுத்தப்படுகிறது.

மேற்கண்ட அனுமானங்கள் சிறு கூறுகள் முறைகளுக்கு பொருந்தாது. ஆகவே, சிறு கூறுகளைக் கையாள்வதற்கு ஒரு புதிய முறை தேவைப்படுகிறது. மாதிரியின் எண்ணிக்கை 30-க்கும் குறைவாக இருக்குமாயின் அது சிறு கூறு எனப்படும் ($n < 30$).

பல கணக்குகளில் குறைந்த எண்ணிக்கையிலான மாதிரிகள் எடுக்க வேண்டியிருக்கிறது. எனவே, சிறு கூறுகளைக் கையாளுவதற்கு பொருத்தமான சோதனைகளை மேம்படுத்த போதிய கவனம் செலுத்தப்பட்டது. இவ்வாறுள்ள சிறு கூறுகளின் கோட்பாடுகள் பற்றி அறிவதில் பங்கு ஆற்றியவர்கள் சர். வில்லியம் காசெட் மற்றும் பேராசிரியர் R. A. பிஷர் ஆவார். சர். வில்லியம் காசெட் தனது கண்டுபிடிப்புகளை 'ஸ்டுடண்ட்' என்ற புனைப் பெயரில் 1905-ல் வெளியிட்டார். பிறகு பேராசிரியர் R. A. பிஷர் அவர்களால் விரிவாக்கப் பட்டது. அவர் கண்டு பிடித்த சோதனை புகழ்பெற்ற t-சோதனை ஆகும்.

6.1. புள்ளியியல் அளவை வரையறை:

ஒரு இயல்நிலை முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்ற n அளவுகள் கொண்ட ஒரு சம வாய்ப்பு மாதிரி எடுக்கப்படுகின்றது. அதன் சராசரி μ மற்றும் மாறுபாடு σ^2 எனில் ஸ்டுடண்ட் t - புள்ளியியல் அளவை கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப் படுகிறது.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad \text{இங்கு} \quad \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$ என்பது மாதிரியின் சராசரி.

மற்றும் $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x-\bar{x})^2$ என்பது முழுமைத்தொகுதியின் மாறுபாடு, σ^2 இன் பிழையற்ற மதிப்பீடாகும். இது ஸ்டுடண்டின் பரவலை $v = n - 1$ வரையற்ற பாகைகளோடு தழுவுகிறது.

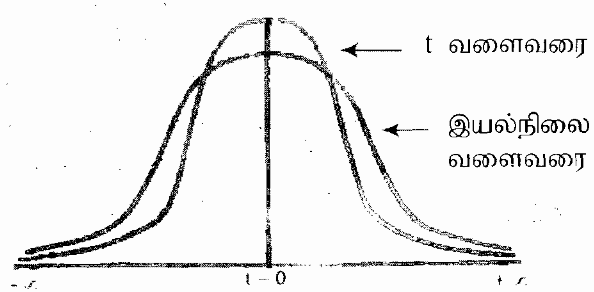
6.1.1 t - சோதனைக்கான அனுமானங்கள்:

1. மாதிரி எடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியானது இயல்நிலை ஆகும்.
2. கண்டறிந்த மாதிரியின் மதிப்புகள் யாவும் சமவாய்ப்புடையவை மற்றும் சார்பற்றவை.
3. முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் σ தெரியாத நிலை.

6.1.2 t - பரவலின் பண்புகள்:

1. இயல்நிலை மாறியைப் போல, t-மாறியும் $-\infty$ க்கும், ∞ க்கும் இடையில் அமையும்.
2. இயல்நிலைப் பரவலைப் போல t-பரவலும் சமச்சீராக இருக்கும். மற்றும் அதன் சராசரி பூஜ்ஜியம் ஆகும்.
3. திட்ட இயல்நிலைப் பரவலை விட t-பரவல் அதிக விலக்கத்தைப் பெற்றிருக்கும்.
4. மாதிரி உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 30-க்கும் மேல் இருக்கும் போது t-பரவல் இயல் நிலை பரவலை அணுகுகிறது.

இயல்நிலை வளைவரை மற்றும் t – வளைவரைக்குமான ஒப்பீடு.



6.1.3 வரையற்ற பாகைகள்:

ஒருவரை ஏதாவது நான்கு எண்களை எழுதச் சொன்னால் அனைத்து எண்களும் அவருடைய தேர்வாக இருக்கும், நான்கு எண்களின் கூடுதல் 50 என்ற நிபந்தனைக்கு உட்படுத்தப்படும்போது இங்கே நாம் எண்களை 10, 15, 20 என தேர்வு செய்தால், நான்காவது எண் ஆனது $[50 - (10 + 15 + 20)] = 5$ ஆகும். அதாவது எண்களின் கூடுதல் 50 என்ற நிபந்தனை விதிப்பதனால் நாம் தேர்ந்தெடுக்கும் உரிமையில் ஒன்று குறையும் மற்றும் வரையற்ற பாகை 3 ஆகும். கட்டுப்பாடுகள் அதிகரிக்கும்போது உரிமை குறைகிறது.

புள்ளியியல் அளவையை உருவாக்கும் சார்பற்ற மாறிகளின் எண்ணிக்கையே வரையற்ற பாகைகள் எனப்படும். அது பொதுவாக ν (நியூ) எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

n கண்டறிந்த மதிப்புகளின் வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை $n - k$ ஆகும். இங்கு k என்பது அவற்றின் மீது விதிக்கப்பட்ட சார்பற்ற நேர்க்கோட்டு நிபந்தனைகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

ஸ்டூடண்ட் t - பரவலுக்கு வரையற்ற பாகையின் எண்ணிக்கை மாதிரிகளின் எண்ணிக்கையிலிருந்து ஒன்றைக் கழிக்க கிடைக்கும். அது $\nu = n - 1$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

χ^2 சோதனைகளில் வரையற்ற பாகைகள் மிக முக்கிய பங்கு ஆற்றுகிறது. ஒரு பரவலைப் பொருத்தும்போது வரையற்ற பாகையின் எண்ணிக்கை $[n - k - 1]$ ஆகும். இதில் n என்பது கண்டறிந்த மதிப்பின் எண்ணிக்கை மற்றும் k என்பது கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட பண்பளவைகளின் எண்ணிக்கையாகும். உதாரணமாக பாய்சான் பரவலைப் பொருத்தும்போது அதன் வரையற்ற பாகை $\nu = n - 1 - 1$

நேர்வுப் பட்டியலின் வரையற்ற பாகை $(r-1)\ (c-1)$ ஆகும். இங்கு r நிரைகளின் எண்ணிக்கையையும் மற்றும் c நிரல்களின் எண்ணிக்கையையும் குறிக்கின்றன. ஆகவே 3×4 நேர்வுப் பட்டியலுக்கு வரையற்ற பாகையானது $(3-1)\ (4-1) = 6$. நேர்வுப் பட்டியல் 2×2 வின் வரையற்ற பாகையானது $(2-1)\ (2-1) = 1$ ஆகும்.

t-ன் தீர்வு கட்ட மதிப்பு:

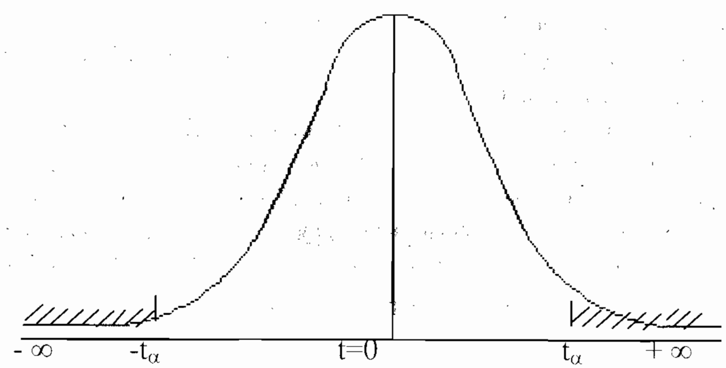
t-அட்டவணையில் உள்பகுதியின் நிரல்கள் $t_{0.100}$, $t_{0.05}$, $t_{0.025}$, $t_{0.010}$ மற்றும் $t_{0.005}$. என்ற தலைப்புகளைப் பெற்றுள்ளன. இதில் உள்ள

0.10, 0.05 போன்ற எண்கள் 'இறுதிப்' பகுதி பரப்பில் உள்ள பரவலின் விகிதங்களைக் கொடுக்கின்றன. இவ்விதமாக இருமுனை சோதனையில் 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் ஒவ்வொன்றும் மொத்த பரப்பில் 2.5% இருக்குமாறு இரு புறமும் மறுக்கப்படும் பகுதிகள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டாக:

ஒரு முனைச் சோதனையில் $t_{\nu(0.05)}$ = இரு முனைச் சோதனையில் $t_{\nu(0.25)}$ ஒருமுனைச் சோதனையில் $t_{\nu(0.01)}$ = இரு முனைச் சோதனையில் $t_{\nu(0.005)}$ இவ்விதமாக ஒரு முனை சோதனையில் 5% அளவில் மறுக்கும் பரப்பு என்பது பரவலின் ஓர் முனைப் பகுதியில் அமைவதாகும். இது $t_{0.05}$ என்ற தலைப்பில் அமைந்த நிரலின் கீழ் கிடைக்கும்.

t பரவலின் தீர்வு கட்ட மதிப்பு



6.1.4 பரவலின் பயன்பாடுகள்:

புள்ளியியல் ஆய்வில் t-பரவல் பல பயன்பாடுகளைப் பெற்றிருக்கின்றன. அவற்றைக் கீழ்வரும் பகுதியில் காணலாம்.

1. முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு தெரியாத நிலையில் ஒரு மாதிரியின் சராசரிக்கான t-யின் சிறப்பு சோதனை.
2. முழுமைத் தொகுதிகளின் மாறுபாடுகள் சமம் மற்றும் தெரியாத நிலையில், இரண்டு மாதிரிகளின் சராசரிகளின் வேறுபாட்டுக்கான t - யின் சிறப்பு சோதனை.

   அ. சார்பற்ற மாதிரிகள்

   ஆ. சார்புள்ள மாதிரிகளுக்கான இணை t-சோதனை.

6.2 கூட்டு சராசரிக்கான சிறப்பு காண் சோதனை:

இல் எனும் எடுகோள் மற்றும் மாற்று எடுகோட்களை அமைக்கவும்.

H_0: $\mu = \mu_0$; மாதிரிச் சராசரிக்கும், முழுமைத் தொகுதி சராசரிக்கும் உள்ள வேறுபாடு சிறப்பு வாய்ந்தது அல்ல.

H_1: $\mu \neq \mu_0$ ($\mu < \mu_0$ அல்லது $\mu > \mu_0$)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

5% அல்லது 1%

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0 ன் கீழ், சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$t_0 = \left|\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| \quad \text{அல்லது} \quad \left|\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n-1}}\right|$$

இங்கு $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ என்பது மாதிரியின் சராசரி ஆகும்.

மற்றும் $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x-\bar{x})^2$ அல்லது $s^2 = \frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})^2$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$$t_e = \left|\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| \sim \text{(n-1) வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட}$$

ஸ்டூடண்ட்டின் t - பரவல்.

முடிவு:

$t_0 \leq t_e$ எனில், இல் எனும் எடுகோள் ஏற்கப்படும் பகுதியில் அமைகிறது. எனவே அது ஏற்கப்படுகிறது.

$t_0 > t_e$ எனில், இல் எனும் எடுகோள் கொடுக்கப்பட்ட சிறப்பு காண் மட்டத்தில் மறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1:

ஒருவகை பூச்சிக்கொல்லி மருந்து இயந்திரத்தின் மூலம் பைகளில் நிரப்பப்படுகிறது. ஒரு சமவாய்ப்பு மாதிரி முறையில் 10

பைகள் எடுக்கப்பட்டு அதன் உள்ளே உள்ள பொருள்களின் எடைகள் (கி.கி. யில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

50 49 52 44 45 48 46 45 49 45

நிரப்பப்படும் பைகளின் எடை 50 கி.கி இருக்கும் என எடுத்துக் கொண்டு சோதனை செய்க.

தீர்வு:

இல் என்னும் எடுகோள்:

$H_0 : \mu = 50$ கி.கி அதாவது நிரப்பப்பட்ட பையின் சராசரி எடை 50 கி.கி. என்க

மாற்று எடுகோள்:

$H_1 : \mu \neq 50$ கி.கி. (இரு முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க

மாதிரி சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுதல்

X	d = x –48	D^2
50	2	4
49	1	1
52	4	16
44	–4	16
45	–3	9
48	0	0
46	–2	4
45	–3	9
49	+1	1
45	–3	9
மொத்தம்	**–7**	**69**

$$\bar{x} = A + \frac{\sum d}{n}$$

$$= 48 + \frac{-7}{10}$$

$$= 48 - 0.7 = 47.3$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[69 - \frac{(7^2)}{10}\right]$$

$$= \frac{64.1}{9} = 7.12$$

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0 - ன் கீழ் , சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$t_0 = \left|\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{S^2/n}}\right|$$

$$= \left|\frac{47.3 - 50.0}{\sqrt{7.12/10}}\right|$$

$$= \frac{2.7}{\sqrt{0.712}} = 3.2$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$t_e = \left|\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{S^2/n}}\right|$ ஆனது $(10 - 1 = 9)$ வரையற்ற பாகைகள்

கொண்ட t - பரவலைத் தழுவுகிறது

$= 2.262$

முடிவு:

இங்கு $t_0 > t_e$ என்பதால் 5 % சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே, நிரப்பப்பட்ட பையின் சராசரி எடை 50 கி.கி. இல்லை என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2:

ஒரு சோப்பு தயாரிக்கும் நிறுவனம், குறிப்பிட்ட வகை சோப்பை சில்லறை விற்பனைக் கடைகளின் மூலம் விற்கிறார்கள். விளம்பரம் செய்வதற்கு முன்பு ஒரு கடையின் சராசரி விற்பனை 140 டஜன்கள். விளம்பரம் செய்த பிறகு, 26 கடைகளை மாதிரியாக எடுத்ததில் சராசரி விற்பனை 147 டஜன்கள் மற்றும் அதன் திட்ட விலக்கம் 16. விளம்பரம் பயனுள்ளது என எண்ணுகிறாயா?

தீர்வு:

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$n = 26;$ $\bar{x} = 147$ டஜன்கள் $s = 16$

இல் என்னும் எடுகோள்:

H_0: $\mu = 140$ டஜன்கள். அதாவது விளம்பரம் செய்வதனால் விற்பனை அதிகரிக்கப்படுவதில்லை.

மாற்று எடுகோள்:

H_1: $\mu > 140$ டஜன்கள் (வல முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0 ன் கீழ் , சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது.

$$t_0 = \left|\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n-1}}\right|$$

$$= \left|\frac{147 - 140}{16/\sqrt{25}}\right| = \frac{7 \times 5}{16} = 2.19$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$t_e = \left|\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n-1}}\right|$ ஆனது $(26 - 1 = 25)$ வரையற்ற பாகைகள்

கொண்ட t- பரவலைத் தழுவுகிறது

$= 1.708$

முடிவு:

இங்கு $t_0 > t_e$ என்பதால் 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. எனவே விளம்பரம் செய்வது விற்பனையை அதிகப்படுத்தும் என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

6.3 இரண்டு சராசரிகளின் இடையே உள்ள வித்தியாசத்தின் சிறப்பு காண் சோதனை:

6.3.1. சார்பற்ற மாதிரிகள்

மாறுபாடுகள் சமமாக உள்ள இரண்டு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட இரண்டு சார்பற்ற மாதிரிகளின் சராசரிகள் சமம் என சோதனையிட வேண்டும் எனக் கருதுவோம். $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ மற்றும் $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ இரண்டு சார்பற்ற சமவாய்ப்பு

மாதிரிகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டது என்க.

இல் என்னும் எடுகோள்:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ அதாவது இரண்டு மாதிரிகளும் சராசரிகள் சமமாக உள்ள இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டன.

மாற்று எடுகோள்:

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ($\mu_1 < \mu_2$ அல்லது $\mu_1 > \mu_2$)

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0 ன் கீழ் , சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$t_0 = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right|$$

இங்கு $\bar{x} = \frac{\sum x}{n_1}$; $\bar{y} = \frac{\sum y}{n_2}$

மற்றும் $S^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} [\sum(x - \bar{x})^2 + \sum(y - \bar{y})^2] = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$$t_e = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right|$$ ஆனது $(n_1 + n_2 - 2)$ வரையற்ற

பாகைகள் கொண்ட t - பரவலைத் தழுவுகிறது.

முடிவு:

$t_0 < t_e$ எனில் இல் எனும் எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.

$t_0 > t_e$ எனில் இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3:

5 நோயாளிகள் கொண்ட ஒரு குழுவிற்கு A எனும் மருந்து கொடுத்ததில் அவர்களின் எடை 42, 39, 48, 60 மற்றும் 41 கி.கி. என

இருக்கிறது. 7 நோயாளிகளைக் கொண்ட இரண்டாவது குழுவிற்கு B எனும் மருந்து கொடுத்ததில் அவர்களின் எடை 38, 42, 56, 64, 68, 69 மற்றும் 62 கி.கி. என இருக்கிறது. B எனும் மருந்து எடையை அதிகப்படுத்துகிறது என்பதை நீவிர் ஏற்றுக் கொள்வீரா?

தீர்வு:

A மற்றும் B மருந்து கொடுத்து சிகிச்சையளித்ததில் நோயாளிகளின் எடை (கி.கி ல்) முறையே x மற்றும் y மாறிகள் மூலம் குறிக்கப்படுகின்றன என்க.

இல் என்னும் எடுகோள்:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ அதாவது மருந்து A மற்றும் B ஆகியவற்றின் எடையை அதிகப்படுத்தும் விளைவுகளில் சிறப்பான வேறுபாடு இல்லை.

மாற்று எடுகோள்:

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$ அதாவது B எனும் மருந்து எடையை அதிகப்படுத்துகிறது.

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க.

மாதிரி சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுதல்.

மருந்து A

X	$x - \bar{x}$ ($\bar{x} = 46$)	$(x - \bar{x})^2$
42	– 4	16
39	–7	49
48	2	4
60	14	196
41	– 5	25
230	**0**	**290**

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n_1} = \frac{230}{5} = 46$$

மருந்து **B**

Y	$y-\bar{y}$ ($\bar{y}=57$)	$(y-\bar{y})^2$
38	–19	361
42	–15	225
56	–1	1
64	7	49
68	11	121
69	12	144
62	5	25
399	**0**	**926**

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n_2} = \frac{399}{7} = 57$$

$$S^2 = \frac{1}{n_1+n_2-2}\left[\sum(x-\bar{x})^2 + \sum(y-\bar{y})^2\right] = \frac{1}{10}[290+926] = 121.6$$

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0 ன் கீழ், சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$t_0 = \left|\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}\right|$$

$$= \left|\frac{46-57}{\sqrt{121.6\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)}}\right| = \frac{11}{\sqrt{121.6\times\frac{12}{35}}} = \frac{11}{6.57} = 1.7$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$$t_e = \left|\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}\right|$$ ஆனது (5+7–2) = 10 வறையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட t - பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 1.812$

முடிவு:

இங்கு $t_0 < t_e$ என்பதால், H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. அதாவது மருந்து A மற்றும் B ஆகியவற்றின் எடையை அதிகரிக்கும் விளைவுகளில் சிறப்பான வேறுபாடு இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 4:

இரண்டு வகையான மின்கலங்களின் ஆயுட்காலத்தை சோதனை செய்ததில் கீழ்கண்ட விவரங்கள் பெறப்பட்டன.

	மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை	சராசரி ஆயுள் (மணி நேரம்)	மாறுபாடு
வகை A	9	600	121
வகை B	8	640	144

இரண்டு சராசரிகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததா?

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள்

$n_1 = 9$; $\bar{x}_1 = 600$ மணி நேரம்; $s_1^2 = 121$;

$n_2 = 8$; $\bar{x}_2 = 640$ மணி நேரம்; $s_2^2 = 144$;

இல் என்னும் எடுகோள்:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ A மற்றும் B வகை மின்கலங்களின் சராசரி ஆயுட் காலங்களில் வித்தியாசமில்லை.

மாற்று எடுகோள்:

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (இரு முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ எனக.

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0 ன் கீழ், சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$t_0 = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right|$$

$$\text{இங்கு } S^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{9 \times 121 + 8 \times 144}{9 + 8 - 2}$$

$$= \frac{2241}{15} = 149.4$$

$$\therefore \quad t_0 = \left| \frac{600 - 640}{\sqrt{149.4\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{8}\right)}} \right|$$

$$= \frac{40}{\sqrt{149.4\left(\frac{17}{72}\right)}} = \frac{40}{5.9391} = 6.735$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$$t_e = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right|$$ ஆனது 9+8−2 =15 வரையற்ற பாகைகளை கொண்ட t-பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 2.131$

முடிவு:

இங்கு $t_0 > t_e$ என்பதால், H_0 மறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே இரண்டு வகை மின்கலங்களின் சராசரி ஆயுட்காலங்களிடையே சிறப்பான வேறுபாடு உள்ளது என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

6.3.2. தொடர்புடைய மாதிரிகள்- t - ன் இணை சோதனை:

சராசரிகளின் வித்தியாசத்திற்கான சோதனையில் இரண்டு மாதிரிகளும் ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவை.

மாதிரிகளின் எண்ணிக்கைகள் சமமாக இருக்கும். அதாவது $n_1 = n_2 = n$ மற்றும் நாம் இப்பொழுது ஒரு குறிப்பிட்ட சூழ்நிலைகளை எடுத்துக் கொள்வோம். அங்கு மாதிரிகளின் கண்டறிந்த விவரங்கள் $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ மற்றும் $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ஆகியன முற்றிலுமாக சார்பற்றவை அல்ல. ஆனால் அவற்றின் இணைகள் சார்புள்ளவை.

ஒரே நபருக்கு சிகிச்சைக்கு முன்பும், சிகிச்சைக்கு பின்பும் எடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் இணைகளை எடுத்துக்காட்டாக கூறலாம். இதுபோலவே ஒரு மருந்து தயாரிக்கும் நிறுவனம் ஒரு குறிப்பிட்ட மருந்தின் விளைவை சோதனை செய்வதாக கொள்வோம். அதாவது அம்மருந்து கொடுக்கப்பட்ட பின்னர் அது எவ்வாறு தூக்கத்தை தூண்டுகிறது என்பதை சோதனை செய்வது எனக் கொள்வோம். மேலே கூறப்பட்ட சூழ்நிலைகளுக்கு t- ன் இணை சோதனை ஏற்றது.

t- இன் இணை சோதனை

$d_i = X_i - Y_i$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots n)$ என்பது i அளவின் இணை விவரங்களின் வேறுபாடு எனக் கொள்வோம்.

இல் என்னும் எடுகோள்:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ அதாவது உயர்வு தற்செயலானது.

மாற்று எடுகோள்:

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ($\mu_1 > \mu_2$ அல்லது $\mu_1 < \mu_2$)

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

$$t_o = \left|\frac{\bar{d}}{S/\sqrt{n}}\right|$$

இங்கு $\bar{d} = \frac{\sum d}{n}$ மற்றும் $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(d-\bar{d})^2 = \frac{1}{n-1}[\sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{n}]$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$t_e = \left|\frac{\bar{d}}{S/\sqrt{n}}\right|$ ஆனது $n - 1$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட *t* - பரவலைத் தழுவுகிறது.

முடிவு:

t_0, t_e ஆகியவற்றை தேவையான சிறப்பு காண் மட்டத்தில் ஒப்பிட்டு ஏற்கவோ அல்லது மறுக்கவோ செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5:

தட்டச்சர்கள் மேஜைகளில் ஒரு மாற்றம் செய்யும் தேவைக்கு ஒரு சோதனை வைக்கப்பட்டது. ஒரே வகையான தட்டச்சர்கள் தேர்வு செய்யப்பட்டு இரண்டு விதமான சோதனைக்குட்படுத்தப்பட்டனர். ஒன்று ஏற்கனவே உபயோகித்த மேஜைகள், மற்றொன்று புதிய வகை மேஜைகள். ஒரு நிமிடத்தில் தட்டச்சு செய்யப்பட்ட மொத்த வார்த்தைகளின் வித்தியாசங்கள் பதிவு செய்யப்பட்டன.

தட்டச்சர்கள்	A	B	C	D	E	F	G	H	I
அதிகரிக்கபட்ட எண்ணிக்கை	2	4	0	3	–1	4	–3	2	5

மேலே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் மூலம் மேஜையில் ஏற்பட்ட மாற்றம் தட்டச்சு வேகத்தை அதிகப்படுத்தியதா?

தீர்வு:

இல் என்னும் எடுகோள்:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ அதாவது மேஜையில் ஏற்பட்ட மாற்றம் தட்டச்சு வேகத்தை அதிகப்படுத்தவில்லை.

மாற்று எடுகோள்:

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$ (இடது முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க.

தட்டச்சர்	d	d^2
A	2	4
B	4	16
C	0	0
D	3	9
E	–1	1
F	4	16
G	–3	9
H	2	4
I	5	25
	$\Sigma d = 16$	$\Sigma d^2 = 84$

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{16}{9} = 1.778$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}[\sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{n}]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{8}[84 - \frac{(16)^2}{9}]}$$

$$= \sqrt{6.9} = 2.635$$

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0-ன் கீழ், சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$t_0 = \left|\frac{\bar{d}.\sqrt{n}}{S}\right| = \frac{1.778 \times 3}{2.635}$$

$$= 2.024$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$$t_e = \left|\frac{\bar{d}.\sqrt{n}}{S}\right|$$ ஆனது $9 - 1 = 8$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட t-பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 1.860$

முடிவு:

இங்கு $t_0 < t_e$ என்பதால், இல் எனும் எடுகோள் ஏற்கப்படுகிறது. இங்கு கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின் மூலம் மேஜையில் ஏற்பட்ட மாற்றம் தட்டச்சு வேகத்தை அதிகப்படுத்தவில்லை என்பதைக் காட்டுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6:

5 நபர்களுக்கு பயிற்சிக்கு முன்பும். பின்பும் நுண்ணறிவு சோதனை செய்யப்பட்டது, அதன் முடிவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

நபர்கள்	I	II	III	IV	V
பயிற்சிக்கு முன் நுண்ணறிவு	110	120	123	132	125
பயிற்சிக்குப் பின் நுண்ணறிவு	120	118	125	136	121

பயிற்சி திட்டத்திற்குப் பிறகு நுண்ணறிவில் ஏதாவது மாற்றம் உண்டா என்பதை 1 % சிறப்பு காண் மட்ட அளவில் சோதிக்கவும்.

தீர்வு:

இல் என்னும் எடுகோள்:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ அதாவது பயிற்சிக்கு பின்பும் நுண்ணறிவில் குறிப்பிடத்தக்க மாற்றம் இல்லை.

மாற்று எடுகோள்:

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (இரு முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$$\alpha = 0.01$$

X	110	120	123	132	125	மொத்தம்
Y	120	118	125	136	121	-
d = x−y	−10	2	−2	−4	4	−10
d^2	100	4	4	16	16	140

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[140 - \frac{100}{5}\right] \quad = 30$$

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0-ன் கீழ் சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$t_0 = \left|\frac{\bar{d}}{S/\sqrt{n}}\right|$$

$$= \left|\frac{-2}{\sqrt{30/5}}\right| = \frac{2}{2.45} = 0.816$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$$t_e = \left|\frac{\bar{d}}{\sqrt{S^2/n}}\right|$$ ஆனது $5 - 1 = 4$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட t-பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 4.604$

முடிவு:

இங்கு $t_0 < t_e$ என்பதால் 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் ஏற்கப்படுகிறது. எனவே, பயிற்சிக்கு பின்பு நுண்ணறிவில் குறிப்பிடத்தக்க மாற்றம் இல்லை.

6.4 கை வர்க்க சோதனை:

முன்பு விவரித்த பலவிதமான சிறப்பு காண் சோதனைகள் எண் அளவை விவரங்களுக்கு மட்டுமே பயன்படுத்தப்படுகின்றன. மற்றும் பொதுவாக இயல்நிலைப் பரவலைக் கொண்ட விவரங்களுக்கு மட்டுமே பயன்படுத்தப்படுகின்றன. சில நேரங்களில் விவரங்கள் இயல்நிலைப் பரவலைத் தழுவாமல் இருக்கவும் நேரிடுகிறது. எனவே வேறு முறைகள் தேவைப்படுகிறது. இந்த முறைகள் எதிர்பார்க்கும்

மற்றும் கண்டறிந்த அலைவெண்களுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசத்தை கண்டறிவதன் நோக்கத்திற்கு பயன்படுகின்றன.

மற்றொரு முறையானது பண்பளவையைச் சாராத அல்லது பண்பளவை சாராத பரவல் முறை ஆகும். ஒரு பண்பளவையைச் சாராத புள்ளியியல் சோதனையில் பண்பளவைகளின் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கான எடுகோள்கள் அமைக்கப்படுவதில்லை. இந்த முறைகள் கண்டு பிடிப்பதற்கு எளிதாக இருப்பதால் புள்ளியியல் ஆய்வுகளில் அதிக முக்கியத்துவம் பெறுகின்றன.

6.4.1 வரையறை:

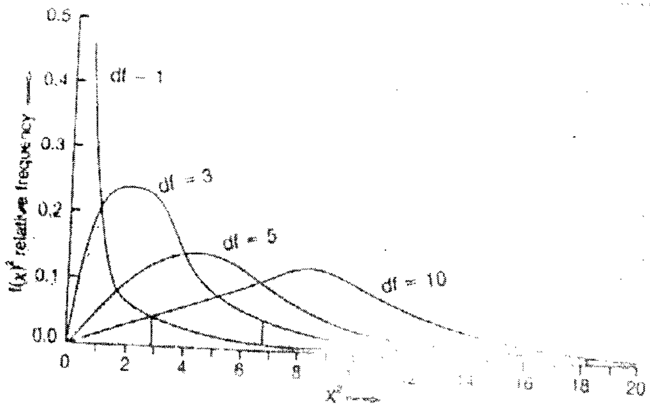
கை வர்க்க (χ^2) சோதனை மிகவும் எளியது மற்றும் மிக அதிக அளவில் புள்ளியியலில் பயன்படுத்தப்படும் சோதனைகளில், பண்பளவையை சாறாத சோதனையாகும். 1900-ஆம் வருடம் χ^2 சோதனையானது கார்ல் பியர்சனால் முதன் முதலில் பயன்படுத்தப் பட்டது. χ^2- ன் அளவு கண்டறிந்த மதிப்பு மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பிற்கும் இடையே உள்ள முரண்பாடு ஆகும், இதனை கீழ்கண்டவாறு வரையறுக்கலாம். $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(Oi - Ei)^2}{Ei}\right]$

இங்கு O கண்டறிந்த அலைவெண்களையும் மற்றும் E எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களையும் குறிக்கின்றன.

குறிப்பு: χ^2 - ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாக இருப்பின் கண்டறிந்த மற்றும் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள் ஒன்றோடொன்று ஒன்றி இருக்கும். χ^2 இன் மதிப்பு அதிகமாக இருந்தால் கண்டறியப்பட்ட மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களுக்கு இடையே உள்ள முரண்பாடும் அதிகமாக இருக்கும்.

கை வர்க்கப் பரவல்:

திட்ட இயல்நிலை மாறியின் வர்க்கமே கை வர்க்க மாறியாகும். இதன் வரையற்ற பாகை 1 ஆகும், அதாவது X இயல்நிலையில் பரவியிருந்தால் அதன் சராசரி μ மற்றும் திட்ட விலக்கம் σ எனில் பிறகு $\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$ என்பது வரையற்ற பாகை 1 எனக் கொண்ட கை வர்க்க மாறி ஆகும். இந்த கை வர்க்கப் பரவல் வரையற்றப் பாகையைச் சார்ந்து இருக்கும். ஒவ்வொரு வரையற்ற பாகையின் எண்ணிக்கைக்கும் வெவ்வேறு பரவல்கள் கிடைக்கும்.



6.4.2. கை வர்க்கப் பரவலின் பண்புகள்:

1. χ^2 பரவலின் சராசரி அதன் வரையற்ற பாகைகளுக்கு சமம். (n)
2. χ^2 பரவலின் மாறுபாடானது 2n
3. χ^2 பரவலின் இடைநிலை, வளைகோட்டுப் பரப்பை இரு சமமாகப் பிரிக்கிறது. ஓவ்வொரு பகுதியும் 0.5 ஆகும்.
4. χ^2 பரவலின் முகடு (n–2) ஆகும்.
5. கை வர்க்க மதிப்புகள் எப்பொழுதும் நேரிடை, எனவே, கை வர்க்க வரையறை எப்பொழுதும் நேர்க்கோட்டம் ஆக இருக்கும்.
6. வரையற்ற பாகைகள் அதிகரிக்க அதிகரிக்க கை வர்க்க மதிப்புகள் அதிகரிப்பதால் வரையற்ற பாகைகளின் ஒவ்வொரு அதிகரிப்பிற்கும் ஒரு புதிய கை வர்க்கப் பரவல் கிடைக்கிறது.
7. கை வர்க்கத்தின் மிகக் குறைந்த மதிப்பு 0. மிக அதிக மதிப்பு ∞ ஆகும். $\chi^2 \geq 0$.
8. n_1 , n_2 வரையற்ற பாகைகளாகக் கொண்ட χ_1^2 , χ_2^2 என்பவை சார்பற்ற இரு கை வர்க்க பரவல்கள் எனில் அவைகளின் கூடுதல் $\chi_1^2+\chi_2^2$ என்பது (n_1+n_2) வரையற்ற பாகைகளாகக் கொண்ட ஒரு கை வர்க்கப் பரவலாகும்.
9. வரையற்ற பாகைகள் n > 30 எனில் $\sqrt{2\chi^2}$ தோராயமாக இயல்நிலைப் பரவலை நெருங்குகிறது. $\sqrt{2\chi^2}$ இன் சராசரி $\sqrt{2n-1}$ திட்ட விலக்கம் 1 ஆகும்.

6.4.3 χ^2 பரவலைப் பயன்படுத்துவதற்கு பின்வரும் நிபந்தனைகள் நிறைவு செய்யப்பட வேண்டும்

1. N, அலைவெண்களின் கூடுதல், குறிப்பிடத் தக்க அளவிற்கு அதிகமாக (50க்கு மேல்) இருக்க வேண்டும்.
2. எந்தப் பிரிவின் கட்ட அலைவெண்ணும் 5க்கு குறைவாக இருக்கக் கூடாது. அப்படி குறைவாக இருப்பின் மற்ற பிரிவு அலைவெண்களோடு இதனைச் சேர்த்துக் கூட்டி 5 க்கும் குறையாத அலைவெண்ணாக்க வேண்டும்.
3. இச்சோதனைக்குப் பயன்படுத்தப்படும் ஒவ்வொரு மாதிரி மதிப்பும் சார்பற்றதாக இருத்தல் வேண்டும்.
4. χ^2-சோதனை முழுமையும் வரையற்ற பாகைகளைச் சார்ந்திருக்கும்.

6.5 பொருத்துதலின் செம்மைச் சோதனை (ஈருறுப்பு மற்றும் பாய்சான் பரவல்)

கார்ல் பியர்சன் என்பவர் 1900 இல் கண்டுபிடிக்கப்படும் மற்றும் எதிரிபார்க்கப்படும் மதிப்புகளின் முரண்பாடுகளுக்கான சோதனையை சில கோட்பாடுகள் அல்லது எடு கோள்களின் கீழ் விரிவுபடுத்தினார். இந்தச் சோதனையானது பொருத்துதலின் செம்மைக்கான χ^2 - சோதனை எனப்படுகிறது. கண்டறியப்பட்ட மதிப்பிற்கும் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்புகளுக்கும் இடையே உள்ள விலக்கம் இயல்பான வேறுபாட்டு வாய்ப்புகளாலா அல்லது கோட்பாட்டில் உள்ள விவரங்களின் பற்றாக்குறையினாலா என்பதை சோதனை செய்ய χ^2 உதவுகிறது. இங்கு கண்டறிந்த மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்புகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தகுந்ததாக இல்லை என்பது இல் எனும் எடுகோளாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(Oi-Ei)^2}{Ei}\right]$$

$$= \frac{(O_1-E_1)^2}{E_1} + \frac{(O_2-E_2)^2}{E_2} + \dots\dots\frac{(O_n-E_n)^2}{E_n}$$

மேற்கண்ட χ^2 அளவையானது $\nu = (n - k - 1)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட χ^2 பரவலைத் தழுவுகிறது என்று கார்ல் பியர்சன் நிரூபித்துள்ளார். இங்கு O_1, O_2, ..., O_n என்பன கண்டறியப்பட்ட அலைவெண்களையும் மற்றும் $E_1, E_2, \dots, E_n$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட

விவரங்களிலிருந்து மதிப்பிட வேண்டிய அலைவெண்களையும் குறிக்கின்றது. இச்சோதனையின் மூலம் கணக்கிடப்பட்ட மதிப்புடன் தகுந்த வரையற்ற பாகைகளுக்கான χ^2 அட்டவணை மதிப்பை ஒப்பிட்டு முடிவுகள் மேற்கொள்ளப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 7:

ஒரே நேரத்தில் 4 நாணயங்கள் சுண்டப்படும்போது ஒவ்வொரு முறையும் தலைகள் விழும் எண்ணிக்கை குறித்து வைக்கப்பட்டது. 240 முறை இந்த சோதனையை திரும்பச் செய்யும்போது கீழ்காணும் விவரங்கள் கிடைக்கின்றன.

தலைகளின் எண்ணிக்கைகள்	0	1	2	3	4
எறியப்பட்ட எண்ணிக்கைகள்	13	64	85	58	20

இதற்கு ஓர் ஈருறுப்பு பரவலைப் பொருத்தி நாணயங்கள் பழுதற்றவை என்ற எடுகோளை சோதிக்கவும்.

தீர்வு:

இல் என்னும் எடுகோள்:

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலை பொருத்துகிறது. அதாவது நாணயங்கள் பழுதற்றவை.

$p = q = 1/2$ $\quad n = 4$ $\quad N = 240$

எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெணகளைக் கணக்கிடுதல்.

தலைகளின் எண்ணிக்கை	$P(X=x) = 4C_x p^x q^{n-x}$	எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் N. P(X = x)
0	$4Co\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{16}\right)$	$\left(\frac{1}{16}\right) \times 240 = 15$
1	$4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{4}{16}\right)$	$\left(\frac{4}{16}\right) \times 240 = 60$
2	$4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{6}{16}\right)$	$\left(\frac{6}{16}\right) \times 240 = 90$
3	$4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{4}{16}\right)$	$\left(\frac{4}{16}\right) \times 240 = 60$
4	$4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{16}\right)$	$\left(\frac{1}{16}\right) \times 240 = 15$
		240

கைவர்க்க மதிப்புகளைக் கணக்கிடுதல்

கண்டறிந்த அலைவெண் O	எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் E	$(O-E)^2$	$\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right)$
13	15	4	0.27
64	60	16	0.27
85	90	25	0.28
58	60	4	0.07
20	15	25	1.67
			2.56

$$\chi_0^2 = \Sigma\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right) = 2.56$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$\chi_e^2 = \Sigma\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right)$ ஆனது (n–k–1) வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட χ^2 பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 9.488$ ($\nu = 5-1 = 4$ வரையற்ற பாகைகளுக்கு)

(இங்கே k = 0 ஏனென்றால் விவரங்களிலிருந்து எந்த பண்பளவையும் மதிப்பீடு செய்யப்படவில்லை.)

முடிவு:

இங்கு $\chi_0^2 < \chi_e^2$ என்பதால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது. ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திற்கு ஈருறுப்புப் பரவல் பொருந்தியிருக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8:

கீழே கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணை கால்பந்து போட்டியில் கிடைத்த வெற்றிப்புள்ளிகளின் பரவலைக் காட்டுகிறது.

வெற்றிப்புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5	6	7
போட்டிகளின் எண்ணிக்கை	95	158	108	63	40	9	5	2

இவ்விவரத்திற்கு ஒரு பாய்சான் பரவலைப் பொருத்தி அதன் செம்மையை சோதனை செய்யவும்.

தீர்வு:

இல் என்னும் எடுகோள்:

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் பாய்சான் பரவலை பொருத்துகிறது.

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க.

எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுதல்

$$m = \frac{812}{480} = 1.7$$

$$P(0) = e^{-1.7}\frac{(1.7)^0}{0!} = 0.183.$$

$$f(o) = N.P(o) = 480 \times 0.183 = 87.84$$

மீதி உள்ள எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் மறுதரவு [recurrence relation] தொடர்பின் மூலம் கிடைக்கும்.

$$f(x+1) = \frac{m}{x+1} \times f(x)$$

சூத்திரத்தில் x = 0, 1, 2, ... எனப் பிரதியிட நமக்கு கீழ்காணும் அலைவெண்கள் கிடைக்கும்.

$$f(1) = 1.7 \times 87.84$$
$$= 149.328$$

$$f(2) = \frac{1.7}{2} \times 149.328$$
$$= 126.93$$

$$f(3) = \frac{1.7}{3} \times 126.93$$
$$= 71.927$$

$$f(4) = \frac{1.7}{4} \times 71.927$$
$$= 30.569$$

$$f(5) = \frac{1.7}{5} \times 30.569$$
$$= 10.393$$

$$f(6) = \frac{1.7}{6} \times 10.393 = 2.94$$

$$f(7) = \frac{1.7}{7} \times 2.94$$
$$= 0.719$$

வெற்றிப்புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5	6	7	மொத்தம்
எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்	88	149	127	72	30	10	3	1	480

கண்டறிந்த அலைவெண் O	எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் E	$(O-E)^2$	$\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right)$
95	88	49	0.56
158	150	64	0.43
108	126	324	2.57
63	72	81	1.13
40	30	100	3.33
9, 5, 2 } 16	10, 3, 1 } 14	4	0.29
			8.31

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

$$\chi_o^2 = \Sigma\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right) = 8.31$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$\chi_e^2 = \Sigma\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right)$ ஆனது $\nu = 6-1-1 = 4$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட χ^2 - பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 9.488$

முடிவு:

இங்கு $\chi_0^2 < \chi_e^2$ என்பதால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் ஏற்கப்படுகிறது. ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திற்கு பாய்சான் பரவல் பொருந்துகிறது.

6.6 சார்பற்ற தன்மைக்கான சோதனை:

கொடுக்கப்பட்ட N உறுப்புகளைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதி, பண்பு A ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு $A_1, A_2, \ldots A_r$ என்ற ஒன்றையொன்று சேராத மற்றும் முழுமையான r பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது என்க. இதேபோல அதே முழுமைத் தொகுதி உறுப்புகள் மற்றொரு பண்பு B ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு $B_1, B_2, \ldots, B_c$ என்ற c ஒன்றையொன்று சேராத மற்றும் முழுமையான பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது என்க. $A_1, A_2, \ldots, A_r$ மற்றும் $B_1, B_2, \ldots B_c$ பிரிவுகளைச் சார்ந்து இருக்கும் உறுப்புகளின் அலைவெண் - பரவல் கீழ்கண்ட பல்நோக்கு நேர்வு அட்டவணையாக கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

r × c பல்நோக்கு நேர்வு அட்டவணை

B / A	B_1	B_2	…	B_j	…	B_c	மொத்தம்
A_1	(A_1B_1)	(A_1B_2)	…	(A_1B_j)	…	(A_1B_c)	(A_1)
A_2	(A_2B_1)	(A_2B_2)	…	(A_2B_j)	…	(A_2B_c)	(A_2)
.	.	.	.	.	.	.	.
A_i	(A_iB_1)	(A_iB_2)	…	(A_iB_j)	…	(A_iB_c)	(A_i)
.	.	.	.	.	.	.	.
A_r	(A_rB_1)	(A_rB_2)	…	(A_rB_j)	…	(A_rB_c)	(A_r)
மொத்தம்	(B_1)	(B_2)	…	(B_j)	…	(B_c)	$\Sigma Ai = \Sigma Bj = N$

A_i, $(i = 1, 2, \ldots r)$, பண்பைக் கொண்ட நபர்களின் மொத்த எண்ணிக்கையை (A_i) குறிக்கும், B_j, $(j = 1, 2, 3, \ldots c)$ பண்பைக் கொண்ட நபர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை (Bj) மற்றும் A_i, B_j $(i = 1, 2, \ldots r, \ j = 1, 2, \ldots c)$ இரு பண்புகளையும் கொண்ட மொத்த நபர்களின் எண்ணிக்கை $(A_i B_j)$ ஆகும்.

மேலும், $\Sigma A_i = \Sigma B_j = N$

A மற்றும் B என்ற இரு பண்புகள் சார்பற்றவை என்ற இல் எனும் எடுகோளின் கீழ் $(A_i B_j)$ - ன் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்ணானது $= \frac{(Ai)(Bj)}{N}$

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

ஆகவே பண்புகளின் சார்பற்ற தன்மை என்ற இல் எனும் எடுகோளின் கீழ் மேலே கண்ட அட்டவணையின் ஒவ்வொரு கட்ட அலைவெண்களின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களை கீழே உள்ள சூத்திரத்தின் மூலம் கணக்கிடலாம்.

$$\chi_0^2 = \Sigma\left(\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}\right)$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$\chi_e^2 = \Sigma\left(\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}\right)$ ஆனது (r–1) (c–1) வரையற்ற பாகைகள் χ^2 பரவலைத் தழுவும்.

முடிவு:

χ_0^2 உடன் χ_e^2 -ஐக் குறிப்பிட்ட சிறப்பு காண்மட்டத்தின் கீழ் ஒப்பிட்டு நாம் இல் எனும் எடுகோளை ஏற்கவோ அல்லது மறுக்கவோ செய்யலாம்.

6.6.1 2×2 நேர்வு அட்டவணை :

பண்புகளின் சார்பற்ற தன்மைக்கான இல் எனும் எடுகோளின் கீழ் கீழ்க்கண்ட அட்டவணைக்கான χ^2 -ன் மதிப்பு

$$\chi_0^2 = \frac{N(ad - bc)^2}{(a + c)(b + d)(a + b)(c + d)}$$

2×2 நேர்வு அட்டவணை

			மொத்தம்
	a	b	a + b
	c	d	c + d
மொத்தம்	a + c	b + d	N

6.6.2 ஏட்சின் திருத்தம்:

ஒரு 2×2 நேர்வுப் பட்டியலில் வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை (2–1)(2–1)=1 ஆகும். ஏதாவது ஒரு கட்டத்தில் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் ஐந்தை விட குறைவாக இருப்பின் அந்த அலைவெண்ணை மற்றொரு கட்டத்தின் அலைவெண்ணோடு

கூட்டி எழுதுவதன் மூலம் வரையற்ற பாகையின் எண்ணிக்கை 0 ஆகிவிடுகிறது. இது பொருளற்றதாகும்.

இந்நிலையில் F. ஏட்ஸ் (1934) என்பவரால் கொடுக்கப்பட்ட 'தொடர்ச்சிக்கான ஏட்சின் திருத்தத்தை' நாம் பயன்படுத்துகிறோம். இம்முறைப்படி 5 ஐ விட குறைவான கட்ட அலைவெண்ணோடு 0.5 க் கூட்டி மற்ற அலைவெண்களைச் சரிசெய்கிறோம். இவ்விதம் திருத்தப்பட்ட χ^2 ன் மதிப்பு.

$$\chi^2 = \frac{N\left[(a \mp \frac{1}{2})(d \mp \frac{1}{2}) - (b \pm \frac{1}{2})(c \pm \frac{1}{2})\right]^2}{(a + c)(b + d)(a + b)(c + d)}$$

எடுத்துக்காட்டு 9:

ஒரு கல்லூரியில் பயிலும் 1000 மாணவர்கள், அவர்களின் நுண்ணறிவு மற்றும் வீட்டின் பொருளாதார நிலையை வைத்து தரம் பிரிக்கப்படுகின்றனர். χ^2 சோதனையைப் பயன்படுத்தி வீட்டின் பொருளாதார நிலைக்கும் நுண்ணறிவிற்கும் தொடர்பு இருக்கிறதா எனக் காண்க.

பொருளாதார நிலை	நுண்ணறிவு		மொத்தம்
	அதிகம்	குறைவு	
பணக்காரர்	460	140	600
ஏழை	240	160	400
மொத்தம்	700	300	1000

தீர்வு:

இல் என்னும் எடுகோள்:

வீட்டின் பொருளாதார நிலைக்கும், நுண்ணறிவிற்கும் தொடர்பு இல்லை. அதாவது அவை சார்பற்றவை.

$$E_{11} = \frac{(A)(B)}{N}$$

$$= \frac{600 \times 700}{1000}$$
$$= 420$$

எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களின் அட்டவணை கீழ்கண்டவாறு.

			மொத்தம்
	420	180	600
	280	120	400
மொத்தம்	700	300	1000

கண்டறிந்த அலைவெண் O	எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் E	$(O-E)^2$	$\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right)$
460	420	1600	3.81
240	280	1600	5.714
140	180	1600	8.889
160	120	1600	13.333
			31.746

$$\chi_o^2 = \Sigma\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right) = 31.746$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$\chi_e^2 = \Sigma\left(\frac{(O-E)^2}{E}\right)$ ஆனது $(2-1)(2-1) = 1$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட χ^2 பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 3.84$

முடிவு:

இங்கு $\chi_o^2 > \chi_e^2$ என்பதால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. அதாவது வீட்டின் பொருளாதார நிலைக்கும் நுண்ணறிவிற்கும் தொடர்பு உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 10:

ஒரு கிராமத்தில் 120 பேரை மாதிரியாக எடுத்துக் கொண்டு அவர்களில் 76 பேருக்கு ∴ப்ளு காய்ச்சலை தடுப்பதற்கான புதிய

மருந்து கொடுத்தார்கள், அவர்களில் 24 பேரை அந்த காய்ச்சல் தாக்கியது. தடுப்பு மருந்து கொடுக்காதவர்களில் 12 பேருக்கு அந்த காய்ச்சல் வரவில்லை.

1. கண்டறியப்பட்ட அலைவெண்களின் 2 x 2 அட்டவணையைத் தயார் செய்க.
2. புதிய மருந்து பயனளித்ததா இல்லையா என்பதை கண்டுபிடிக்க கை வர்க்க சோதனையைப் பயன்படுத்துக.

தீர்வு:

மேலே கொடுக்கப்பட்ட விவரம் 2x2 நேர்வு அட்டவணையில் கீழே அளிக்கப்படுகிறது.

கண்டறியப்பட்ட அலைவெண்களின் அட்டவணை

புதிய மருந்து	ப்ளு காய்ச்சலின் விளைவு		மொத்தம்
	காய்ச்சல் தாக்கியவர்	காய்ச்சல் தாக்காதவர்	
கொடுக்கப் பட்டவர்கள்	24	76 – 24 = 52	76
கொடுக்கப் படாதவர்கள்	44 – 12 = 32	12	120 – 76 = 44
மொத்தம்	120 – 64 = 56 24 + 32 = 56	52 + 12 = 64	120

இல் என்னும் எடுகோள்:

∴ப்ளு காய்ச்சலும், புதிய மருந்து கொடுத்தலும் சார்பற்றவை.

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க.

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

$$\chi_o^2 = \frac{N(ad-bc)^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}$$
$$= \frac{120(24\times 12 - 52\times 32)^2}{56\times 64\times 76\times 44}$$
$$= \frac{120(-1376)^2}{56\times 64\times 76\times 44} = \frac{120(1376)^2}{56\times 64\times 76\times 44}$$

$= \text{Antilog}\ [\log 120 + 2\log 1376 - (\log 56 + \log 64 + \log 76 + \log 44)]$

$= \text{Antilog}\ (1.2777) = 18.95$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$\chi_e^2 = \Sigma\left(\frac{(O - E)^2}{E}\right)$ ஆனது $(2-1)(2-1)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட χ^2 பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 3.84$

முடிவு:

இங்கு $\chi_o^2 > \chi_e^2$ என்பதால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் மறுக்கப்படுகிறது. எனவே புதிய மருந்து ஃப்ளு காய்ச்சலைக் கட்டுப்படுத்துகிறது என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 11:

இரண்டு ஆராய்ச்சியாளர்கள் வெவ்வேறு வகையான மாதிரிக்கணிப்பு முறைகளை பயன்படுத்தி ஒரே குழுவில் உள்ள மாணவர்களின் வெவ்வேறு நுண்ணறிவு மட்ட அளவுகளைக் கண்டு பிடித்தனர். அதன் முடிவுகள் கீழ்க்கண்டவாறு.

ஆராய்ச்சி யாளர்கள்	மாணவர்கள் எண்ணிக்கை				மொத்தம்
	சராசரிக் கும் கீழே	சராசரி	சராசரி க்கும் மேலே	மிக்க அறிவுத் திறன்	
X	86	60	44	10	200
Y	40	33	25	2	100
மொத்தம்	126	93	69	12	300

இரு ஆராய்ச்சியாளர்கள் கையாண்ட மாதிரிக் கணிப்பு முறைகள் சார்பற்றவை.

தீர்வு:

இல் என்னும் எடுகோள்:

இரு ஆராய்ச்சியாளர்கள் மேற்கொண்ட மாதிரிக்கணிப்பு முறைகள் சார்பற்றவை

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

$$E(86) = \frac{126 \times 200}{300} = 84$$

$$E(60) = \frac{93 \times 200}{300} = 62$$

$$E(44) = \frac{69 \times 200}{300} = 46$$

எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்கள் அட்டவணை.

	சராசரிக் கும் கீழே	சராசரி	சராசரிக்கும் மேலே	மிக்க அறிவுத் திறன்	மொத்தம்
X	84	62	46	200–192 = 8	200
Y	126 – 84 = 42	93– 62 = 31	69 – 46 = 23	12 – 8 = 4	100
மொத்தம்	126	93	69	12	300

கை வர்க்க புள்ளியியல் அளவைக் கணக்கிடல்

கண்டறியப் பட்ட அலைவெண் O	எதிர்பார்க்கப் படும் அலைவெண் E	$(O - E)$	$(O - E)^2$	$\left(\frac{(O - E)^2}{E}\right)$
86	84	2	4	0.048
60	62	–2	4	0.064
44	46	– 2	4	0.087
10	8	2	4	0.500
40	42	–2	4	0.095
33	31	2	4	0.129
$\begin{bmatrix}25\\2\end{bmatrix}$ 27	$\begin{bmatrix}23\\4\end{bmatrix}$ 27	0	0	0
				0.923

$$\chi_o^2 = \Sigma\left(\frac{(O - E)^2}{E}\right) = 0.923$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$\chi_e^2 = \Sigma\left(\frac{(O - E)^2}{E}\right)$ ஆனது $(4-1)(2-1) = 3 - 1 = 2$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட χ^2 பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 5.991$

முடிவு:

இங்கு $\chi_o^2 < \chi_e^2$ ஆகையால் , 5% சிறப்புக் காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் ஏற்கப்படுகிறது. எனவே இரு ஆராய்ச்சியாளர்கள் மேற்கொண்ட மாதிரிக் கணிப்பு முறைகள் சார்பற்றவை.

6.7 முழுமைத்தொகுதி மாறுபாட்டிற்கான சோதனை :

கொடுக்கப்பட்ட இயல்நிலை முழுமைத்தொகுதி ஒரு குறிப்பிட்ட மாறுபாடு $\sigma^2 = \sigma_0^2$ ஐக் கொண்டுள்ளது எனச் சோதனை செய்ய விரும்பினால்

இல் என்னும் எடுகோள்:

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 5\,\%$ அல்லது $1\,\%$

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

$$\chi_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} = \frac{ns^2}{\sigma_0^2}$$

இங்கு $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$\chi_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2}$ ஆனது $(n-1)$ வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட χ^2 பரவலைத் தழுவுகிறது.

முடிவு:

$\chi_o^2 \leq \chi_e^2$ எனில் இல் எனும் எடுகோளை ஏற்கிறோம் மாறாக $\chi_o^2 > \chi_e^2$ எனில் நாம் இல் எனும் எடுகோளை மறுக்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 12:

மாதிரியின் திட்டவிலக்கம் 6 என கொண்டுள்ள 20 எண்ணிக்கை உடைய ஒரு சமவாய்ப்பு மாதிரி ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படுகிறது. அந்த முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் 9 என்பதைச் சோதனை செய்க.

தீர்வு:

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$n = 20$ மற்றும் $s = 6$

இல் என்னும் எடுகோள்:

H_0 : முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் $\sigma = 9$.

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 5\,\%$ என்க

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0 - ன் கீழ், புள்ளியியல் சோதனை அளவையானது

$$\chi_o^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{20 \times 36}{9 \times 9} = 8.89$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$\chi_e^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2}$ ஆனது $(20 - 1 = 19)$ வரையற்றபாகைகள் கொண்ட χ^2 -பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 30.144$

முடிவு:

இங்கு $\chi_o^2 < \chi_e^2$ என்பதால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் ஏற்கப்படுகிறது. அதனால் முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் 9 என முடிவெடுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 13:

10 மாணவர்களின் எடை (கி.கில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

38, 40, 45, 53, 47, 43, 55, 48, 52 மற்றும் 49.

மேற்கண்ட மாதிரி எடுக்கப்பட்ட அனைத்து மாணவர்களின் எடைகளின் பரவலின் மாறுபாடு 20 கி.கி எனச் சொல்லலாமா?

தீர்வு:

இல் என்னும் எடுகோள்:

$H_0 : \sigma^2 = 20$ அதாவது அனைத்து மாணவர்களின் எடைகளின் பரவலின் மாறுபாடு 20 எனக் கொள்ளலாம்.

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க

மாதிரி வேறுபாடு கணக்கிடுதல்

ஏடை (கி.கி)	$x - \bar{x} = x - 47$	$(x - \bar{x})^2$
38	–9	81
40	–7	49
45	–2	4
53	6	36
47	0	0
43	–4	16
55	8	64
48	1	1
52	5	25
49	2	4
		280

மாதிரி கூட்டு சராசரியானது

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{470}{10} = 47$$

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$\chi_0^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{\sigma^2} = \frac{280}{20} = 14$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$\chi_e^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2}$ ஆனது $(10 - 1 = 9)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட χ^2 பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 16.919$

முடிவு:

இங்கு $\chi_0^2 < \chi_e^2$ ஆகையால், H_0 ஏற்கப்படுகிறது. எனவே முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள அனைத்து மாணவர்களின் எடைகளின் பரவலின் மாறுபாடு 20 கிகி என நாம் முடிவுக்கு வரலாம்

6.8 F - புள்ளியியல் அளவை: வரையறை

X என்பது ஒரு n_1 வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட χ^2-மாறி மற்றும் Y ஒரு சார்பற்ற n_2 வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட χ^2 மாறி.

பிறகு F-அளவையானது $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$

அதாவது F- அளவையானது இரண்டு சார்பற்ற கை வர்க்க மாறிகளை முறையே அதன் வரையற்ற பாகைகளால் வகுக்கக் கிடைக்கும் விகிதம் ஆகும். இந்த புள்ளியியல் அளவையானது ஸ்நெடகரின் (n_1, n_2) வரையற்ற பாகைகளைக் கொண்ட F-பரவலாகும்.

6.8.1 மாறுபாடுகளின் விகிதத்தை சோதித்தல்:

$x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_{n_1}$ என்ற n_1 எண்ணிக்கைகள் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்பு மாதிரியானது σ_1^2 என்ற மாறுபாடு கொண்ட முதல் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்தும், மற்றும் $y_1, y_2, y_3 \ldots y_{n_2}$ என்ற n_2 எண்ணிக்கைகள் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்பு மாதிரியானது, σ_2^2 என்ற மாறுபாடு கொண்ட இரண்டாவது முழுமைத் தொகுதியிலிருந்தும் எடுக்கப்படுகின்றன. இரு மாதிரிகளும் சார்பற்றவையாக உள்ளன என்பது தெளிவு.

இல் என்னும் எடுகோள்:

$H_0 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ அதாவது முழுமைத் தொகுதி மாறுபாடுகள் சமம்

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

H_0 -ன் கீழ், சோதனை புள்ளியியல் அளவையானது

$$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

இங்கு $S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum(x - \bar{x})^2 = \frac{n_1 s_1^2}{n_1 - 1}$

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum(y - \bar{y})^2 = \frac{n_2 s_2^2}{n_2 - 1}$$

F-விகிதத்தில் எப்போதும் பகுதியில் உள்ள எண் தொகுதி எண்ணை விட அதிகமாக இருக்கும்.

$$F = \frac{\text{பெரிய மாறுபாடு}}{\text{சிறிய மாறுபாடு}}$$

ν_1 - பெரிய மாறுபாடு உள்ள மாதிரியின் வரையற்ற பாகை

ν_2 - சிறிய மாறுபாடு உள்ள மாதிரியின் வரையற்ற பாகை

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$F_e = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ ஆனது $(\nu_1 = n_1 - 1, \nu_2 = n_2 - 1)$ வரையற்ற பாகைகள் கொண்ட F- பரவலைத் தழுவுகிறது.

முடிவு:

F-ன் கண்டறியப்பட்ட மதிப்பு (ν_1, ν_2)-விற்குரிய F அட்டவணை மதிப்போடு 5% அல்லது 1% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் ஒப்பிடப்படுகிறது. அதில் $F_0 > F_e$ எனில் H_0 மறுக்கப்படுகிறது. $F_0 < F_e$ எனில் H_0 ஏற்கப்பட்டு இரண்டு மாதிரிகளும் ஒரே மாறுபாடு உள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டன என்று முடிவெடுக்கப்படுகிறது. F- சோதனை மாறுபாட்டளவையின் விகிதமாக உள்ளதால் இதனை மாறுபாட்டு விகித சோதனை என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 14:

இரண்டு இயல் நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து இரண்டு சமவாய்ப்பு மாதிரிகள் எடுக்கப்பட்டன.

மாதிரி I: 20 16 26 27 22 23 18 24 19 25

மாதிரி II: 27 33 42 35 32 34 38 28 41 43 30 37

முழுமைத்தொகுதி மாறுபாட்டின் மதிப்பீடுகளைக் கண்டுபிடித்து. அந்த

இரண்டு முழுமைத் தொகுதிகளும் ஒரே மாறுபாடு கொண்டனவா என்பதை 5 % சிறப்பு காண் மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

தீர்வு:

இல் என்னும் எடுகோள்:

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ அதாவது இரண்டு முழுமைத் தொகுதிகளும் ஒரே மாறுபாட்டைக் கொண்டுள்ளன.

மாற்று எடுகோள்:

$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (இரு முனை)

தொகுதி மாறுபாடு கணக்கிடுதல்:

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum x_1}{n_1} = \frac{220}{10} = 22$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum x_2}{n_2} = \frac{420}{12} = 35$$

x_1	$x_1 - \bar{x}_1$	$(x_1 - \bar{x}_1)^2$	x_2	$x_2 - \bar{x}_2$	$(x_2 - \bar{x}_2)^2$
20	–2	4	27	–8	64
16	–6	36	33	–2	4
26	4	16	42	7	49
27	5	25	35	0	0
22	0	0	32	–3	9
23	1	1	34	–1	1
18	–4	16	38	3	9
24	2	4	28	–7	49
19	–3	9	41	6	36
25	3	9	43	8	64
220	**0**	**120**	30	–5	25
			37	2	4
			420	**0**	**314**

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 5\ \%$ என்க

F-புள்ளியியல் அளவை கீழ்க்காணும் விகிதமாக வரையறுக்கப்படுகிறது

$$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

இங்கு $S_1^2 = \frac{\sum(x_1 - \overline{x_1})^2}{n_1 - 1} = \frac{120}{9} = 13.33$

$$S_2^2 = \frac{\sum(x_2 - \overline{x_2})^2}{n_2 - 1} = \frac{314}{11} = 28.54$$

$S_2^2 > S_1^2$ எனவே, பகுதியில் பெரிய மாறுபாடும் தொகுதியில் சிறிய மாறுபாடும் பிரதியிட வேண்டும்.

$$\therefore F_0 = \frac{28.54}{13.33} = 2.14$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$F_e = \frac{S_2^2}{S_1^2}$ ஆனது ($\nu_1 = 12-1 = 11$; $\nu_2 = 10-1 = 9$) வரையற்றபாகைகள்

கொண்ட F- பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 3.10$

முடிவு:

இங்கு $F_0 < F_e$ ஆகையால், 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் இல் எனும் எடுகோள் ஏற்கப்படுகிறது. எனவே ஒரே மாறுபாடு உடைய முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து இரு மாதிரிகளும் எடுக்கப்பட்டன என முடிவெடுக்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 15:

A மற்றும் B என்ற இரு விவசாய நிலங்கள் சமமான சிறு பாத்திகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு அதில் கிடைக்கும் கோதுமையின் விளை பலன்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. நிலம் A ஐப்போல நிலம் B யிலும் ஒரே மாதிரி உரங்கள் பயன்படுத்தப்பட்டன.

	பாத்திகளின் எண்ணிக்கை	சராசரி விளைபலன்	மாறுபாடு
பகுதி A	8	60	50
பகுதி B	6	51	40

இரண்டு பகுதிகளின் மாறுபாடுகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததா என F சோதனையைப் பயன்படுத்தி கண்டு பிடிக்கவும்.

தீர்வு:

நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டவை

$n_1 = 8$ $n_2 = 6$ $\overline{x}_1 = 60$ $\overline{x}_2 = 51$ $s_1^2 = 50$ $s_2^2 = 40$

இல் என்னும் எடுகோள்:

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ அதாவது கோதுமையின் விளைபலன்களின் மாறுபாட்டு வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததல்ல.

மாற்று எடுகோள்:

H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (இரு முனை)

சிறப்பு காண் மட்டம்:

$\alpha = 0.05$ என்க

புள்ளியியல் அளவையைக் கணக்கிடுதல் :

$$S_1^2 = \frac{n_1 s_1^2}{n_1 - 1} = \frac{8 \times 50}{7} = 57.14$$

$$S_2^2 = \frac{n_2 s_2^2}{n_2 - 1} = \frac{6 \times 40}{5} = 48$$

$S_1^2 > S_2^2$, எனவே

$$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{57.14}{48} = 1.19$$

எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு:

$F_e = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ ஆனது ($\nu_1 = 8-1 = 7$ $\nu_2 = 6-1 = 5$) வரையற்ற பாகைகள்

கொண்ட F-பரவலைத் தழுவுகிறது.

$= 4.88$

முடிவு:

இங்கு $F_0 < F_e$ என்பதால், இல் எனும் எடுகோள் ஏற்கப்படுகிறது. அதாவது கோதுமையின் விளைபலன்களின் மாறுபாட்டின் வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததல்ல.

பயிற்சி 6

I. சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்:

1. ஸ்டுடண்ட் t- பரவலின் முன்னோடி

அ) கார்ல் பியர்ஸன் ஆ) லாப்லாஸ்

இ) R.A. பிக்ஷர் ஈ) வில்லியம். S. காஸெட்

2. t- பரவலின் வீச்சு

அ) $-\infty$ இல் இருந்து 0 ஆ) 0 இல் இருந்து ∞

இ) $-\infty$ இல் இருந்து ∞ ஈ) 0 இல் இருந்து 1

3. சிறு கூறுகளில் இரு சராசரிகளுக்கிடையிலான வேறுபாடு இவ்வாய்பாட்டால் சோதிக்கப்படுகிறது

அ) $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s}$ ஆ) $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s}\sqrt{\dfrac{n_1+n_2}{n_1+n_2}}$

இ) $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s}\sqrt{\dfrac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}$ ஈ) $t = \sqrt{\dfrac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}$

4. இரு சிறு கூறுகளின் சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாட்டிற்கான சிறப்பு சோதனையின் போது வரையற்ற பாகைகளின் எண்ணிக்கை

அ) $n_1 + n_2$ ஆ) $n_1 + n_2 - 1$

இ) $n_1 + n_2 - 2$ ஈ) $n_1 + n_2 + 2$

5. கண்டறியப்பட்ட இரு கூறுகளுக்கு இணைக்கப்பட்ட t-சோதனையை பயன்படுத்தும் பொழுது அவை __________ இருக்கும்.

அ) இணையாக ஆ) ஒட்டுறவாக

இ) உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைக்கு சமமாக

ஈ) இவை அனைத்துமாக.

6. 9 இணை மதிப்புகளின் மதிப்புகளின் சராசரிகளுக்கிடையிலான வித்தியாசம் 15 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 5.0 எனில் சோதனை அளவை t-ன் மதிப்பு

அ) 27 ஆ) 9 இ) 3 ஈ) 0

7. கண்டறியப்பட்ட மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்புகள் முழுவதும் சமம் எனில் χ^2 ன் மதிப்பு

அ) -1 ஆ) $+1$ இ) ஒன்றைவிட அதிகம் ஈ) 0

8. $\nu = 2$ எனில் $\chi^2_{0.05}$ ன் மதிப்பு

அ) 5.9 ஆ) 5.99 இ) 5.55 ஈ) 5.95

9. கணக்கீடு செய்யப்பட்ட χ^2 - ன் மதிப்பு

அ) எப்பொழுதும் மிகை எண் ஆ) எப்பொழுதும் குறை எண்

இ) மிகை அல்லது குறை எண் ஈ) இவற்றில் எதுவும் இல்லை.

10. கட்ட அலைவெண் ________ இருக்கும் போது ஏட்சின் திருத்தம் பயன்படுகிறது.

அ) 5 ஆ) < 5 இ) 1 ஈ) 4

11. χ^2 சோதனையைக் கண்டுபிடித்தவர்

அ) R.A. பிக்ஷர் ஆ) காஸ் இ) கார்ல் பியர்சன் ஈ) லேப்லாஸ்

12. கைவர்க்க சோதனையில் 4x3 தேர்வுப்பட்டியலின் வரையற்ற பாகை

அ) 12 ஆ) 9 இ) 8 ஈ) 6

13. F- அளவையில் வழக்கமாக பெரிய மாறுபாடு ______ல் இருக்கும்

அ) தொகுதியில் ஆ) பகுதியில்

இ) இரண்டிலும் ஈ) இவை எதுவுமில்லை

14. $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ என்ற சோதனை புள்ளியியல் அளவை ______________ ஐ சோதனை செய்யப் பயன்படுகிறது.

அ) $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ஆ) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

இ) $H_0: \sigma_1 = \sigma$ ஈ) $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$

15. F-அளவையின் கீழ் முழுமைத்தொகுதி சராசரிக்கும் மாதிரி சராசரிக்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசத்தை சோதனையிட உதவும் மாதிரி சராசரியின் திட்டப்பிழை

அ) $\dfrac{\sigma^2}{\sqrt{n}}$ ஆ) $\dfrac{s}{\sqrt{n}}$ இ) $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ஈ) $\dfrac{s}{n}$

II கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக:

16. t- சோதனையில் முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் ________

17. t-மதிப்புகள் ________________இடையில் இருக்கும்

18. இணைக்கப்பட்ட t-சோதனை மாதிரி எண்ணிக்கைகள் ________ ஆக இருக்கும்போது பயன்படுத்தப்படும்.

19. ஸ்டுடண்ட்டின் t-சோதனையை மாதிரிகள் ________ ஆக இருக்கும் போது பயன்படுத்தலாம்.

20. χ^2 புள்ளியியல் அளவையின் மதிப்பு ________ மற்றும் ________ அலைவெண்களின் வித்தியாசங்களுக்கு மத்தியில் அமையும்.

21. χ^2 ன் மதிப்பு ________ -க்கும் ________ -க்கும் இடையில் அமையும்.

22. இரண்டு முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டின் சமத்துவம் ________-ன் மூலம் சோதனை செய்யப்படும்.

23. χ^2 சோதனையானது எளிமையாகவும் அதிக அளவில் பயன்படக் கூடியதுமான ______ சோதனை.

24. கண்டறியப்பட்ட மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்களின் முரண்பாடு அதிகப்படின் χ^2 ன் மதிப்பும் _______

25. சார்பு அட்டவணையில் ν= ________

26. χ^2 ன் பரவல் ________ ஐச் சார்ந்து இருக்கும்

27. χ^2 பரவலின் மாறுபாட்டு அளவை வரையற்ற பாகையின் ________ மடங்காக இருக்கும்

28. χ^2 சோதனையின் ஒரு நிபந்தனையானது, எந்த கட்ட அலைவெண்ணும் ________ ஆக இருக்கக் கூடாது

29. 3×2 சார்பு அட்டவணையில் ________ கட்டங்கள் உள்ளன.

30. F- சோதனை ________ விகித சோதனை எனப்படும்.

III. கீழ்கண்ட வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும்

31. ஸ்டுடண்ட்டின் t-புள்ளியியல் மாறியை வரையறை செய்க.

32. ஸ்டுடண்ட்டின் t-சோதனை கோட்பாடுகளை எழுதுக.

33. t-பரவலின் பண்புகளைக் குறிப்பிடுக.

34. t-பரவலின் பயன்பாடுகள் யாவை?

35. சிறு கூறுகளின் சராசரியின் சிறப்பு காண் சோதனையின் வழிமுறைகளை விளக்குக.

36. இணைக்கப்பட்ட t- சோதனையிலிருந்து நீவீர் அறிவதென்ன? அவற்றின் கோட்பாடுகள் யாவை?

37. இணைக்கப்பட்ட t-சோதனையின் சோதனை வழிமுறைகளை விளக்குக.

38. கை வர்க்க சோதனையை வரையறு.

39. கை வர்க்கப் பரவலை வரையறு

40. χ^2 சோதனையின் பொருத்ததுதலின் செம்மை என்றால் என்ன?

41. χ^2 சோதனையை பயன்படுத்தும் போது கவனத்தில் கொள்ள வேண்டியவை எவை?

42. ஏட்சின் திருத்தம் - ஒரு சிறு குறிப்பு வரைக.

43. வரையற்ற பாகைகள் என்ற பதத்தை விளக்குக.

44.பண்பளவை சாரா சோதனையை வரையறுக்கவும்

45. முழுமைத்தொகுதி மாறுபாட்டிற்கான χ^2 சோதனையை வரையறுக்கவும்.

46. ஒரு தொகுதியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப் பட்ட பூத்தண்டுகளின் உயரங்கள் (செ.மீ ல்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

63, 63, 66, 67, 68, 69, 70, 70, 71 மற்றும் 71 தொகுதியின் சராசரி உயரம் 66 செ.மீ இருக்க முடியுமா என ஆராய்க.

47. ஒரு இயந்திரம் சராசரியாக 0.025 செ.மீ பருமன் உள்ள மின்சாரப் பொருளுக்குப் பயன்படுத்தும் மின்கடத்தா வாஷர்களை வடிவமைத்து உற்பத்தி செய்கிறது. ஒரு சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்ட 10 மாதிரி வாஷர்களின் சராசரி பருமன் 0.024 செ.மீ மற்றும் அதன் திட்ட விலக்கம் 0.002 செ.மீ. சராசரிக்கான சிறப்புக் காண் சோதனை செய்க.

48. முறையே 5 மற்றும் 7 நோயாளிகளின் எடையைக் குறைக்க இரண்டு வகை மருந்துகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. A வகை மருந்து வெளிநாட்டில் தயாரிக்கப்பட்டது. B வகை மருந்து நமது நாட்டில் தயாரிக்கப்பட்டது. ஆறு மாதங்கள் அந்த மருந்தை உட்கொண்டதில் அவர்களின் எடையில் ஏற்பட்ட குறைவு பின்வருமாறு.

மருந்து	A :	10	12	13	11	14		
மருந்து	B :	8	9	12	14	15	10	9

இரண்டு மருந்துகளின் எடையை குறைக்கும் விளைவுகளின் இடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததா? இல்லையா? என்பதை சோதனை செய்க.

49. ஒரு நாளில் இரண்டு இயந்திரங்கள் மூலம் உற்பத்தி செய்த பொருள்களின் சராசரி எண்ணிக்கை 200 மற்றும் 250. அதன் திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 20 மற்றும் 25 ஆகும். இந்த மதிப்புகள் 25 நாட்கள் உற்பத்தி செய்த குறிப்புகளின் அடிப்படையில் காணப்பட்டது. இரண்டு இயந்திரங்களும் ஒரே மாதிரி திறமை வாய்ந்தது என 1% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் முடிவு செய்யலாமா?

50. ஒரு குறிப்பிட்ட மருந்து 10 நோயாளிகளுக்குக் கொடுக்கப்பட்டதில் கீழ்கண்டவாறு இரத்த அழுத்தத்தில் மாறுதல் ஏற்பட்டது. 3, 6, −2, 4, −3, 4, 6, 0, 0, 2 இந்த மருந்து இரத்த அழுத்தத்தை மாற்ற வல்லது என நினைக்க வாய்ப்பு உள்ளதா?

51. சிறப்பு விற்பனை திட்டத்திற்கு முன்பும் பின்பும் எடுக்கப்பட்ட 6 கடைகளின் விற்பனை விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

கடைகள்:	A	B	C	D	E	F
திட்டத்திற்கு முன்பு :	53	28	31	48	50	42
திட்டத்திற்கு பிறகு :	58	29	30	55	56	45

சிறப்பு விற்பனை திட்டம் வெற்றி எனக் கணிக்கலாமா? 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

52. ஒவ்வொன்றும் 5 குழந்தைகளைக் கொண்ட 320 குடும்பங்களின் விவரம் பின்வருமாறு

ஆண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	5	4	3	2	1	0
பெண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	14	56	110	88	40	12

ஆண் மற்றும் பெண் குழந்தை பிறப்பதற்கு சமவாய்ப்பு உள்ளது என்று இவ்விவரத்திலிருந்து கூற இயலுமா?

53. ஒரு புத்தகத்தில் ஒரு பக்கத்தில் உள்ள பிழைகள் பின் வருமாறு

ஒரு பக்கத்தில் உள்ள பிழைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	மொத்தம்
பக்கங்களின் எண்ணிக்கை	211	90	19	5	0	325

பாய்சான் பரவலைப் பொருத்தி அதன் பொருத்துதலின் செம்மையைச் சோதனை செய்

54. 800 பேர்களில் 25 % பேர் படித்தவர்கள். இதில் 300 பேர் அவர்களின் மாவட்டத்திற்கும் அப்பால் பயணம் செய்தவர்கள். படித்தவர்களில் 40% பேர் பயணம் செய்யாதவர்கள். பயணத்திற்கும், படிப்பறிவிற்கும் ஏதேனும் தொடர்பு இருக்கிறதா என்று 5% சிறப்புக் காண் மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

55.

தந்தைகள்	புத்தி கூர்மை உடைய மகன்கள்	புத்தி கூர்மை அற்ற மகன்கள்	மொத்தம்
திறமை உடையவர்கள்	24	12	36
திறமை அற்றவர்கள்	32	32	64
மொத்தம்	56	44	100

இவ்விவரமானது திறமையுடைய தந்தைகளுக்கு புத்திசாலி மகன்கள் இருப்பார்கள் என்ற எடுகோளை உறுதிப்படுத்துமா என்று சோதனை செய்க.

56. ஒரு இயல்நிலை தொகுதியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்ட 10 மாதிரிகளின் மதிப்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

65 , 72, 68, 74, 77, 61,63, 69 , 73, 71

தொகுதி மாறுபாடு 32 என்ற எடுகோளை சோதனை செய்.

57. 15 எண்ணிக்கையுடைய ஒரு மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் 6.4 எனக் காட்டுகிறது. இயல் நிலை தொகுதியாக இருப்பின் அதன் திட்டவிலக்கம் 5 என்ற எடுகோள் சரி என ஒப்புக்கொள்ள முடியுமா?

58. 8 உறுப்புகளுள்ள ஒரு மாதிரி சராசரியிலிருந்து உறுப்புகளின் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 94.5 ஆகும். 10 உறுப்புகளுள்ள இன்னொரு மாதிரியில் இம்மதிப்பு 101.7 ஆகும் மாறுபாடுகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததா என்பதை 5% மட்டத்தில் சோதனை செய்க.

59. 9 மற்றும் 13 எண்ணிக்கை கொண்ட ஒரு மாதிரிகளின் திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 2 மற்றும் 1.8 ஆகும். இரு மாதிரிகளும் சம திட்ட விலக்கம் உள்ள இயல் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கருத முடியுமா?

60. இரு இயல் நிலைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்பு மாதிரிகளின் மதிப்புகள் பின்வருமாறு

A	66	67	75	76	82	84	88	90	92	–	-
B	64	66	74	78	82	85	87	92	93	95	97

இரு தொகுதிகளுக்கும் சம மாறுபாடு உள்ளதா என்பதை 5% சிறப்பு காண் மட்டத்தில் சோதிக்கவும்.

61. ஒரு மோட்டார் வண்டி தயாரிக்கும் நிறுவனம் ஒரு புதிய வகை காரை அறிமுகப்படுத்தியது. அந்த கார் குறிப்பிட்ட வயதுடையோர் அல்லது அனைத்து வயதினருக்கும் ஏற்புடையதா என்பதை அறிவதற்காக ஒரு விளம்பர முகாம் நடத்தியது. புதிய காரின் முன்னோட்டத்தில் கலந்து கொண்டவர்களிடையே மாதிரி எடுத்து கிடைத்த விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

	வயது				
	20 க்கும் கீழே	20-39	40-50	60 க்கும் மேல்	மொத்தம்
காரை விரும்புவர்கள்	146	78	48	28	300
காரை விரும்பாதவர்கள்	54	52	32	62	200
மொத்தம்	200	130	80	90	500

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரத்திலிருந்து நீவீர் என்ன முடிவு செய்வீர்?

விடைகள்:

I.

1. (ஈ) 2.(இ) 3. (இ) 4. (இ) 5. (ஈ)
6. (ஆ) 7. (ஈ) 8. (ஆ) 9. (அ) 10. (இ)
11. (இ) 12. (ஈ) 13. (ஆ) 14. (ஆ) 15. (ஆ)

II.

16. தெரியாது 17. $-\infty$ இல் இருந்து ∞
18. இணையாக 19 சிறியதாக

20. கண்டறியப்பட்ட, எதிர்பார்க்கப்பட்ட 21. 0, ∞
22. F-சோதனை 23. பண்பளவை சாரா 24. அதிகம்
25. (r–1) ((–1)) 26. வரையற்ற பாகை
27. இரு
28. 5 க்கும் குறைவாக 29. 6 30. மாறுபாட்டு

III.

46. t = 1.891 H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.
47. t = 1.5 H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.
48. t = 0.735 H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.
49. t = 7.65 H_0 மறுக்கப்படுகிறது.
50. t = 2, H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.
51. t = 2.58 H_0 மறுக்கப்படுகிறது.
52. $\chi^2 = 7.16$ H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.
53. $\chi^2 = 0.068$ H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.
54. $\chi^2 = 0.016$ H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.
55. $\chi^2 = 2.6$ H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.
56. $\chi^2 = 7.3156$ H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.
57. $\chi^2 = 24.58$ H_0 மறுக்கப்படுகிறது.
58. $\chi^2 = 24.576$ H_0 மறுக்கப்படுகிறது.
59. F = 1.41 H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.
60. F = 1.415 H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.
61. $\chi^2 = 7.82$, H_0 மறுக்கப்படுகிறது.

7. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு

7.0 அறிமுகம்:

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு என்பது சிறப்புச் சோதனைகளுக்கான ஒரு பலம் வாய்ந்த புள்ளியியல் கருவியாகும். மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு என்ற பதம் பேரா..ஃபிஷரால் விவசாயத் துறை ஆய்வுப் பணிகளை கையாள்வதற்காக அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது. t – பரவலைச் சார்ந்த சிறப்புச் சோதனையானது இரண்டு மாதிரி சராசரிகளின் வித்தியாசங்களின் சிறப்பை சோதனை செய்வதற்கு மட்டுமே பயன்படுத்துவதற்கு ஏதுவான வழி முறையாகும். ஒரே நேரத்தில் மூன்று அல்லது அதற்கு அதிகமான மாதிரிகளை கையாளக் கூடிய தருணத்தில் எல்லா மாதிரிகளும் ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்டனவா அதாவது எல்லா மாதிரிகளும் ஒரே சராசரியை பெற்றனவா என்ற எடுகோள் சோதனை செய்வதற்கு நமக்கு வேறொரு வழி முறை தேவைப்படுகிறது. உதாரணமாக நான்கு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்ட நிலத்தில் ஒவ்வொரு பகுதியிலும் ஐந்து வகை உரங்களை பயன்படுத்தி பயிரிடப்பட்ட கோதுமையின் விளைச்சல் (ஒவ்வொரு பகுதி நிலத்திலும்) கொடுக்கப்பட்டால் நமது நோக்கமானது கோதுமையின் விளைச்சலில் இந்த ஐந்து வகை உரங்களின் விளைவுகள் சிறப்பான வித்தியாசமுடையனவா அல்லது இந்த மாதிரிகள் ஒரே இயல்நிலை பரவலிலிருந்து பெறப்பட்டவையா என்பதை அறிவதே ஆகும். இதற்கான பதிலை நமக்கு மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு முறை அளிக்கிறது. ஆகவே மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வின் அடிப்படை நோக்கமானது பல சராசரிகளின் சீரான்மையை சோதனை செய்வதாகும்.

கண்டறிந்த மதிப்புகள் வேறுபட்டு அமைவதென்பது இயல்பான தொன்றாகும். ஒரு எண் விவர மதிப்புகளின் தொகுதியின் மொத்த மாறுபாட்டைப் பல காரணிகள் ஏற்படுத்தியிருக்க கூடும். அவற்றைக் கீழ்க்கண்டவாறு பாகுபாடு செய்யலாம்.

(i) குறிப்பிடத் தக்க காரணங்களால் ஏற்படுபவை

(ii) இயல்பான வேறுபாட்டால் ஏற்படுபவை

குறிப்பிடத் தக்க காரணங்களால் ஏற்படும் மாறுபாடுகள் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு அவற்றை அளவிட முடியும். ஆனால் இயல்பான வேறுபாட்டால் ஏற்படும் மாறுபாடுகளை தனியாகப் பிரித்தெடுப்பது என்பது மனித முயற்சிக்கு அப்பாற்பட்டது.

7.1 வரையறை:

ஃபிஷரின் கூற்றுப்படி மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வானது ஒரு குழு (Group) காரணங்களைச் சார்ந்த மாறுபாடுகளை மற்ற குழு காரணங்களைச் சார்ந்த மாறுபாடுகளினின்று பிரித்தெடுக்கும் முறையாகும். மாதிரி விவரங்களின் மொத்த மாறுபாட்டை எதிர்மறை அல்லாத பிரிவுகளின் தொகுப்பாக வெளிப்படுத்துதல் இம்முறையில் சாத்தியமாகும்.

இங்கு ஒவ்வொரு பிரிவும் ஒரு குறிப்பிட்ட சார்பில்லா தோற்றுவாய் அல்லது காரணி அல்லது காரணத்தால் ஏற்படும் மாறுபாடுகளின் அளவீட்டளவாகும்.

7.2 அனுமானங்கள்:

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வில் F – சோதனையின் ஏற்புடைமைக்கு கீழ்க்கண்ட அனுமானங்களை செய்ய வேண்டும்.

(i) கண்டறிந்த விவரங்கள் யாவும் சார்பற்றவை

(ii) எடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்டவை மற்றும்

(iii) வேறுபட்ட நடத்து முறைகள் மற்றும் சுற்றுச் சூழல் விளைவுகள் யாவும் கூட்டுத் தன்மையை கொண்டுள்ளது.

7.3 ஒரு வழி பாகுபாடு:

x என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் N கண்டறிந்த மதிப்புகள் x_{ij} , (i = 1, 2, ... k ; j = 1,2....n_i) ஐ முறையே $n_1, n_2, ...n_k$ ($N = \sum_{i=1}^{k} n_i$) அளவுகள் கொண்ட k வகுப்புகளாக வகைப் படுத்தபட்டு கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.

	சராசரி	மொத்தம்
x_{11} x_{12} ... x_1n_1	$\bar{x}_{1.}$	$T_{1.}$
x_{21} x_{22} ... x_2n_2	$\bar{x}_{2.}$	$T_{2.}$
. . .	.	.
x_{i1} x_{i2} ... x_in_i	$\bar{x}_{i.}$	$T_{i.}$
. . .	.	.
x_{k1} x_{k2} ...... x_kn_k	$\bar{x}_{k.}$	$T_{k.}$
		G

கண்டறிந்த மதிப்புகள் x_{ij} ன் மொத்த மாறுபாட்டளவை கீழ்க்கண்ட இரண்டு பிரிவுகளாக பிரிக்கப்படுகின்றன.

(i) வகுப்புகளின் இடையே உள்ள மாறுபாடு அல்லது வேறுபட்ட அடிப்படைகள் கொண்ட பாகுபாடுகளால் உண்டாகும் மாறுபாடு. அவை பொதுவாக நடத்து முறைகள் என அறியப்படும்.

(ii) வகுப்புகளுக்குள்ளேயே இருக்கும் மாறுபாடு அதாவது ஒரு வகுப்பின் கண்டறிந்த மதிப்புகளுக்குள் இயற்கையாகவே உள்ளடங்கிய மாறுபாடுகள்

இதில் முதல் வகை மாறுபாடு ஆனது குறிப்பிடத்தக்க காரணங்களால் ஏற்படுபவை அவை மனித சக்தியால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு கட்டுப்படுத்தப்படும். இரண்டாம் வகை மாறுபாடு இயல்பான வேறுபாட்டால் ஏற்படுபவை . அவற்றை கட்டுபடுத்துதல் என்பது மனித முயற்சிக்கு அப்பாற்பட்டவை.

குறிப்பாக k வேறுபட்ட உணவுகள் அளிக்கப்படும் ஒரே இன N மாடுகள் k பிரிவுகளாக பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு பிரிவும் முறையே n_1, n_2 , …..n_k அளவுகள் உடையன என்றால் அவற்றின் பால் உற்பத்தியில் k வேறுபட்ட உணவுகளின் விளைவுகள் கணக்கில் கொள்ளப்படுகின்றன. இங்கு $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ எனவே, மாறுபாடுகளின் தோற்றுவாய்கள் ஆவன:

(i) வேறுபட்ட உணவுகளின் விளைவுகள்

(ii) பல்வகை காரணங்களால் உண்டாகும் இயல்பான வேறுபாடுகள் அவை அடையாளம் காணப்பட்டு கண்டறிய முடியாதவை.

7.4 சோதனை வழிமுறை:

பகுப்பாய்வைச் செய்வதற்கான பல்வேறு படிகள்

1.இல் எனும் எடுகோள்

முதல் படியானது இல் எனும் எடுகோளை அமைப்பதாகும்

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$

மாற்று எடுகோள் H_1: எல்லா μ_i களும் சமமல்ல. $(i = 1,2,\ldots,k)$

2. சிறப்பு காண் மட்டம் .

$\alpha = 0.05$ என்க

3.சோதனை புள்ளியியல் அளவை:

பல்வேறு வர்க்கங்களின் கூடுதல்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம்.

அ) கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் N உறுப்புகளின் மொத்தத்தைக் கண்டுபிடித்து அதனை G என்று குறிப்பிடுக. பிறகு

திருத்தக் காரணியானது $(C.F) = \dfrac{G^2}{N}$

ஆ) எல்லா தனித்த உறுப்புகள் (x_{ij}) இன் வர்க்கங்களின் கூடுதலை கண்டுபிடித்து பிறகு மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல் (TSS) ஆனது

$$TSS = \sum\sum x_{ij}^2 - \text{திருத்தக் காரணி}$$

இ) எல்லா வகுப்பு மொத்தங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் (அல்லது ஒவ்வொரு நடத்து முறை மொத்தத்தின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்) T_i (i:1,2,….k) கண்டுபிடித்து, பிறகு பிரிவுகளின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதல் அல்லது நடத்துமுறையின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதல் (SST) ஆனது

$$SST = \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - \text{திருத்தக் காரணி}$$

இங்கு n_i (i: 1,2,…..k) என்பன i ஆவது வகுப்பின் கண்டறிந்த விவரங்கள் அல்லது i ஆவது நடைமுறையை ஏற்கும் கண்டறிந்த விவரங்கள் ஆகும்.

ஈ) வகுப்புகளுக்குள்ளேயே உள்ள வர்க்கங்களின் கூடுதல் அல்லது பிழையால் உண்டாகும் வர்க்கங்களின் கூடுதலைக் (SSE) கழித்தலின் வழியாக காணவேண்டும்.

அதாவது $SSE = TSS - SST$

4. வரையற்ற பாகைகள் (d.f):

மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குரிய (TSS) வரையற்ற பாகைகள் (N-1) ஆகும். நடத்து முறைகளின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குரிய (SST) வரையற்ற பாகைகள் (k-1) ஆகும். மேலும் பிழையின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குரிய (SSE) வரையற்ற பாகைகள் (N-k) ஆகும்.

5. வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி:

நடத்து முறைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரியானது, $\frac{SST}{k-1}$ மேலும் பிழைகளுக்குரிய வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரியானது $\frac{SSE}{N-k}$

6. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு அட்டவணை:

மேற்கண்ட வர்க்கங்களின் கூடுதல்கள் அவற்றிற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் மற்றும் வர்க்கங்களின் கூடுதல்களின் சராசரிகள் ஆகியவை சுருக்கமாக கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

ஒரு வழி பாகுப்பாட்டிற்குரிய மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு அட்டவணை:

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங் களின் கூடுதல்	வர்க்கங் களின் கூடுதலின் சராசரி	F விகித மதிப்பு
நடத்து முறைகளின் இடையே	$K-1$	SST	$\frac{SST}{k-1} = MST$	$\frac{MST}{MSE} = F_T$
பிழை	$N-k$	SSE	$\frac{SSE}{N-k} = MSE$	
மொத்தம்	$N-1$			

மாறுபாட்டு விகித கணக்கீடு:

F-இன் மாறுபாட்டு விகிதமானது அதிக மாறுபாட்டு அளவிற்கும் குறைந்த மாறுபாட்டளவிற்கும் இடையே உள்ள விகிதமாகும்.

$$F = \frac{\text{நடத்து முறைகளின் இடையே உள்ள மாறுபாடு}}{\text{நடத்து முறைகளுக்கு உள்ளே உள்ள மாறுபாடு}}$$

$$= \frac{MST}{MSE}$$

நடத்து முறைகளுக்குள்ளே இருக்கும் மாறுபாடு நடத்து முறைகளுக்கிடையே உள்ள மாறுபாட்டை விட அதிகமாக இருந்தால் பகுதி விகுதிகளை மாற்றிக் கொண்டு அவற்றின் வரையற்ற பாகைகளையும் ஏற்றவாறு மாற்றிக் கொள்ள வேண்டும்

7. F இன் தீர்மான மதிப்பு அல்லது F இன் அட்டவணை மதிப்பு:

F அட்டவணையிலிருந்து (k-1, N-k) வரையற்ற பாகைகளுக்குரிய 5% சிறப்பு காண் மட்ட அளவு F-ன் தீர்மான மதிப்பு அல்லது F-ன் அட்டவணை மதிப்பை பெறலாம்.

8. முடிவு:

கண்டுபிடிக்கப்பட்ட F-ன் மதிப்பு அட்டவணை F-ன் மதிப்பை விட குறைவாக இருந்தால் நாம் இல் எனும் எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்ளலாம். மேலும் நடத்து முறைகளின் இடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்தவை அல்ல என்று கூறலாம்.

கண்டுபிடிக்கப்பட்ட F-ன் மதிப்பு அட்டவணை F-ன் மதிப்பை விட அதிகமாக இருந்தால் நாம் இல் எனும் எடுகோளை H_0 நிராகரித்துவிடலாம். மேலும் நடத்து முறைகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்தது என்று கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

மூன்று செய்முறைகள் A, B மற்றும் C ஆகியவற்றின் வெளியீடுகள் சமானமானவையா என சோதனை செய்யப்படுகிறது. அவற்றின் வெளியீடுகளின் கண்டறிந்த மதிப்புகள் கீழே உள்ளன.

A	10	12	13	11	10	14	15	13
B	9	11	10	12	13			
C	11	10	15	14	12	13		

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வை நடத்தி முடிவுகளைக் கூறுக.

தீர்வு:

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வை நடத்திட கீழ்க்கண்ட அட்டவணைகளை அமைக்க வேண்டும்.

									மொத்தம்	வர்க்கங்கள்
A	10	12	13	11	10	14	15	13	98	9604
B	9	11	10	12	13				55	3025
C	11	10	15	14	12	13			75	5625
								G = 228		

வர்க்கங்கள்:

A	100	144	169	121	100	196	225	169
B	81	121	100	144	169			
C	121	100	225	196	144	169		
					மொத்தம் = 2794			

சோதனை வழிமுறை:

இல் எனும் எடுகோள்: $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

அதாவது மூன்று செய்முறைகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பானதல்ல.

மாற்று எடுகோள்: $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

சிறப்பு காண் மட்டம் .

$\alpha = 0.05$ என்க

சோதனை புள்ளியியல் அளவை:

திருத்தக் காரணி (c.f) $= \dfrac{G^2}{N}$

$$= \frac{228^2}{19}$$

$$= \frac{51984}{19} = 2736$$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல் (TSS) $= \Sigma\Sigma x_{ij}^2 - C.F$

$= 2794 - 2736$

$= 58$

செய்முறைகளுக்கான வர்க்கங்களின் கூடுதல் = (SST)

$$= \frac{\sum_{i=1}^{3} T_i.^2}{n_i} - C.F$$

$$= \frac{9604}{8} + \frac{3025}{5} + \frac{5625}{6} - 2736$$

$= (1200.5 + 605 + 937.5) - 2736$

$= 2743 - 2736$

$= 7$

பிழைக்கான வர்க்கங்களின் கூடுதல் (SSE) = TSS – SST

$= 58 - 7 = 51$

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு அட்டவணை:

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங் களின் கூடுதல்	வர்க்கங் களின் கூடுதலின் சராசரி	F விகித மதிப்பு F_0
செய் முறைகளுக்கு இடையே	3 – 1 = 2	7	$\frac{7}{2} = 3.50$	$\frac{3.5}{3.19} = 1.097$
பிழை	16	51	$\frac{51}{16} = 3.19$	
மொத்தம்	19 – 1 = 18			

அட்டவணை மதிப்பு:

(2,16) வரையற்ற பாகைகளுக்குரிய 5% சிறப்பு காண் மட்ட F அட்டவணை மதிப்பானது $F_e = 3.63$.

முடிவு:

கண்டுப்பிடிக்கபட்ட F_0 அட்டவணை மதிப்பு F_e ஐ விட குறைவாக உள்ளதால் இல் எனும் எடுகோளை ஏற்றுக் கொண்டு மூன்று செய்முறைகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததல்ல என்று கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

ஒரு நகரத்தில் மூன்று பள்ளிகளில் ஐந்தாம் வகுப்பு மாணவர்கள் ஐந்தைந்து பேரை சமவாய்ப்பாக தேர்ந்தெடுத்து ஒரு சோதனை தரப்படுகிறது. தனி நபர் எண்ணிக்கைகள் (Scores) ஆவன.

பள்ளி I	9	7	6	5	8
பள்ளி II	7	4	5	4	5
பள்ளி III	6	5	6	7	6

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வை நடத்துக.

தீர்வு:

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வை நடத்திட கீழ்க்கண்ட அட்டவணைகள் அமைக்க வேண்டும்.

						மொத்தம்	வர்க்கங்கள்
பள்ளி I	9	7	6	5	8	35	1225
பள்ளி II	7	4	5	4	5	25	625
பள்ளி III	6	5	6	7	6	30	900
					மொத்தம்	G=90	2750

வர்க்கங்கள்

பள்ளி I	81	49	36	25	64
பள்ளி II	49	16	25	16	25
பள்ளி III	36	25	36	49	36
				மொத்தம் = 568	

சோதனை வழிமுறை

இல் எனும் எடுகோள் : $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

அதாவது பள்ளிகளின் செயல் முறைகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததல்ல

மாற்று எடுகோள் : $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

சிறப்பு காண் மட்டம் : $\alpha = 0.05$ என்க

சோதனை புள்ளியியல் அளவை:

திருத்தக் காரணி (c.f) $= \dfrac{G^2}{N}$

$$= \frac{90^2}{15} = \frac{8100}{15} = 540$$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல் (TSS) $= \Sigma\Sigma x_{ij}^2 - C.F$

$$= 568 - 540 = 28$$

பள்ளிகளுக்கிடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதல் $= \dfrac{\Sigma Ti^2}{n_i} - C.F$

$$= \frac{2750}{5} - 540$$

$$= 550 - 540 = 10$$

பிழைக்கான வர்க்கங்களின் கூடுதல் (SSE) = TSS – SST

$$= 28 - 10 = 18$$

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு அட்டவணை:

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங் களின் கூடுதல்	வர்க்கங் களின் கூடுதலின் சராசரி	F விகித மதிப்பு F_0
பள்ளிகளுக்கு இடையே	3-1 = 2	10	$\frac{10}{2} = 5.0$	$\frac{5}{1.5} = 3.33$
பிழை	12	18	$\frac{18}{12} = 1.5$	
மொத்தம்	15 -1 = 14			

அட்டவணை மதிப்பு:

(2,12) வரையற்ற பாகைகளுக்குரிய 5% சிறப்பு மட்ட அளவு F-ன் அட்டவணை மதிப்பானது Fe = 3.8853

முடிவு:

கண்டுபிடிக்கப்பட்ட F_0, அட்டவணை மதிப்பு F_e ஐ விட குறைவாக உள்ளதால் நாம் இல் எனும் எடுகோளை ஏற்றுக்கொண்டு பள்ளிகளின் செயல்முறைகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததல்ல என்று கூறலாம்.

7.5 இரு வழி பாகுபாடு :

மாறிகளின் மதிப்புகள் x_{ij}. இரண்டு காரணிகளால் பாதிக்கப்படுகின்றன என்று நாம் கருத்தில் கொள்வோம். உதாரணமாக

பாலின் உற்பத்தி அளவு வேறுபட்ட நடத்து முறைகள் அதாவது உணவு வகை வித்தியாசங்களால் பாதிக்கப்படுதல், அதே வேளை வேறுபட்ட வகைகள் அதாவது மாடுகளின் இனங்களின் வித்தியாசங்களால் பாதிக்கப்படுதல். நாம் இப்பொழுது N மாடுகளை அவற்றின் இனங்களின் வகைகளை கொண்டு h வேறுபட்ட பிரிவுகளாகவும் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் K மாடுகள் உள்ளவாறும் பிரித்து பின்பு பாலின் உற்பத்தி மீது K நடத்து முறைகளின் விளைவுகளை (அதாவது ஒவ்வொரு பிரிவு மாடுகளுக்கும் வேறுபட்ட உணவு வகைகளை சமவாய்ப்பாக அளித்தல்) கருத்தில் கொள்வோம்.

பின்னிணைப்பு 'i' நடத்து முறைகளை (உணவு வகைகள்) குறிக்கின்றன என்றும், 'j' வகைகளை (மாடுகளின் இனங்கள்) குறிக்கின்றன என்றும் கொண்டால், நடத்து முறைகளை (உணவு வகைகள்) ஒப்புமை செய்வதற்குரிய $N = h \times k$ மாடுகளின் பால் உற்பத்தி விவரங்கள் x_{ij} (i:1,2, ...k; j:1,2....h)கீழே காட்டப் பட்டுள்ளன. பால் உற்பத்தி அளவுகள் மாறிகளின் மதிப்புகளாக கீழே உள்ள $k \times h$ இரு வழி அட்டவணையில் வெளிப்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

	சராசரிகள்	மொத்தம்
x_{11} x_{12} $x_{1j} \ldots x_{1h}$	$\overline{x}_{1\cdot}$	$T_{1.}$
x_{21} x_{22} $x_{2j} \ldots x_{2h}$	$\overline{x}_{2\cdot}$	$T_{2.}$
. . . .	.	.
x_{i1} x_{i2} $x_{ij} \ldots x_{ih}$	$\overline{x}_{i\cdot}$	$T_{i.}$
. . . .	.	.
x_{k1} x_{k2} $x_{kj} \ldots x_{kh}$	$\overline{x}_{k\cdot}$	$T_{k.}$
சராசரி $\overline{x}_{\cdot 1}$. $\overline{x}_{\cdot 2}$ ... $\overline{x}_{\cdot j}$ .... $\overline{x}_{\cdot h}$	$\overline{x}$	
மொத்தம் $T_{\cdot 1}$ $T_{\cdot 2}$. ..... $T_{\cdot j}$....$T_{\cdot h}$		G

கண்டுபிடிக்கப்பட்ட விவரங்கள் x_{ij} இன் மாறுபாட்டின் மொத்தம் கீழ்க்கண்ட மூன்று பிரிவுகளாக பிரிக்கப்படுகின்றன.

(i) நடத்து முறைகளுக்கு (உணவு வகை) இடையே காணப்படும் மாறுபாடுகள்

(ii) வகைகளுக்கு (மாடுகளின் இனம்) இடையே காணப்படும் மாறுபாடுகள்

(iii) நடத்துமுறை விவரங்களுள்ளேயும் மற்றும் இன வகை விவரங்களுக்குள்ளேயும் உள்ளடங்கிய மாறுபாடுகள்

முதல் இரு வகை மாறுபாடுகள் குறிப்பிடத் தக்க காரணங்களால் ஏற்படுபவை. அவை மனித சக்தியால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு கட்டுபடுத்தபடுவன. மூன்றாம் வகை மாறுபாடு இயல்பான வேறுபாட்டால் ஏற்படுபவை. அவை மனித முயற்சிக்கு அப்பாற்பட்டவை.

7.6 இரு வழி பகுப்பாய்விற்கான சோதனை வழி முறை:

பகுப்பாய்வை நடத்துவதற்கான படிகளாவன:

1.இல் எனும் எடுகோள்

முதற் படியானது இல் எனும் எடுகோளை அமைத்தல் ஆகும்.

$$H_o : \mu_{1.} = \mu_{2.} = \ldots \mu_{k.} = \mu$$
$$H_o : \mu_{.1} = \mu_{.2} = \ldots \mu_{.h} = \mu$$

அதாவது உணவு முறைகளின் (நடத்து முறைகளின்) இடையே உள்ள வேறுபாடுகள் சிறப்பானதல்ல மற்றும் வகைகளின் (மாடுகளின் இனங்கள்) இடையே உள்ள வேறுபாடுகள் சிறப்பானதல்ல.

2. சிறப்பு காண் மட்டம்: $\alpha = 0.05$

3.சோதனை புள்ளியியல் அளவை:

பல்வேறு வர்க்கங்களின் கூடுதல்களை கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம்.

அ) கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரங்களின் எல்லா மதிப்புகள் N $(h \times k)$ இன் மொத்தத்தையும் கண்டுபிடித்து அதை G என குறியிடுக

பிறகு திருத்த காரணி (C.F) $= \dfrac{G^2}{N}$

ஆ) எல்லா தனித்த மதிப்புக்கள் (x_{ij}) வர்க்கங்களின் கூடுதலைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

பிறகு மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல் (TSS)

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x^2_{ij} - C.F$$

இ) நடத்து முறைகளின் (உணவு முறைகள்) மொத்தங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் அதாவது $h \times k$ இரு வழி அட்டவணையின் நிரைகளின்(Rows) மொத்தங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலை காண்க. பிறகு நடத்து முறைகளுக்கிடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதல் அல்லது நிரைகளின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதலானது

$$SST = SSR = \sum_{i=1}^{k} \frac{Ti.^2}{h} - C.F$$

இங்கு h என்பது ஒவ்வொரு நிரையிலும் உள்ள கண்டுபிடிக்கப்பட்ட விவரங்கள் ஆகும்.

ஈ) வகைகளின் (மாடுகளின் இனங்கள்) மொத்தங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் அதாவது $h \times k$ இரு வழி அட்டவணையின் நிரல்களின் (Columns) மொத்தங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலை காண்க. பிறகு வகைகளின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதல் அல்லது நிரல்களின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதலானது

$$SSV = SSC = \frac{\sum_{j=1}^{k} T^2.j}{k} - C.F$$

இங்கு K என்பது ஒவ்வொரு நிரலிலும் உள்ள கண்டுபிடிக்கப்பட்ட விவரங்கள் ஆகும்.

உ) பிழைகளினால் உண்டாகும் வர்க்கங்களின் கூடுதலை கழித்தலின் வழியாக காணவேண்டும்.

அதாவது $SSE = TSS - SSR - SSC$

4. வரையற்ற பாகைகள்:

(i) மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $N\text{-}1 = h \times k - 1$ ஆகும்

(ii) நடத்து முறைகளின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குரிய வரையற்ற பாகைகள் (K-1) ஆகும்.

(iii) வகைகளின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குரிய வரையற்ற பாகைகள் (h-1) ஆகும்.

(iv) பிழைக்கான வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குரிய வரையற்ற பாகைகள் $(k-1)(h-1)$ ஆகும்.

5. வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை சராசரி:

(i) நடத்து முறைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி $(MST)\ \frac{SST}{k-1}$ ஆகும்

(ii) வகைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி $(MSV)\ \frac{SSV}{h-1}$ ஆகும்

(iii) பிழையின் வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி (MSE) $\frac{SSE}{(h-1)(k-1)}$ ஆகும்

6. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு அட்டவணை:

மேற்கண்ட வர்க்கங்களின் கூடுதல்கள், அவற்றிற்குரிய வரையற்ற பாகைகள் மற்றும் வர்க்கங்களின் கூடுதல்களின் சராசரிகள் ஆகியவை சுருக்கமாக கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

இருவழி பாகுபாட்டிற்குரிய மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங்களின் கூடுதல்	வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி	F விகித மதிப்பு F_0
நடத்து முறைகளின் இடையே	k-1	SST	MST	$\frac{MST}{MSE} = F_R$
வகைகளின் இடையே	h-1	SSV	MSV	$\frac{MSV}{MSE} = F_c$
பிழை	(h-1) (k-1)	SSE	MSE	
மொத்தம்	N-1			

7. F இன் தீர்மான மதிப்பு அல்லது F இன் அட்டவணை மதிப்பு:

(i) நடத்து முறைகளுக்கிடையேயான F-இன் தீர்மான மதிப்பு அல்லது அட்டவணை மதிப்பை F- அட்டவணையிலிருந்து [(k–1, (k–1) (h–1)]

வரையற்ற பாகைகளுக்கான 5% சிறப்பு காண் மட்ட அளவு மூலம் பெற வேண்டும்.

(ii) வகைகளுக்கிடையிலேயான F-ன் தீர்மான மதிப்பு அல்லது அட்டவணை மதிப்பை F- அட்டவணையிலிருந்து [(h–1), (k–1) (h–1)] வரையற்ற பாகைகளுக்கான 5% சிறப்புகாண் மட்ட அளவு மூலம் பெற வேண்டும்.

8. முடிவு:

(i) நடத்து முறைகளுக்கு இடையேயான கண்டுபிடிக்கப்பட்ட F_0 மதிப்பு, அட்டவணை மதிப்பு F_e ஐ விட குறைவாகவோ அல்லது அதிகமாகவோ இருந்தால் அதற்கேற்றவாறு H_0 ஐ ஏற்றுக் கொள்ளுதல் அல்லது நிராகரித்தல் செய்ய வேண்டும்.

(ii) வகைகளுக்கு இடையேயான கண்டுபிடிக்கப்பட்ட F_0 மதிப்பு அட்டவணை F_e ஐ விட குறைவாகவோ அல்லது அதிகமாகவோ இருந்தால் அதற்கேற்றவாறு H_o ஐ ஏற்றுக் கொள்ளுதல் அல்லது நிராகரித்தல் செய்ய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 3:

மூன்று வகை நிலக்கரிகள் அவற்றில் சாம்பல் கலந்துள்ள அளவிற்கான நான்கு வேதியியலாளர்களால் பகுப்பாய்வு செய்யப்பட்டு அவற்றின் அளவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

	வேதியியலாளர்கள்			
வகைகள்	1	2	3	4
A	8	5	5	7
B	7	6	4	4
C	3	6	5	4

பகுப்பாய்வை நடத்திடுக

தீர்வு:

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வை நடத்திட கீழ்க்கண்ட அட்டவணைகள் அமைப்போம்.

வேதியியலாளர்கள்						
வகைகள்	1	2	3	4	மொத்தம்	வர்க்கம்
A	8	5	5	7	25	625
B	7	6	4	4	21	441
C	3	6	5	4	18	324
மொத்தம்	18	17	14	15	**G = 64**	1390
வர்க்கம்	324	289	196	225	1034	

தனித்த உறுப்புகளின் வர்க்கங்கள்

	வேதியியலாளர்கள்			
வகைகள்	1	2	3	4
A	64	25	25	49
B	49	36	16	16
C	9	36	25	16

மொத்தம் = 366

சோதனை வழிமுறை

1.இல் எனும் எடுகோள்

$H_0 : \mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.} = \mu$

$H_0 : \mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3} = \mu_{.4} = \mu$

(i) வகைகள் (நிரைகள்) இடையே உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததல்ல.

(ii) வேதியியலாளர்களால் (நிரல்கள்) இடையே உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததல்ல.

மாற்று எடுகோள்

(i) எல்லா $\mu_{i.}$ - களும் சமமல்ல

(ii) எல்லா $\mu_{j.}$ - களும் சமமல்ல

2. சிறப்பு காண் மட்டம் $\alpha = 0.05$ என்க

3.சோதனை புள்ளியியல் அளவை:

திருத்த காரணி (c.f) $= \dfrac{G^2}{N} = \dfrac{G^2}{h \times k}$

$$= \frac{(64)^2}{3\times4} = \frac{(64)^2}{12}$$

$$= \frac{4096}{12} = 341.33$$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல் (TSS) = $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x^2_{ij} - C.F$

$$= 366 - 341.33 = 24.67$$

வகைகளின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$= \frac{\sum T_{i.}^2}{4} - C.F$$

$$= \frac{1390}{4} - 341.33 = 347.5 - 341.33 = 6.17$$

வேதியியலாளர்களின் இடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$= \frac{\sum T_{.j}^2}{3} - C.F$$

$$= \frac{1034}{3} \quad 341.33 = 344.67 - 341.33 = 3.34$$

பிழையான வர்க்கங்களின் கூடுதல் (SSE)

$$= TSS - SSR - SSC$$
$$= 24.67 - 6.17 - 3.34$$
$$= 24.67 - 9.51 = 15.16$$

மாறுபாட்டின் மூலம்	வரையற்ற பாகைகள்	வர்க்கங் களின் கூடுதல்	வர்க்கங் களின் கூடுதலின் சராசரி	F விகித மதிப்பு F_0
வகைகளுக் கிடையேயான	3 – 1 = 2	6.17	3.085	$\frac{3.085}{2.527} =$ 1.22
வேதியியலாளர் களுக்கிடையே	4 – 1 = 3	3.34	1.113	$\frac{2.527}{1.113} =$ 2.27
பிழை	6	15.16	2.527	
மொத்தம்	12–1 = 11			

அட்டவணை மதிப்பு

(i) 2,6 வரையற்ற பாகைகளுக்குரிய 5% சிறப்பு காண் மட்ட F அட்டவணை மதிப்பானது $F_e = 5.14$

(ii) (6,3) வரையற்ற பாகைகளுக்குரிய 5% சிறப்பு காண் மட்ட F அட்டவணை மதிப்பானது $F_e = 8.94$

முடிவு:

(i) கண்டுபிடிக்கப்பட்ட F_0 மதிப்பானது அட்டவணை மதிப்பு F_e – ஐ விட குறைவாக உள்ளதால் நாம் H_0 – ஐ ஏற்று கொண்டு வகைகளுக்கு இடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பானதல்ல என்று கூறலாம்.

(ii) கண்டுபிடிக்கப்பட்ட F_0 மதிப்பானது அட்டவணை மதிப்பு F_e ஐ விட குறைவாக உள்ளதால் நாம் H_0 ஐ ஏற்று கொண்டு வேதியியலாளர்களுக்கு இடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பானதல்ல என்று கூறலாம்.

பயிற்சி - 7

I. கீழ்கண்டவற்றுள் சரியான விடையை தேர்ந்தெடுக்கவும்:

1. பல இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதி சராசரிகளின் சமநிலையை அறிய செய்யப்படும் சோதனை
   அ) பார்ட்லெட் சோதனை
   ஆ) F சோதனை
   இ) χ^2 சோதனை
   ஈ) t சோதனை
2. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு முறைகளை விரிவுபடுத்தியவர்
   அ) S.D. பாய்சான்
   ஆ) கார்ல் - பியர்ஸன்
   இ) R.A. ∴பிஷர்
   ஈ) W.S. காசெட்
3. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு முறை தொடங்கப்பட்ட களமானது
   அ) விவசாயம்
   ஆ) தொழில்
   இ) உயிரியல்
   ஈ) மரபியல்

4. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்விற்குரிய அனுமானங்களில் ஒன்றான எடுக்கப்பட்ட கூறுகள் பெறப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியானது
அ) ஈருறப்பு
ஆ) பாய்சான்
இ) கை-வர்க்கம்
ஈ) இயல்நிலை
5. ஒரு வழி பாகுபாட்டில் மொத்த மாறுபாட்டின் பிரிவுகளின் எண்ணிக்கையானது
அ) இரண்டு பிரிவுகள்
ஆ) மூன்று பிரிவுகள்
இ) நான்கு பிரிவுகள்
ஈ) ஒரே ஒரு பிரிவு
6. N கண்டறிந்த மதிப்புகள் மற்றும் t நடத்து முறைகளும் கொண்ட ஒரு வழி பாகுபாட்டில் பிழைக்கான வரையற்ற பாகைகளானவை
அ) N–1 (ஆ) t –1 (இ) N – t (ஈ) Nt

7. t- நடத்து முறைகள் கொண்ட ஒரு வழி பாகுபாட்டில் நடத்து முறைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்கான சராசரியானது
(அ) SST/N–1
(ஆ) SST/ t–1
(இ) SST/N–t
(ஈ) SST/t
8. r நிரைகள் மற்றும் c நிரல்கள் கொண்ட இருவழி பாகுபாட்டில் பிழைக்கான வரையற்ற பாகைகளானவை
(அ) (rc) – 1
(ஆ) (r-1).c
(இ) (r-1) (c-1)
(ஈ) (c-1).r
9. இருவழி பாகுபாட்டில் மொத்த மாறுபாட்டிற்கு (TSS) சமமானது
(அ) SSR + SSC + SSE (ஆ) SSR – SSC + SSE
(இ) SSR + SSC – SSE (ஈ) SSR + SSC.
10. TSS, SSR மற்றும் SSC முறையே 90, 35, 25 கொண்ட இருவழி பாகுபாட்டில் SSE ஆனது
(அ) 50 (ஆ) 40 (இ) 30 (ஈ) 20

II. கோடிட்ட இடங்களை பூர்த்தி செய்க

11. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு முறையை விரிவுபடுத்தியவர் ________
12. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வின் அனுமானங்களில் ஒன்று கண்டறிந்த மதிப்புகள் ________
13. இருவழி பாகுபாட்டில் மொத்த மாறுபாடு ________ பிரிவுகளாக பிரிக்கப்படும்.
14. 30 கண்டறிந்த மதிப்புக்கள் மற்றும் 5 நடத்து முறைகளும் கொண்ட ஒரு வழி பாகுபாட்டில் SSE க்குரிய வரையற்ற பாகைகள் ________
15. TSS, SSC மற்றும் SSE முறையே 120, 54, மற்றும் 45 என்று உள்ள இரு வழி பாகுபாட்டில் SSR ஆனது ________

III. கீழ்க்கண்ட கேள்விகளுக்கு பதிலளிக்கவும்

16. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு என்றால் என்ன?
17. இரண்டு சராசரிகளுக்கு இடையேயான வித்தியாசத்திற்குரிய t - சோதனை மற்றும் மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு இவற்றை வேறுபடுத்திக் காட்டுக.
18. மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு முறையில் உள்ளடக்கிய அனுமானங்களை கூறு.
19. ஒரு வழி பாகுபாட்டின் கட்டமைப்பை விளக்குக
20. ஒரு வழி பாகுபாட்டிற்குரிய மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு அட்டவணையை எழுதுக.
21. ஒரு வழி பாகுபாடு மற்றும் இரு வழி பாகுபாடு இவற்றை வேறுபடுத்திக் காட்டுக.
22. இரு வழி பாகுபாட்டு விவரங்களின் கட்டமைப்பை விளக்குக.
23. ஒரு வழி பாகுபாட்டில் பல்வேறு வர்க்கங்களின் கூடுதல்களை அடையும் வழிமுறைகளை விளக்குக.
24. இரு வழி பாகுபாட்டிற்குரிய மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு அட்டவணையை எழுதுக.
25. இரு வழி பாகுபாட்டில் பல்வேறு வர்க்கங்களின் கூடுதல்களை அடையும் வழிமுறைகளை விளக்குக.
26. 5 பள்ளிகளில் எட்டாம் வகுப்பு படிக்கும் மாணவர்களில் சிலரை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுத்து அவர்களுக்கு ஒரு சோதனை அளிக்கப்படுகிறது. அதில் அவர்கள் எடுத்த எண்ணிக்கைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

I	II	III	IV	V
8	9	12	10	12
9	7	14	11	11
10	11	15	9	10
7	12	12	12	9
8	13	11	10	13

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வை நடத்தி உன்னுடைய முடிவுகளை கொடுக்கவும்

27. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்கள் 12 பிரிவு நிலங்களில் பயிரிடப்பட்ட A,B மற்றும் C வகை கோதுமையின் உற்பத்தி அளவை (கிலோ கிராமில்) குறிக்கின்றன.

A:	20	18	19		
B:	17	16	19	18	
C:	20	21	20	19	18

மூன்று வகை கோதுமை உற்பத்தி அளவில் ஏதாவது சிறப்பான வித்தியாசம் உள்ளதா?

28. A,B,C மற்றும் D என்ற நான்கு விவசாய நிலங்களில் ஒரு சிறப்பு வகை உரம் பயன்படுத்தப்பட்டது. ஒவ்வொரு நிலமும் நான்கு பிரிவுகளாக பிரிக்கப்பட்டு அவற்றின் மேல் உரம் இடப்படுகிறது. நான்கு நிலங்களின் விளைச்சல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. நிலங்களின் சராசரி விளைச்சலின் வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததா அல்லது சிறப்பு வாய்ந்ததில்லையா என்பதை கண்டறிக.

விளைச்சல்

A	B	C	D
8	9	3	3
12	4	8	7
1	7	2	8
9	1	5	2

29. நான்கு நகரங்களில் சில கடைகள் சமவாய்ப்பாக தெரிவு செய்யப்பட்டு அக்கடைகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் சில்லறை விலைகள் (ரூ. கிலோ கிராமுக்கு) கீழே உள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

	A	22	24	20	21
நகரங்கள்	B	20	19	21	22
	C	19	17	21	18
	D	20	22	21	22

நான்கு நகரங்களில் அப்பொருளின் விலையில் உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பானதா என்பதை சோதனை செய்ய கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரங்களை பகுப்பாய்வு செய்க

30. ஒரு பொடியின் மாதிரியில் ஈரப்பசையின் அளவை கண்டறிய ஒவ்வொரு நபரும் ஆறு அனுப்பபட்ட சரக்குகளின் மாதிரிகளை எடுத்து சோதனை செய்தனர். அவர்களின் மதிப்பீடுகளின் ஆவன.

அனுப்பபட்ட சரக்குகள்

சோதிப்பவர்	1	2	3	4	5	6
1	9	10	9	10	11	11
2	12	11	9	11	10	10
3	11	10	10	12	11	10
4	12	13	11	14	12	10

இந்த விவரங்களுக்கு மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வை நடத்தி அனுப்பட்ட சரக்குகள் இடையே உள்ள வித்தியாசம் அல்லது சோதிப்பவர்கள் இடையே உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பானதா என்பதை விவரிக்க

31. நான்கு வெவ்வேறு இயந்திரங்களில் முறையே வேலை செய்யும் நான்கு இயக்குபவர்கள் உற்பத்தி செய்த பழுதுபட்ட சிறு துண்டுகளின் எண்ணிக்கை கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

இயக்குபவர்கள்

இயந்திரங்கள்	I	II	III	IV
A	3	2	3	2
B	3	2	3	4
C	2	3	4	3
D	3	4	3	2

சிறப்பு காண் மட்ட அளவில் மாறுபட்டுப் பகுப்பாய்வு சோதனை நடத்தி உற்பத்தியின் மாறுபாட்டிற்கு இயக்குபவர்களின் செயல் முறைகளில் உள்ள மாறுபாடு அல்லது இயந்திரங்களின் செயல் பாடுகளில் உள்ள மாறுபாடு இவற்றில் எது காரணம் என கண்டறிக.

32. 3 கட்டுகளில் பயிரிடப்பட்ட 4 வகை கோதுமைகளின் விளைச்சலின் விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

கட்டுகள்

வகைகள்	1	2	3
I	10	9	8
II	7	7	6
III	8	5	4
IV	5	4	4

அவற்றின் மேல் மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு முறையை பயன்பாடு செய்க.

33. ஒரே அளவு மற்றும் அமைப்பை உடைய ஐந்து பிரிவு நிலங்களில் நான்கு வகையான உருளை கிழங்குகள் பயிரிடப்படுகின்றன. மேலும் ஒவ்வொரு வகையும் ஐந்து வெவ்வேறு உரங்களினால் நடத்து முறை செய்யப்படுகின்றன. விளைச்சல் (டன் அளவுகளில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

உரங்கள்

வகைகள்	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
V_1	1.9	2.2	2.6	1.8	2.1
V_2	2.5	1.9	2.2	2.6	2.2
V_3	1.7	1.9	2.2	2.0	2.1
V_4	2.1	1.8	2.5	2.2	2.5

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வை நடத்தி வகைகளுக்கிடையே சிறப்பான வித்தியாசம் உள்ளதா மற்றும் உரங்களிடையே சிறப்பான வித்தியாசம் உள்ளதா என சோதனை செய்க.

34. மனித செயல்பாடுகளில் தட்ப வெப்ப நிலையின் விளைவுகளில் பரிசோதனையில் 4 தட்ப வெப்ப நிலைகளில் 8 நபர்களுக்கு ஒரு சோதனை தரப்படுகிறது. அந்த சோதனையில் அந்த நபர்கள் பெற்ற எண்ணிக்கைகள் கீழே அட்டவணைபடுத்தப்பட்டுள்ளன.

நபர்கள்

தட்ப வெப்ப நிலை	1	2	3	4	5	6	7	8
1	70	80	70	90	80	100	90	80
2	70	80	80	90	80	100	90	80
3	75	85	80	95	75	85	95	75
4	65	75	70	85	80	90	80	75

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வை நடத்தி, நபர்களுக்கு இடையே ஏதாவது சிறப்பான வித்தியாசம் உள்ளதா மேலும் தட்ப வெப்ப நிலைகளுக்கு இடையே ஏதாவது சிறப்பான வித்தியாசம் உள்ளதா எனக் கூறுக.

35. மே, ஜுன், ஜுலை, ஆகிய மூன்று மாதங்களில் 4 விற்பனையாளர்களால் விற்கபட்ட குளிர்சாதனப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை கீழே உள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

விற்பனையாளர்

மாதங்கள்	A	B	C	D
மே	50	40	48	39
ஜுன்	46	48	50	45
ஜுலை	39	44	40	39

மாறுபாட்டு பகுப்பாய்வு நடத்தி மாதங்களுக்கு இடையே ஏதாவது சிறப்பான வித்தியாசம் உள்ளதா? மேலும் விற்பனையாளர்களிடையே சிறப்பான வித்தியாசம் உள்ளதா எனக் கண்டறிக.

விடைகள்

I.

1. ஆ	2. இ	3. அ	4. ஈ	5. அ
6. இ	7. ஆ	8. இ	9. அ	10. இ

II.

11. ∴ பிஷர் 12. சார்பற்றவை 1.3. மூன்று
14. 25 15. 21

III.

26. கணக்கிடப்பட்ட $F = 4.56$, அட்டவணை மதிப்பு $F(4,20) = 2.866$
27. கணக்கிடப்பட்ட $F = 9.11$, அட்டவணை மதிப்பு $F(9,2) = 19.385$
28. கணக்கிடப்பட்ட $F = 1.76$, அட்டவணை மதிப்பு $F(12,3) = 8.74$
29. கணக்கிடப்பட்ட $F = 3.29$, அட்டவணை மதிப்பு $F(3,12) = 3.49$
30. கணக்கிடப்பட்ட $F_R = 5.03$, அட்டவணை மதிப்பு $F(3,15) = 3.29$
    கணக்கிடப்பட்ட $F_C = 2.23$, அட்டவணை மதிப்பு $F(5, 15) = 2.90$
31. கணக்கிடப்பட்ட $F_R = 2.76$, F_C = அட்டவணை மதிப்பு $F(9,3)$
    $= 8.814.77$
32. கணக்கிடப்பட்ட $F_R = 18.23$, அட்டவணை மதிப்பு $F(3,6) = 4.77$
    கணக்கிடப்பட்ட $F_C = 6.4$, F_C = அட்டவணை மதிப்பு $F(2, 6)$
    $= 5.15$
33. கணக்கிடப்பட்ட $F_R = 1.32$, அட்டவணை மதிப்பு $F(3, 12) = 3.49$
    கணக்கிடப்பட்ட $F_C = 1.59$, F_C = அட்டவணை மதிப்பு
    $F(4, 12) = 3.25$
34. கணக்கிடப்பட்ட $F_R = 3.56$, அட்டவணை மதிப்பு $F(3,21) = 3.07$
    கணக்கிடப்பட்ட $F_C = 14.79$, அட்டவணை மதிப்பு $F(7, 21) = 2.49$
35. கணக்கிடப்பட்ட $F_R = 3.33$, அட்டவணை மதிப்பு $F(2,6) = 5.15$
    கணக்கிடப்பட்ட $F_C = 1.02$, அட்டவணை மதிப்பு $F(3, 6) = 4.77$

8. காலத்தொடர் வரிசை

8.0 அறிமுகம் :

புள்ளியியல் விவரங்களை கால வரிசையாக, அதாவது விவரங்கள் நிகழ்கின்ற, காலத்தைப் பொருத்து ஒழுங்குபடுத்துதலே 'காலத்தொடர் வரிசை'யாகும். இத்தகைய தொடர்கள் பொருளாதாரம் மற்றும் வணிகப் புள்ளியியல் துறைகளில் ஒரு தனி முக்கியத்துவம் வாய்ந்த இடத்தை வகிக்கிறது. வரும் காலங்களின் மக்கள் தொகைப் பெருக்கத்திற்கேற்ப உணவு அளித்தல் மக்களுக்கான வேலை வாய்ப்பு இன்னும் இது போன்றவற்றை திட்டமிடுவதில் ஒரு பொருளியலாளர் ஆர்வம் காட்டலாம். இது போலவே ஒரு வியாபாரி தனது பொருளின் வருங்காலத் தேவைக்கேற்ப உற்பத்தியை சரி செய்வதற்காக அதன் வருங்கால விற்பனை அளவைப் பற்றிய மதிப்பீடு காண விழையலாம். இதன் தொடர்பாக அடுத்தடுத்த கால இடைவெளிகளில் சேகரிக்கப்பட்டு பதியப்பட்ட புள்ளியியல் விவரங்களை ஒருவர் ஆராய வேண்டியுள்ளது. இத்தகைய விவரங்கள் பொதுவாக 'காலத்தொடர் வரிசைகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

8.1 வரையறை:

மூரிஸ் ஹம்பர்க் என்பவர் 'காலத் தொடர் வரிசை' என்பது 'காலவாரியாக ஒழுங்கு படுத்தப்பட்ட புள்ளியியல் விவரங்கள்' என்று வரையறுக்கிறார்.

'பொருளியியல் மாறி அல்லது கூட்டு மாறிகளின் வெவ்வேறு கால இடைவெளிகளில் நடைபெற்ற அளவீடுகளின் தொகுப்பு' என காலத் தொடர் வரிசையை யா-லூன் - சோ வரையறுக்கிறார்.

காலத்தொடர் வரிசை என்பது சமகால இடைவெளிகளில் நடைபெற்ற எண் விவரங்களின் தொகுப்பு ஆகும். இச்சம கால இடைவெளியானது மணியாகவோ, நாளாகவோ, மாதமாகவோ, வருடமாகவோ, வருடங்களின் தொகுப்பாகவோ இருக்கலாம். ஒரு இடத்தில் ஒரு நாளில் ஒரு மணி நேர இடைவெளியில் அளவிடப்பட்ட வெப்ப நிலை அளவுகள், தினசரி விற்பனை, ஒரு தொழிற்சாலையின் மாதாந்திர உற்பத்தி, ஆண்டு தோறும் உள்ள விவசாய உற்பத்தி, பத்தாண்டுகளில் எடுக்கப்படும் மக்கள் கணக்கீட்டில் உள்ள மக்கள் தொகை வளர்ச்சி முதலியன காலத் தொடர் வரிசைகளாகும்.

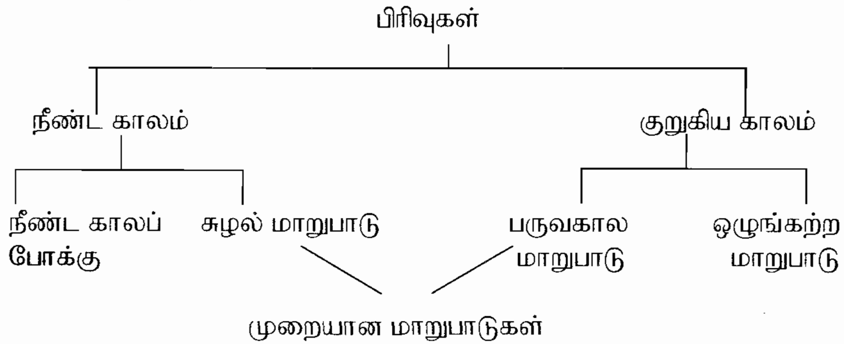
எண்ணற்ற காரணிகள், தொடர்ச்சியாக காலத் தொடர் வரிசையின் அளவீடுகளைப் பாதிக்கின்றன. அவற்றில் சில சம

இடைவெளிகளில் நிகழ்கின்றன. மற்றவை திடீர் நிகழ்வுகளால் ஏற்படுகின்றன. அக்காரணிகளைக் கண்டு பகுத்தாய்வு செய்து அதனை தெளிவாக பயன்படுத்துவதே 'காலத் தொடர் வரிசை பகுப்பாய்வு' ஆகும்.

காலத்தொடர் வரிசையிலுள்ள விவரங்களில் காலப் போக்கிலேற்படுகின்ற மாறுதல்கள் பற்றிய ஒழுங்கு முறைகளைக் கண்டுபிடித்து அளவிடுதலே காலத்தொடர் வரிசையின் முக்கிய நோக்கமாகும். காலத்தொடர் வரிசையில் காணப்படுகின்ற பல்வேறு காரணிகளைத் தனித்தனியாகப் பிரித்து அவற்றை வணிக முடிவெடுத்தலுக்குப் பயன் படுத்துவதே இதன் மைய நோக்கமாகும்.

8.2 காலத்தொடர் வரிசையின் பிரிவுகள்:

காலத்தொடர் வரிசையில் உள்ள மாறுபாடுகளின் தன்மைக்கேற்றவாறு பிரிப்பதே காலத் தொடர் வரிசையின் பிரிவுகள் ஆகும். அது கீழ்க்கண்டவாறு நான்கு பெரும் பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன.



காலத்தொடர் பகுப்பாய்வில் இந்நான்கு பிரிவுகளுக்கிடையே ஒரு பெருக்கல் உறவு உள்ளதாகக் கருதப் படுகிறது.

குறியீட்டு முறையில் $Y = T \times S \times C \times I$

இங்கு Y என்பது நான்கு காரணிகளால் பெறப்படுகின்ற முடிவு. இங்கு T= நீண்ட கால போக்கு, S = பருவ கால மாறுபாடு, C = சுழல் மாறுபாடு, I = ஒழுங்கற்ற மாறுபாடு

இப்பெருக்கல் முறையில் பல்வேறு காரணங்களால் ஏற்படுகின்ற நான்கு காரணிகளும் சார்பற்றவையாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை எனக் கருதப்படுகிறது.

மற்றொரு முறையில் காலத் தொடர் வரிசையில் காணப் படுகின்ற விவரங்கள் இந்நான்கு பிரிவின் கூடுதலாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. குறியீட்டில் $Y = T + S + C + I$

கூடுதல் முறையில் இந்நான்கு பிரிவுகளுமே ஒன்றை ஒன்று சார்ந்தவையல்ல என்று கருதப் படுகிறது.

காலத்தொடர் வரிசையின் நான்கு பிரிவுகள்

1. நீண்ட காலப் போக்கு அல்லது போக்கு
2. பருவ கால மாறுபாடு
3. சுழல் மாறுபாடு
4. ஒழுங்கற்ற அல்லது முறையற்ற மாறுபாடு

8.2.1 நீண்ட காலப் போக்கு:

காலத்தொடர் வரிசையில் இது ஒரு நீண்ட கால அசைவு ஆகும். ஒரு காலத்தொடரின் பல ஆண்டுகளுக்குரிய மதிப்புக்கள் பொதுவான ஏற்றத்துடனோ அல்லது இறக்கத்துடனோ அல்லது நிலையாகவோ இருக்கும் இத்தன்மை நீண்டகாலப் போக்கு அல்லது எளிமையான போக்கு என்று அழைக்கப்படும். மக்கள் தொகைப் பெருக்கம், தொழில் நுட்ப முன்னேற்றத்தால் நுகர்வோர் விருப்பங்கள் மாறுபடுவதும் ஏறுகின்ற போக்கிற்கு காரணம் மருத்துவ வசதி அதிகரித்துள்ளதாலும் சுகாதார சூழ்நிலையாலும் இறப்பு வீதம் குறைந்து வருவதைக் காண இயலும். இதுவே போக்கின் இறக்கத்திற்கு காரணம். பொதுவாக காலத்தொடர் வரிசையின் இந்த ஏற்ற இறக்கங்கள் நீண்ட காலத்திற்கு இருக்கும்.

8.2.2 போக்கினை அளவிடும் முறைகள்:

போக்கு கீழ்க்கண்ட கணித முறைகளில் அளக்கப்படுகிறது.

1. வரைபட முறை 2. அரை சராசரி முறை
3. நகரும் சராசரி முறை 4. மீச்சிறு வர்க்க முறை

வரைபட முறை:

இம்முறையில் போக்கை அளப்பது மிகச் சுலபமும் எளிமையானதும் ஆகும். இதில் காலம் X – அச்சிலும் மதிப்புகள் Y-அச்சிலும் எடுக்கப்பட்டு கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் வரைபடத்தில் புள்ளிகளாகக் குறிக்கப்படுகின்றன. புள்ளிகளை கையால் இணைத்து வளைவரை வரைய அது போக்கின் திசையைக் குறிக்கும்.

போக்குக் கோட்டை வரையும் பொழுது கீழ்க்கண்ட முக்கிய கருத்துகளை கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

(i) வளைவரை சீராக இருக்க வேண்டும்.

(ii) கூடிய வரையில் போக்குக் கோட்டிற்கு மேலும் கீழும் சம எண்ணிக்கை உள்ள புள்ளிகள் அமைய வேண்டும்.

(iii) புள்ளிகளிலிருந்து போக்குக் கோட்டிற்கு உள்ள செங்குத்து தூர வித்தியாசத்தின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் இயன்ற வரையில் சிறியதாக இருக்க வேண்டும்.

(iv) சுழல் மாறுபாடுகள் இருக்குமானால் போக்கிற்கு மேலும் கீழும் சம அளவு சுழல் மாறுபாடுகள் இருக்க வேண்டும்.

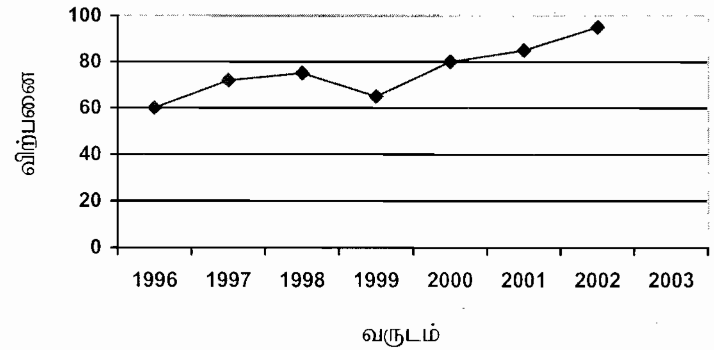
(v) கோட்டிற்கு மேலே உள்ள சுழல்களின் பரப்பளவும் கீழே உள்ள சுழல்களின் பரப்பளவும் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு வரைபட முறையில் போக்குக்கோடு வரைக.

வருடம்	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
விற்பனை (1000 ரூபாயில்)	60	72	75	65	80	85	95

தீர்வு:



நிறைகள்:

1. இது மிகவும் சுலபமானதும், எளிமையானதும் ஆகும். இது உழைப்பையும் நேரத்தையும் மிச்சப்படுத்துகிறது.
2. எல்லா வகைப் போக்குகளையும் விளக்குவதற்கு பயன்படுகிறது.
3. இது போக்கின் பயன்பாடுகளில் விரிவாக உபயோகப் படுத்தப்படுகிறது.

குறைகள்:

1. இது மிகவும் சார்புடையது. ஒரே மாதிரியான விவரங்களை வெவ்வேறு நபர்கள் வரையும் போது வெவ்வேறு போக்குக் கோடுகள் கிடைக்கின்றன.
2. இவ்வகைப் போக்குகளை முன்கணிப்பிற்கு பயன்படுத்துதல் விபரீத விளைவைக் கொடுக்கும்.
3. குறிப்பிட்ட அளவில் போக்கின் மதிப்பை கணக்கிட இயலாது.

அரை சராசரி முறை:

இம்முறையில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை சம எண்ணிக்கை ஆண்டு மதிப்புகளுடன் கூடிய இரு அரைப்பகுதிகளாகப் பிரித்துக் கொள்ள வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக 1981 ல் இருந்து 1998 வரை உள்ள 18 வருடங்களுக்கான கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை முதல் 9 வருட விவரங்கள் அதாவது 1981 ல் இருந்து 1990 வரை ஒரு பகுதியாகவும் 1990 ல் இருந்து 1998 வரை மற்றொரு பகுதியாகவும் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகள் ஒற்றை எண்ணிக்கையிலிருந்தால் நடு மதிப்பை நீக்கி விட்டு நடு மதிப்புக்கு மேலுள்ள மதிப்புகளை ஒரு பகுதியாகவும் நடுமதிப்புக்கு கீழுள்ள மதிப்புக்களை மற்றொரு பகுதியாகவும் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக 1991 ல் இருந்து 1997 வரை உள்ள 7 வருடங்களின் விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் 1994-ம் வருடத்தை நீக்கி விட்டு 1991 முதல் 1993 வரை உள்ள விவரங்களை ஒரு பகுதியாகவும், 1995 முதல் 1997 வரை உள்ள விவரங்களை மற்றொரு பகுதியாகவும் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

விவரங்கள் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்ட பின் ஒவ்வொரு பகுதியின் சராசரியை தனித்தனியே காண வேண்டும். அச்சராசரி மதிப்புகளை அப்பகுதிகளின் பிரிவு இடைவெளிகளின் மத்தியில் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும். அப்புள்ளிகள் நேர்கோட்டால் இணைக்கப்படும் பொழுது தேவையான போக்குக்கோடு கிடைக்கும். இக்கோட்டினை மேல் நோக்கியும் கீழ் நோக்கியும் நீட்டுவதன் மூலம் இக்காலங்களுக்கு இடைப்பட்ட மதிப்புகளையும் வருங்கால மதிப்புகளையும் கணக்கிட இயலும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

அரை சராசரி முறையில் போக்குக் கோடு வரைக.

வருடம்	1991	1992	1993	1994	1995	1996
விற்பனை (1000 ரூபாயில்)	60	75	81	110	106	117

தீர்வு:

ஒவ்வொரு பகுதியிலும் 3 மதிப்புகள் இருக்குமாறு இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கவும்.

வருடம்	விற்பனை ரூ	அரைப்பகுதியின் மொத்தம்	அரைசராசரி	போக்கு மதிப்புகள்
1991	60			59
1992	75	216	72	72
1993	81			85
1994	110			98
1995	106	333	111	111
1996	117			124

மைய ஆண்டுகளுக்கிடையேயான வேறுபாடு=1995-1992 =3 வருடங்கள்

அரை சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு = 111 –72 = 39

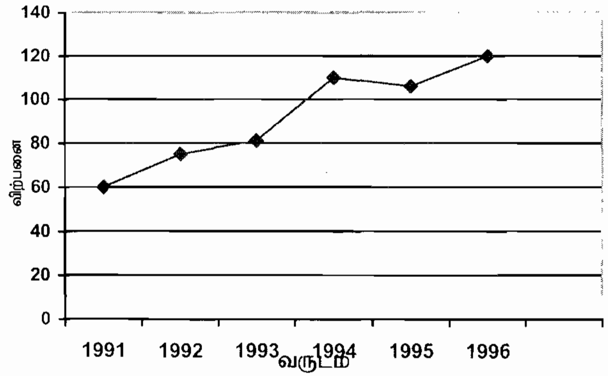
∴ வருடாந்திரப் போக்கு = 39 / 3 = 13

1991-ன் போக்கு = 1992 ன் போக்கு – 13 = 72 – 13 = 59

1993 - ன் போக்கு = 1992 ன் போக்கு +13

= 72 + 13 = 85

இதே போல் மற்ற போக்கு மதிப்புகளைக் கணக்கிட வேண்டும்.
பின்வரும் வரைபடம் போக்குக் கோட்டினை தெளிவாக விளக்கும்.



எடுத்துக்காட்டு 3:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு அரை சராசரி முறையில் போக்கு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

வருடம்	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
செலவினங்கள் ரூ. லட்சத்தில்	1.5	1.8	2.0	2.3	2.4	2.6	3.0

தீர்வு:

வருடம்	செலவினங்கள் ரூபாயில்	அரைப்பகுதியின் மொத்தம்	அரை சராசரி	போக்கு மதிப்புகள்
1995	1.5			1.545
1996	1.8	5.3	1.77	1.770
1997	2.0			1.995
1998	2.3			2.220
1999	2.4			2.445
2000	2.6	8.0	2.67	2.670
2001	3.0			2.895

மைய ஆண்டுகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு = 2000 – 1996
= 4 வருடங்கள்

அரைச்சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு = 2.67 - 1.77 = 0.9

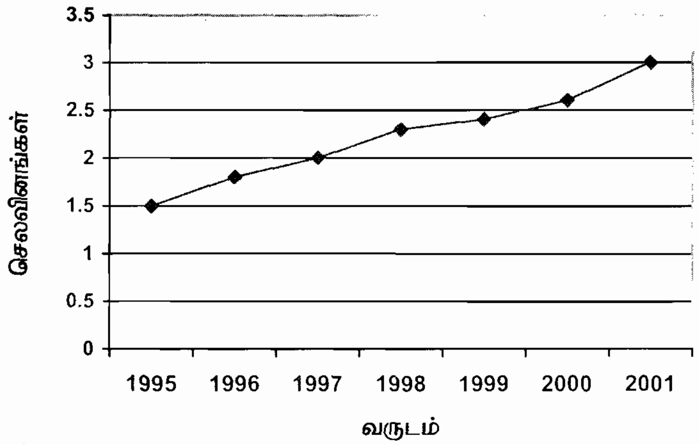
$\therefore$ வருடாந்திர போக்கு மதிப்பு $= \frac{0.9}{4} = 0.225$

1995 – ன் போக்கு = 1996 ன் போக்கு – 0.225 = 1.77 – 0.225 = 1.545

1996 – ன் போக்கு = 1.77

1997 – ன் போக்கு = 1.77 + 0.225 = 1.995

இதே போல மற்ற மதிப்புகளைக் கணக்கிட வேண்டும்.



நிறைகள்:

1. இம்முறை மிக எளிமையானது மற்றும் கணக்கிட சுலபமானது
2. இம்முறையில் ஒவ்வொருவரும் ஒரே ஒரு போக்குக் கோட்டினையே பெற முடியும்.
3. இக்கோட்டினை இரு வழிகளிலும் நீட்டும் பொழுது கடந்த கால மதிப்பீடுகளையும் வருங்கால மதிப்பீடுகளையும் காண இயலும்.

குறைகள்:

1. காலத் தொடர் வரிசையில் நேர்கோட்டுப் போக்கு இல்லாத பொழுது கூட அது இருக்கிறதென்ற தற்கோளின் அடிப்படையில் இம்முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது.
2. இம்முறையில் பெறப்படும் போக்கு மதிப்புகள் நம்பகத்தன்மை உடையவை அல்ல.

நகரும் சராசரி முறை:

இம்முறை மிக எளிமையானது. இது கூட்டு சராசரியை அடிப்படையாகக் கொண்டது. ஒரு கால வட்டத்திற்குள்ளடங்குகின்ற எல்லா மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடப்பட்டு அவற்றின் நடு மதிப்பிற்கு நேர் எழுத வேண்டும். பின் இரண்டாவது மதிப்பில் இருந்து ஒரு கால வட்டத்திற்குள்ளடங்குகின்ற மதிப்புகளின் கூட்டு சராசரியைக் கணக்கிட்டு அவற்றின் நடுமதிப்பிற்கு நேராக எழுத வேண்டும். இம்முறையைத் தொடர்ந்து இறுதி வரை செய்ய வேண்டும். இக்காலவட்டம் நகரும் சராசரி இடைவெளி என்று அழைக்கப்படும்.

ஒற்றையெண்ணிக்கை கால இடைவெளிக்கான நகரும் சராசரி முறை பின்வருமாறு (3 அல்லது 5)

3 ஆண்டுகளுக்கான நகரும் சராசரிகள் $\frac{a+b+c}{3}$, $\frac{b+c+d}{3}$, $\frac{c+d+e}{3}$ … ஆகும்.

5 ஆண்டுகளுக்கான நகரும் சராசரிகள் முறையே $\frac{a+b+c+d+e}{5}$, $\frac{b+c+d+e+f}{5}$, $\frac{c+d+e+f+g}{5}$ …ஆகும்.

நகரும் சராசரியின் கால வட்டம் ஒற்றையெணணிக்கை ஆண்டுகளாக இருந்தால் கணக்கிடுவதற்கான படிகள் (3 வருடங்கள்)

1. முதல் மூன்று வருடங்களுக்கான மொத்த மதிப்பை கணக்கிட்டு இரண்டாவது வருடத்திற்கு நேராக எழுத வேண்டும்.
2. முதல் மதிப்பை விடுத்து, அடுத்து வரும் மூன்று வருட மதிப்புகளைக் கூட்டி மூன்றாவது வருடத்திற்கு நேராக எழுத வேண்டும்.
3. கடைசி மதிப்பு எடுக்கப்படும் வரை இதே போல் தொடர்க
4. ஒவ்வொரு மொத்த மதிப்பையும் 3 ஆல் வகுத்து அவையவற்றிற்கு நேராக அடுத்த நிரலில் எழுதுக.
   இவையே நகரும் சராசரி முறையில் கணக்கிடப்பட்ட போக்கு மதிப்புகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு 3-வருடங்களுக்கான நகரும் சராசரி கணக்கிடுக.

வருடம்	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
உற்பத்தி (டன்களில்)	50	36	43	45	39	38	33	42	41	34

தீர்வு:

வருடம்	உற்பத்தி டன்களில்	3 வருடங்களுக்கான நகரும் மொத்தம்	3 வருடங்களுக்கான நகரும் சராசரியே போக்கு மதிப்புகள்
1975	50	-	-
1976	36	129	43.0
1977	43	124	41.3
1978	45	127	42.3
1979	39	122	40.7
1980	38	110	36.7
1981	33	113	37.7
1982	42	116	38.7
1983	41	117	39.0
1984	34	-	-

நகரும் சராசரியின் காலவட்டம் இரட்டை எண்ணிக்கை ஆண்டுகளாக இருந்தால் ஒவ்வொரு தொகுதியின் மைய மதிப்பும் இரு காலப் புள்ளிகளுக்கு இடையில் அமையும். எனவே நகரும் சராசரிகளை மையநிலைப்படுத்த வேண்டும்.

இதற்கான படிகள் பின்வருமாறு:

1. முதல் நான்கு வருட மதிப்புக்களின் கூடுதலைக் கணக்கிட்டு அதனை இரண்டாவது மற்றும் மூன்றாவது வருடத்தின் நடு பிரிவிற்கு நேராக மூன்றாவது நிரலில் எழுத வேண்டும்.
2. முதல் வருட மதிப்பை விடுத்து, அடுத்து வரும் 4-வருட மொத்த மதிப்பையும் கணக்கிட்டு அதனை மூன்று மற்றும் நான்காவது வருடத்தின் நடுபிரிவிற்கு நேரே எழுத வேண்டும்.
3. கடைசி மதிப்பு எடுக்கப்படும் வரை இந்நிலையை தொடர வேண்டும்.
4. முதல் இரு நான்கு வருடக் கூடுதல்களின் மொத்தத்தை கணக்கிட்டு அதனை மூன்றாவது வருடத்திற்கு நேராக நான்காவது நிரலில் எழுத வேண்டும்.
5. முதல் நான்கு வருட கூடுதலை விடுத்து அடுத்து உள்ள இரு நான்கு வருடக் கூடுதல்களின் மொத்தத்தை கணக்கிட்டு 4- வது வருடத்திற்கு எதிராக எழுத வேண்டும்.
6. கடைசி 4-வருடக் கூடுதலைக் கணக்கில் எடுக்கும் வரை இந்நிலையைத் தொடர வேண்டும்.
7. 4 -வது நிரலில் உள்ள ஒவ்வொரு கூடுதலையும் 8-ஆல் வகுத்து (இது 8-வருடங்களுக்கான கூடுதல்) அதை 5-வது நிரலில் எழுதுக. இவையே போக்கு மதிப்புகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5:

இந்தியாவின் தேயிலை உற்பத்தி பின்வருமாறு 4 வருட நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிடுக.

வருடம்	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
உற்பத்தி (டன்களில்)	464	515	518	467	502	540	557	571	586	612

தீர்வு:

வருடம்	உற்பத்தி (டன்களில்)	4 வருட நகரும் மொத்தம்	மையநிலைப் படுத்தப்பட்ட நகரும் மொத்தம்	போக்கு மதிப்புகள்
1993	464		-	-
		-		
1994	515			
		1964		
1995	518		3966	495.8
		2002		
1996	467		4029	503.6
		2027		
1997	502		4093	511.6
		2066		
1998	540		4236	529.5
		2170		
1999	557		4424	553.0
		2254		
2000	571		4580	572.5
		2326		
2001	586			
		-		
2002	612			

நிறைகள்:

1. மற்ற முறைகளோடு ஒப்பிடுகையில் இம்முறை புரிந்து கொள்வதற்கும் கையாள்வதற்கும் மிக எளிமையானது.
2. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுடன் இன்னும் சில விவரங்கள் சேர்க்கப்பட்டால் முழு கணக்கீடுகளிலும் மாற்றம் ஏற்படுவதில்லை. போக்கு மதிப்புகள் மட்டுமே அதிகரிக்கின்றன.
3. சுழல் மாறுபாடுகளின் ஒரு கால வட்டத்தை நகரும் சராசரி கால இடைவெளியாக எடுப்பதன் மூலம் முறையான சுழல் மாறுபாடுகள் முழுவதுமாக நீக்கப்படுகிறது.
4. குறிப்பாக தொடரின் போக்கு மதிப்புகள் ஒழுங்கற்றவையாக இருக்கும் பொழுது இம்முறை மிகவும் சிறப்பு வாய்ந்தது.

குறைகள்:

1. முன்கணிப்பும், வருங்காலப் போக்கினை அறிவதையும் முக்கிய நோக்கமாகக் கொண்ட போக்கு பகுப்பாய்வில் இம்முறை பயன்படுத்தப்படுவதில்லை.

2. சில சமயங்களில் நகரும் சராசரியின் காலத்தேர்வு சூழ்நிலையைப் பொறுத்தது.
3. பொதுவாக நகரும் சராசரிகள், முனை மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படுகின்றன.
4. இது ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகளை முற்றிலுமாக நீக்குவதில்லை.

8.3 மீச்சிறு வர்க்கமுறை:

இம்முறை பரவலாகப் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகிறது. பொருளாதார மற்றும் வணிக காலத் தொடர் வரிசைகளின் போக்கு மதிப்புகளைக் காண்பதில் இம்முறை முக்கிய பங்கு வகிக்கிறது. வருங்கால மதிப்பீட்டிற்கும், முன்கணிப்பிற்கும் இது பெரிதும் உதவுகிறது. இம்முறையில் பெறப்படும் போக்குக் கோடு மிக பொருத்தமான நேர்க்கோடு என்றழைக்கப்படுகிறது.

போக்குக் கோட்டின் சமன்பாடு $y = a + bx$, என்க. கொடுக்கப்பட்டுள்ள y மதிப்புகளுக்கும் இச்சமன்பாட்டின் மூலம் பெறப்படும் y மதிப்பீடுகளுக்கும் உள்ள வித்தியாசத்தின் வர்க்கங்களின் கூடுதலை மீச்சிறு மதிப்பு ஆக்க வேண்டும் என்ற அடிப்படையில் a , b என்ற மாறிலிகள் மதிப்பிடப்படுகின்றன.

இம்மாறிலிகள் பின்வரும் இயல்நிலை சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதன் மூலம் கணக்கிடப்படுகின்றன.

$$\Sigma y = na + b\Sigma x \quad \ldots\ldots\ldots \ (1)$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 \quad \ldots\ldots\ldots \ (2)$$

இங்கு x என்பது காலப்புள்ளிகளையும் y என்பது அதற்கான மதிப்புகளையும் குறிக்கின்றன. 'n' என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஜோடி மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை

வருடங்கள் ஒற்றை எணுணிக்கையாக அமையும் பொழுது:

படி 1: கொடுக்கப்பட்ட வருடங்களை நிரல் 1-லும் அதற்கொத்த மதிப்பினை நிரல் 2 - லும் எழுத வேண்டும்.

படி 2: 3-வது நிரலில், நிரல் 1-ல் உள்ள வருடங்களுக்கு நேராக 0, 1, 2... என எழுதி அவற்றை X எனக் குறிக்க வேண்டும்.

படி 3: அதன் நடு உறுப்பை A என குறிக்க வேண்டும்.

படி 4: நடு உறுப்பு A –ல் இருந்து விலக்கம் u = X- A கணக்கிட்டு அதனை நிரல் 4-ல் குறிக்க வேண்டும்.

படி 5: u^2 மதிப்பைக் கண்டுபிடித்து நிரல் 5-ல் எழுத வேண்டும்.

படி 6: நிரல் 6-ல் உள்ள மதிப்புகள் பெருக்கல் uy ஐ க் குறிக்க வேண்டும்.

இதற்கான இயல்நிலை சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு

$$\Sigma y = na + b\Sigma u \quad \ldots (1) \quad \text{இங்கு } u = X\text{-}A$$

$$\Sigma uy = a\Sigma u + b\Sigma u^2 \quad \ldots (2)$$

$\Sigma u = 0$, என்பதால் சமன்பாடு (1) ன் மூலம்

$$a = \frac{\Sigma y}{n}$$

சமன்பாடு (2) ன் மூலம்

$$\Sigma uy = b\Sigma u^2$$

$$\therefore b = \frac{\Sigma uy}{\Sigma u^2}$$

மிகப் பொருத்தமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$y = a + bu \;\; = a + b\ (X - A)$

எடுத்துக்காட்டு 6:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்க முறையைப் பயன்படுத்தி போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

வருடம்	1990	1991	1992	1993	1994
உற்பத்தி டன்களில்	50	55	45	52	54

தீர்வு:

வருடம் (x)	உற்பத்தி (y)	X= x - 1990	u = X-A = X-2	u^2	uy	போக்கு மதிப்புகள்
1990	50	0	-2	4	-100	50.2
1991	55	1	-1	1	-55	50.7
1992	45	**2 A**	0	0	0	51.2
1993	52	3	1	1	52	51.7
1994	54	4	2	4	108	52.2
மொத்தம்	256			10	5	

A என்பது உத்தேச மதிப்பு

பொருத்தமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$Y = a + bX$$

$$= a + bu\text{ , இங்கு } u = X - 2$$

இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு

$$\Sigma y = na + b\Sigma u \quad \ldots.(1)$$

$$\Sigma uy = a\Sigma u + b\Sigma u^2 \quad \ldots..(2)$$

$\Sigma u = 0$ என்பதால் , சமன்பாடு (1) இன் மூலம் $\Sigma y = na$

$$a = \frac{\Sigma y}{n}$$

$$= \frac{256}{5} = 51.2$$

சமன்பாடு (2) இன் மூலம்

$$\Sigma uy = b\Sigma u^2$$

$$5 = 10b$$

$$b = \frac{5}{10}$$

$$= 0.5$$

பொருத்தமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடானது

$$y = a + bu$$

$$y = 51.2 + 0.5\ (X\text{-}2)$$

$$y = 51.2 + 0.5X - 1.0$$

$$y = 50.2 + 0.5X$$

போக்கு மதிப்புகள்

50.2, 50.7, 51.2, 51.7, 52.2

1996 ம் வருட உற்பத்தியை மதிப்பிட

$X = x - 1990$ என பிரதியிடுக

$X = 1996 - 1990 = 6$

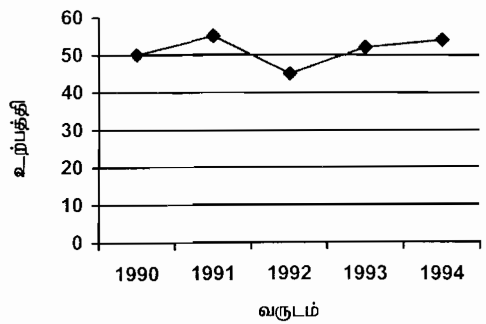
$Y = 50.2 + 0.5X$

$= 50.2 + 0.5(6)$

$= 50.2 + 3.0$

$= 53.2$ டன்கள்.

பின்வரும் வரைபடம் போக்குக் கோட்டைத் தெளிவாக விளக்குகிறது.



வருடங்கள் இரட்டையெண்ணிக்கையாக கொடுக்கப்பட்டுள்ள பொழுது

இங்கு Xல் நடுவில் உள்ள இரு மதிப்புகளின் சராசரியை A என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். அப்பொழுது $u = \frac{X - A}{1/2} = 2\,(X\text{-}A)$ எனக் கிடைக்கும். வருடங்கள் ஒற்றை எண்ணிக்கையாக அமையும் பொழுது பின்பற்றிய மற்ற வழி முறைகளை இங்கும் பின்பற்ற வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 7:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்க முறையில் போக்குக் கோட்டை பொருத்துக

வருடம்	1983	1984	1985	1986	1987	1988
விற்பனை (லட்சங்களில்)	3	8	7	9	11	14

1991 ம் வருட விற்பனை மதிப்பீடு காண்க

தீர்வு:

வருடம் (x)	விற்பனை (y)	X = x-1983	u = 2X-5	u^2	*uy*	போக்கு மதிப்புகள்
1983	3	0	-5	25	-15	3.97
1984	8	1	-3	9	-24	5.85
1985	7	2	-1	1	-7	7.73
1986	9	3	1	1	9	9.61
1987	11	4	3	9	33	11.49
1988	14	5	5	25	70	13.37
மொத்தம்	52		0	70	66	

$$u = \frac{X - A}{1/2}$$
$$= 2\,(X - 2.5) = 2X - 5$$

நேர்கோட்டின் சமன்பாடானது

$$y = a + bX = a + bu$$

இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளாவன

$$\Sigma y = na \quad \ldots\ldots(1)$$
$$\Sigma uy = b\Sigma u^2 \quad \ldots\ldots(2)$$

சமன்பாடு (1) ன் மூலம் $52 = 6a$

$$a = \frac{52}{6}$$
$$= 8.67$$

சமன்பாடு (2) ன் மூலம் $66 = 70\,b$

$$b = \frac{66}{70}$$
$$= 0.94$$

பொருத்தப்பட்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாடானது

$$y = a + bu$$
$$y = 8.67 + 0.94(2X - 5)$$
$$y = 8.67 + 1.88X - 4.7$$
$$y = 3.97 + 1.88X \text{ -----------(3)}$$

போக்கு மதிப்புகளானது போக்கு கோட்டில் பின்வரும் மதிப்புகளை X ற்கு மதிப்பிட கிடைக்கின்றன.

$X = 0,\ y = 3.97$	$X = 1,\ y = 5.85$
$X = 2,\ y = 7.73$	$X = 3,\ y = 9.61$
$X = 4,\ y = 11.49$	$X = 5,\ y = 13.37$

1991 ம் வருட விற்பனை மதிப்பீட்டை பெற

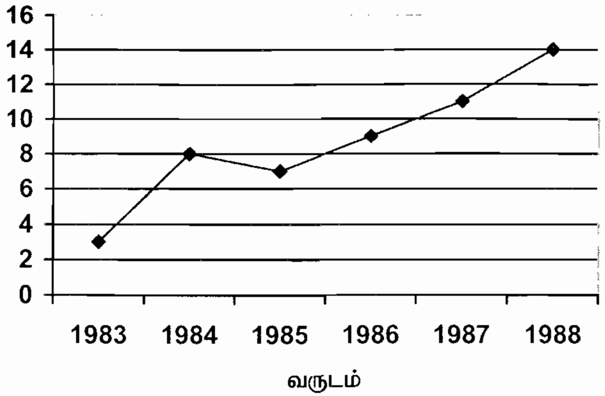
$X = x - 1983$ என பிரதியிடுக

$= 1991 - 1983 = 8$

$y = 3.97 + 1.88 \times 8$

$= 19.01$ லட்சங்கள்

கீழ்க்கண்ட வரைபடம் போக்கு கோட்டினைத் தெளிவாக காட்டுகிறது.



நிறைகள்:

1. இது ஒரு கணிதவியல் முறையாக இருப்பதால் இது எதைச் சார்ந்தும் அமையாது எனவே ஆய்வாளரின் சொந்த விருப்பு வெறுப்புகளை நீக்குகிறது.
2. இம்முறையில் வருங்கால மதிப்புகளை மதிப்பிடுவதோடு காலத் தொடர் வரிசையின் இடைப்பட்ட மதிப்புகளையும் மதிப்பிட இயலும்.
3. அனைத்து போக்கு மதிப்புகளையும் இம்முறையில் கணக்கிட இயலும்.

குறைகள்:

1. இது ஒரு கடினமான முறை சில மதிப்புகளை சேர்க்கும் பொழுது கணக்கீடுகளை மீண்டும் செய்ய வேண்டும்.
2. வணிக பொருளாதார காலத்தொடர்கள் நேர்க்கோட்டு போக்காக இருப்பதில்லை என்பதால் இவை நேர்க்கோட்டு போக்குடையவை என்று அனுமானித்து இப்போக்கு மதிப்புகளை கணக்கிட்டால் சில நேரங்களில் தவறுகள் ஏற்படலாம்.
3. இது சுழல், பருவகால மற்றும் முறையற்ற மாறுபாடுகளை கருத்தில் கொள்வதில்லை
4. போக்கு மதிப்பீடுகளை அடுத்து வருகின்ற சில காலங்களுக்கு மட்டுமே மதிப்பிட இயலும். நீண்ட கால அளவில் பெறுகின்ற மதிப்பீடுகள் பொருத்தமாக இராது.

8.4 பருவகால மாறுபாடுகள்:

பருவகால மாறுபாடுகள் என்பது ஒரு வருடத்திற்குள் பருவத்திற்கேற்ப ஏற்படக்கூடிய ஏற்ற இறக்கங்களாகும். பருவகால மாறுபாடுகள் ஏற்படுவதற்கான காரண காரியங்களாவன

i) ஒரு இடத்தின் தட்ப வெப்பநிலை மற்றும் வானிலை

ii) மக்களின் தொன்று தொட்டு வரும் பழக்க வழக்கங்கள்.

எடுத்துக்காட்டாக கோடை காலத்தில் ஐஸ்கீரிம் விற்பனை, மழை காலத்தில் குடை விற்பனை, குளிர் காலத்தில் கம்பளி ஆடைகள் விற்பனை மற்றும் சாகுபடி காலங்களில் விளைச்சல் போன்றவை அதிகரிக்கின்றன.

இரண்டாவதாக, திருமண காலங்களில் தங்கத்தின் விலை கூடுகிறது. பண்டிகை காலங்களில் பட்டாசு, புதுத்துணிகள் ஆகியவற்றின் விலை ஏறுகிறது.

எனவே உற்பத்தியாளர்கள், விற்பனையாளர்கள், வியாபாரிகள், வாடிக்கையாளர்கள் போன்ற அனைவருக்கும் வருங்காலத்தைப் பற்றி திட்டமிட பருவ கால மாறுபாடுகள் மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை ஆகும்.

பருவ கால மாறுபாடுகளை அளவிடுவதன் நோக்கமானது அவற்றின் விளைவுகளைப் பற்றி அறிந்து மற்றும் அதன் விளைவைப் போக்கினின்று வேறுபடுத்துதல் ஆகும்.

பருவ கால மாறுபாடுகளை அளவிடுதல்:

பருவகால மாறுபாடுகளை அளவிடுவதில் பின்வரும் நான்கு முறைகளும் அதிக அளவு பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

1. எளிய சராசரி முறை
2. போக்கு விகித முறை
3. நகரும் சராசரி விகித முறை
4. தொடர் உறவு முறை

மேற்கண்ட நான்கு முறைகளில் பருவ கால மாறுபாடுகளை அளவிடுவதற்கு எளிய சராசரி முறை மிக சுலபமானது.

8.4.1 எளிய சராசரி முறை:

இந்த முறையில் பருவ கால குறியீட்டை கணக்கிடுவதற்கான படிகள்

1. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை கால வாரியாக வரிசை படுத்துக.
2. ஒவ்வொரு பருவத்திற்கும் சராசரி கணக்கிடுக.

3. பருவ கால சராசரிகளின் சராசரியை கணக்கிட வேண்டும். இது மொத்த சராசரி ஆகும்.
4. பருவ கால சராசரியை மொத்த சராசரியின் சதவீதத்தில் எழுதுக . இது பருவ காலக் குறியீடு ஆகும்.

இப்பருவ கால குறியீடுகளின் மொத்தம் 100n. இங்கு 'n' என்பது ஒரு வருடத்தில் உள்ள பருவங்களின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8:

கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு எளிய சராசரி முறையில் பருவ கால குறியீடுகள் காண்க.

காலாண்டு

வருடம்	I	II	III	IV
1989	30	40	36	34
1990	34	52	50	44
1991	40	58	54	48
1992	54	76	68	62
1993	80	92	86	82

தீர்வு:

காலாண்டு

வருடம்	I	II	III	IV
1989	30	40	36	34
1990	34	52	50	44
1991	40	58	54	48
1992	54	76	68	62
1993	80	92	86	82
மொத்தம்	238	318	294	270
சராசரி	47.6	63.6	58.8	54.0
பருவகால குறியீடுகள்	85	113.6	105	96.4

மொத்த சராசரி $= \dfrac{47.6+63.6+58.8+54}{4}$

$= \dfrac{224}{4}$

$= 56$

முதல் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$= \dfrac{\text{முதல் காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$

$= \dfrac{47.6}{56} \times 100$

$= 85$

இரண்டாவது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$= \dfrac{\text{இரண்டாவது காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$

$= \dfrac{63.6}{56} \times 100 = 113.6$

மூன்றாவது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$= \dfrac{\text{மூன்றாவது காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$

$= \dfrac{58.8}{56} \times 100 = 105$

நான்காவது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$= \dfrac{\text{நான்காவது காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$

$= \dfrac{54}{56} \times 100 = 96.4$

எடுத்துக்காட்டு 9:

பின்வரும் விவரங்களுக்கு எளிய சராசரி முறையில் பருவகால குறியீடுகளைக் காண்க

வருடம்

காலாண்டு	1974	1975	1976	1977	1978
I	72	76	74	76	74
II	68	70	66	74	74
III	80	82	84	84	86
IV	70	74	80	78	82

தீர்வு:

காலாண்டு

வருடம்	I	II	III	IV
1974	72	68	80	70
1975	76	70	82	74
1976	74	66	84	80
1977	76	74	84	78
1978	74	74	86	82
மொத்தம்	372	352	416	384
சராசரி	74.4	70.4	83.2	76.8
பருவகால குறியீடுகள்	97.6	92.4	109.2	100.8

$$\text{மொத்த சராசரி} = \frac{74.4 + 70.4 + 83.2 + 76.8}{4}$$

$$= \frac{304.8}{4} = 76.2$$

முதல் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$$= \frac{\text{முதல் காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

$$= \frac{74.4}{76.2} \times 100$$

$$= 97.6$$

இரண்டாவது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$$= \frac{\text{இரண்டாவது காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

$$= \frac{70.4}{76.2} \times 100$$

$$= 92.4$$

மூன்றாவது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

நான்காவது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$$= \frac{\text{நான்காவது காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

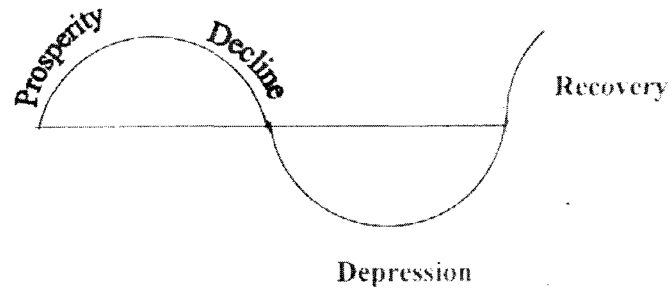
$$= \frac{76.8}{76.2} \times 100 \quad = 100.8$$

$$= 97.6 + 92.4 + 109.2 + 100.8$$

= 400 எனவே சரிபார்க்கப்பட்டது

சுழல் மாறுபாடுகள் :

வழக்கமாக இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட ஆண்டுகளில் காலத் தொடர் வரிசையில் திரும்ப திரும்ப ஏற்படும் மாறுபாடுகளை 'சுழல்கள்' என்ற பதம் குறிக்கிறது. வணிகம் மற்றும் பொருளாதாரத்துடன் தொடர்புடைய காலத் தொடர் வரிசைகள் யாவும் சுழல் மாறுபாடுகளைப் பெற்றிருக்கும். வணிக செயல்பாடுகள் திரும்ப, திரும்ப ஏற்ற இறக்க அசைவுகளைப் பெறுவதே வியாபார சுழற்சியாகும். இச்சுழற்சி நான்கு பகுதிகளைக் கொண்டது. அவையாவன: 1. அபிவிருத்தி 2. பின்னடைவு 3. வீழ்ச்சி 4. மீட்சி ஒவ்வொரு நிலையும் மெதுவாக மாறி மற்றொரு நிலையை அடைகிறது. பின்வரும் படம் ஒரு வணிக சுழலை தெளிவாக விளக்குகிறது.



ஒரு வியாபாரத்தை நிலை நிறுத்தத் தேவையான கொள்கை மாற்றங்களை உருவாக்குவதற்கு சுழல் மாறுபாடுகளைப் பற்றி அறிந்து கொள்வது மிக அவசியமாகிறது. வியாபாரிகள் அவர்களுடைய வணிகத்தின் வளர்ச்சி மற்றும் வீழ்ச்சி நிலைக் கேற்றவாறு அவர்களுடைய வியாபாரத்தை நிலைநிறுத்த தக்க நடவடிக்கைகள் எடுக்க சுழல் மாறுபாடுகள் உதவுகின்றன.

ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள்:

ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள் முறையற்ற மாறுபாடுகள் என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. இம்மாறுபாடுகள் முறையானவை அல்ல. இவை குறிப்பிட்ட வடிவத்தில் மீண்டும் மீண்டும் நிகழாது.

இம்மாறுபாடுகள் திடீரென ஏற்படும் போர், நிலநடுக்கம் வேலை நிறுத்தம், வெள்ளம் மற்றும் புரட்சி போன்றவற்றால் ஏற்படுகின்றன.

இம்மாறுபாடு ஒரு குறுகிய கால மாறுபாடு ஆகும். ஆனால் இது காலத் தொடர் வரிசையின் எல்லாப் பகுதிகளையும் பாதிக்கிறது. இம்முறையற்ற மாறுபாடுகளை அளவிடவோ, தனித்துப் பிரித்துக் கூறவோ எந்தவித புள்ளியியல் முறைகளும் இல்லை. ஒரு முறையான தொடர்புடைய பகுதிகள் அனைத்தையும் நீக்கிய பிறகு எஞ்சுகின்ற பகுதியே ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகளைக் குறிக்கிறது.

முன்கணிப்பு:

8.5 அறிமுகம்:

வருங்காலத்தின் வாய்ப்பு மதிப்புகளை முன்கணிப்பு செய்வதே காலத்தொடர் வரிசையின் முக்கிய பயனாகும். முன்கணிப்பு என்பது பெரும்பாலான நேரங்களில் மாறியின் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் மதிப்புகளுக்கு பொருத்திய நேர்கோட்டை போதுமான நீண்ட காலத்திற்கு விரிவாக்குவதே ஆகும். முன்கணிப்பு முறைகள் பற்றி விரிவாக பின்னர் விவரிக்கப்படும். பருவகால மற்றும் சுழற்சி காரணிகளைச் சரிபடுத்துதல் மூலம் போக்கினை விரிவாக்கம் செய்வதை அடிப்படையாகக் கொண்டு, முன்கணிப்பு செய்தல் செம்மைப்படுத்தப்படுகிறது. வணிகம் மற்றும் பொருளாதாரத் துறைகளில் திட்டமிடுதலிலும் மதிப்பீடு செய்வதிலும் முன்கணிப்பு முக்கிய பங்கு வகிக்கிறது. சமூகம், அரசியல் மற்றும் அரசு கொள்கைகள் போன்ற பல்வேறு விஷயங்களைக் கருத்தில் கொண்டு பொருத்தமான புள்ளியியல் முறைகளை உட்படுத்தி பெறப்படும் முன்கணிப்பு, தீர்மானம் மேற்கொள்வதற்கு அத்தியாவசியமாகிறது.

வருங்கால மதிப்பீடுகளை கணிப்பதைப் பொறுத்தே ஒரு வணிகத்தின் வெற்றி அமைகிறது. இந்த மதிப்பீடுகளின் அடிப்படையில் ஒரு வணிகர் அவருடைய உற்பத்தி, இருப்பு, விற்பனைச் சந்தை, கூடுதல் நிதியை ஏற்படுத்திக் கொள்ளுதல் போன்றவற்றை திட்டமிட இயலும். முன்கணிப்பு என்பது முன்கூட்டி யூகித்தல் அல்லது முன்னதாக விரிவாக்கம் செய்தல் என்பதிலிருந்து வேறுபடுகிறது. உடன் தொடர்புப் பகுப்பாய்வு, காலத்தொடர் வரிசை பகுப்பாய்வு, குறியீட்டெண்கள் போன்றவற்றின் மூலம் வருங்கால மதிப்புகளை யூகித்தல் மற்றும் விரிவாக்கம் செய்ய முடியும்.

மாறாக கடந்த காலம் மற்றும் தற்கால விவரங்களை பொருளாதாரக் கொள்கை மற்றும் சூழ்நிலைகளுக்கேற்றவாறு பகுப்பாய்வு செய்து வணிக செயற்பாடுகள் எவ்வாறு அமைய வேண்டும் என்பதைப் பற்றி முன்கூட்டியே கூறும் முறை` முன்கணிப்பு ஆகும்.

குறிப்பாக முன்கணிப்பு என்பது முன்னெச்சரிக்கையாகும். புள்ளியியல் பகுப்பாய்வினை அடிப்படையாக கொண்ட முன்கணிப்பு, யூகத்தின் அடிப்படையில் செய்யும் முன்கணிப்பை விட அதிக நம்பகத்தன்மை உடையது .

T.S. லெவிஸ் மற்றும் R.A.∴பாக்ஸ் (T.A. Levis and R.A. Fox) என்பவர்களின் கூற்றுபடி "கடந்த கால விவரங்களில் இருந்து வருங்காலத்தில் ஏற்படும் மாற்றங்களை மதிப்பீடு செய்வதே முன்கணிப்பு ஆகும்."

8.5.1 வணிக முன்கணிப்பு முறைகள்:

வணிக முன்கணிப்பை அளவிடுவதில் மூன்று முறைகள் உள்ளன.

1. நேவி முறை (Naivie)
2. பாரோமெட்ரிக் முறைகள் (Barometric)
3. பகுப்பு முறைகள் (Analytical)

1. நேவி முறை :

இது பொருளாதார ஏற்ற இறக்கக் கொள்கையை மட்டுமே கொண்டது.

2. பாரோமெட்ரிக் முறைகள்

இது பின்வரும் முறைகளை உள்ளடக்கியது.

(i) குறிப்பிட்ட வரலாற்று ஒப்புடைமை
(ii) ஏற்ற - இறக்க உறவுகள்
(iii) பரவுதல் முறை
(iv) செயல் - எதிர்செயல் கொள்கை

3. பகுப்பு முறைகள்:

இது பின்வரும் முறைகளைக் கொண்டது

1. காரணி பட்டியல் முறை
2. குறுக்கு வெட்டுப் பகுப்பாய்வு
3. அடுக்குகுறி வளைவரையை சீராக்குதல்
4. கணித சார் பொருளியியல் முறைகள்

பொருளாதார ஏற்ற இறக்கக் கொள்கை:

இம்முறையில் ஒரு உற்பத்தியாளர் தன் சொந்த நிறுவனத்தின் காலத் தொடர் வரிசை விவரங்களை ஆராய்ந்து அவற்றின் விரிவாக்கத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு முன்கணிப்பு செய்தல்

ஆகும். இம்முறையில் பகுப்பாய்வு செய்யப்பட்ட விவரங்கள் ஒரு தனி நிறுவனத்திற்கு மட்டுமே பொருந்தும். மேலும், இம்முறையில் பெறப்பட்ட முன்கணிப்பு நம்பகத் தன்மை வாய்ந்தவை அல்ல.

வணிக முன்கணிப்பில் பரவுதல் முறை:

இந்த முறை, ஒரு வணிகத்தை பாதிக்கக் கூடிய வெவ்வேறு காரணிகள் ஒரே சமயத்தில் ஏற்றத்தையோ இறக்கத்தையோ அடைய இயலாது என்ற கொள்கையை அடிப்படையாகக் கொண்டது. அவற்றிற்கிடையே எப்பொழுதும் ஒரு காலத்தடை இருக்கும். எத்தொடர் முன்னோக்கி உள்ளது மற்றும் எது பின் தங்கி உள்ளது என்பதை சுட்டிக் காட்ட இயலும் வசதி இந்த முறையில் உள்ளது. தனித்தனி தொடர்களை மட்டும் கருதாமல் பல தொடர்களை ஒன்றாக சேர்த்து அவற்றின் மாற்றங்களை விரித்துரைப்பதே பரவுதல் முறை ஆகும். ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் தொகுதி எந்த வீதத்தில் விரிவடைகிறது என்பதைக் காட்டுகிறது. பரவல் குறியீட்டின் ஏற்ற இறக்கம் வணிக சுழற்சியின் ஏற்ற இறக்கத்தைக் குறிக்காது என்பதை கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும். எல்லாத் தொடர்களும் ஒருமித்து விரியவோ சுருங்கவோ செய்யாது. கொடுக்கப்பட்ட காலத்தில் ஐம்பது சதவீதத்திற்கும் அதிகமான தொடர்கள் விரிவடையுமெனில் அவ்வணிகம் செழிப்பு நிலையில் உள்ளது எனலாம்.மேலும் ஒரு வணிகம் செழிப்பு நிலையில் இருந்தால் ஐம்பது சதவீதத்திற்கும் மேலான தொடர்கள் விரிவடையும் எனலாம்.

பரவல் குறியீடு வழக்கமாக வரைபட முறையில் குறிப்பிடப் படுகிறது. விலைவாசி, முதலீடு, இலாபம் போன்ற வணிக மாறிகளுக்கு பரவல் குறியீடு அமைக்கப்படுகிறது.

வணிக முன்கணிப்பில் குறுக்கு வெட்டுக் கொள்கை:

இம்முறையில் நடைமுறைச் சூழலுக்கேற்ப அனைத்துக் காரணிகளிலும் முழுமையான பகுப்பாய்வு மேற்கொண்டு அக்காரணிகளால் ஏற்படும் கூட்டு விளைவுகள் மதிப்பீடு செய்யப்படுகின்றன.முன்கணிப்பு செய்வதற்கு முன்பாக இம்முறையில் நிர்வாக அலுவலர்கள், பொருளாதார வல்லுநர்கள் நுகர்வோர் போன்றோரின் கருத்துகள் கணக்கில் எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது. ஒரு வணிகத்தின் வருங்கால நிலைமையை முன்கணிப்புசெய்வதற்கு எல்லா காரணிகளின விளைவுகளின் மதிப்பிட்டை அடிப்படையாகக் கொள்ளலாம்.

பயிற்சி - 8

I. சரியான விடையைத் தேர்வு செய்க.

1. காலத்தொடர்வரிசையில் உள்ள பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை
   அ) இரண்டு ஆ) மூன்று
   இ) நான்கு ஈ) ஐந்து
2. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது பருவகால மாறுபாடுகள் உண்டாகக் காரணமானது
   அ) தட்ப வெப்பநிலை ஆ) சமுதாய பழக்கங்கள்
   இ) பண்டிகைகள் ஈ) இவை அனைத்தும்
3. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எதனைக் கணக்கிட எளிய சராசரி முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது.
   அ) போக்கு மதிப்புகள் ஆ) சுழல் மாறுபாடுகள்
   இ) பருவகால குறியீடுகள் ஈ) இவற்றில் எதுவும் இல்லை
4. ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள என்பவை
   அ) முறையானவை ஆ) சுழல் மாறுபாடுகள்
   இ) முறையற்றவை ஈ) இவற்றில் எதுவும் இல்லை
5. போக்குக்கோட்டின் சாய்வு நேரிடை எனில் இது காட்டுவது?
   அ) ஏறும் போக்கு ஆ) இறங்கும் போக்கு
   இ) நிலைத்தன்மை ஈ) மேற்கூறியவற்றுள் எதுவும் இல்லை
6. ஒரு பல்பொருள் அங்காடியில் தீபாவளி சமயத்தில்ஆகும்விற்பனையானது பின்வரும் காலத் தொடர் வரிசையில் தொடர்புடைய பிரிவானது
   அ)போக்கு ஆ) பருவ கால மாறுபாடுகள்
   இ) ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள் ஈ) மேற்கூறிய அனைத்தும்
7. காலத் தொடர் வரிசையில் ‘நீண்ட கால மாறுபாடு’ என்பதின் தொடர்புடைய பிரிவானது
   அ) சுழல் மாறுபாடு ஆ) பருவ கால மாறுபாடு
   இ) ஒழுங்கற்ற மாறுபாடு ஈ) மேற்கூறிய அனைத்தும்
8. தொழில் முன்கணிப்பு என்பதனை மேற்கொள்ள அடிப்படையானது
   அ) தற்கால விவரங்கள் ஆ) கடந்த கால விவரங்கள்
   இ) சூழ்நிலைக் கொள்கைகள் ஈ) மேற்கூறப்பட்ட அனைத்தும்
9. கணிதம் சார் பொருளியியல் முறை உள்ளடக்கியது
   அ) பொருளியியல் மற்றும் கணிதம்
   ஆ) பொருளியியல் மற்றும் புள்ளியியல்
   இ) பொருளியியல், புள்ளியியல் மற்றும் கணிதம்
   ஈ) மேற்கூறியவற்றுள் எதுவும் இல்லை

10. பொருளாதார ஏற்ற இறக்கக் கோட்பாடு கொண்டுள்ள பிரிவின் வகையானது
அ) பகுப்பாய்வு முறைகள் ஆ) 'நேவி முறை'
இ) அளவீட்டு முறைகள் ஈ) எதுவும் இல்லை

II. கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக:

11. 'காலத் தொடர் வரிசை' என்பது கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை __________ ஒழுங்குபடுத்துவது ஆகும்.
12. ஒரு காலத் தொடர் வரிசையில் காணப்படும் காலாண்டு ஏற்ற இறக்கங்களை தெரிவுசெய்வது _________ மாறுபாடு ஆகும்.
13. வணிகம் சார் காலத் தொடர் வரிசையில் மீண்டும், மீண்டும் ஏற்படும் மாறுபாடுகள் _________ என்று அழைக்கப்படுகின்றன.
14. ஒரு முழு சுழற்சியானது __________ நிலைகளை கொண்டது.
15. காலத் தொடர் வரிசையின் முழுமையான ஏறுகின்ற அல்லது இறங்குகின்ற நிலை ___________ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.
16. மீச்சிறு வர்க்க முறையினால் பெறப்படும் போக்குக் கோடு ______ ஆகும்.
17. முன்கணிப்பு என்பது ______ மற்றும் ______லிருந்து வேறுபட்டது.
18. ______ அளவிடுவதற்கு அல்லது தனிமைப்படுத்துவதற்கு புள்ளியியல் யுத்தி எதுவும் இல்லை.
19. காலத்தொடர் வரிசை என்றால் என்ன?
20. காலத்தொடர் வரிசையின் பிரிவுகள் யாவை?
21. பருவகால மாறுபாடுகளைப் பற்றி சுருக்கமாக கூறுக.
22. சுழல் மாறுபாடு என்றால் என்ன?
23. போக்கினை அளவிடும் வெவ்வேறு முறைகளின் பெயர்களைக் கூறுக.
24. அரை சராசரியின் நிறை, குறைகளைக் கூறுக.
25. காலத் தொடர் பகுப்பாய்வின் கணிதவியல் முறைகளை விவரி
26. காலத் தொடர் வரிசையில் உள்ள ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள் பிரிவினை விவரி
27. தொழில் முன்கணிப்பு பற்றி நீவிர் அறிந்தவற்றைப் பற்றி விவரி.
28. முன்கணிப்பை அளவிடும் வெவ்வேறு முறைகளை விவரி
29. முன்கணிப்பை பற்றிய ஏதேனும் ஒரு முறை பற்றி சிறு குறிப்பு வரைக.
30. 'யூகித்தல்' மற்றும் வெளிப்படுத்துதல் என்பவற்றிலிருந்து முன் கணிப்பு எவ்வாறு வேறுபடுகிறது.

III. கணக்குகள்

31. வரைபடத்தின் உதவியுடன் போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

வருடம்	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
மதிப்பு	65	85	95	75	100	80	130

32. வரைபட முறையில் பின்வரும் விவரங்களுக்கு போக்குக் கோடு பொருத்துக.

வருடம்	1982	1983	1984	1985	1986	1987
மதிப்பு	24	22	25	26	27	26

33. அரைசராசரி முறையில் போக்குக் கோடு வரைக.

வருடம்	1993	94	95	96	97	98	99	2000
விற்பனை	210	200	215	205	220	235	210	235

34. ஒரு தொழிற்சாலையின் உற்பத்தி பின்வருமாறு அரை சராசரி முறையில் போக்குக் கோடு வரைக.

வருடம்	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
வெளியீடு	600	800	1000	800	1200	1000	1400

35. பின்வரும் விவரங்களுக்கு 3-வருட நகரும் சராசரி கணக்கிடுக.

வருடம்	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	15	18	17	20	23	25	29	33	36	40

36. ஒரு வணிக நிறுவனத்தின் 8 வருடங்களுக்கான இலாப விவரங்கள் பின்வருமாறு இதற்கான 3 வருட நகரும் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

வருடம்	இலாபம்	வருடம்	இலாபம்
1995	15,420	1999	26,120
1996	14,470	2000	31,950
1997	15,520	2001	35,370
1998	21,020	2002	35,670

37. பின்வரும் விவரங்களுக்கு மைய நிலைப்படுத்தப்பட்ட 4 வருட நகரும் சராசரி கணக்கிடுக.

வருடம்	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
இறக்குமதி செய்யப்பட்ட பஞ்சு கொள்முதல் ('000)	129	131	106	91	95	84	93

38. பின்வரும் விவரங்களுக்கு 4 வருடம் நகரும் சராசரியையும் போக்கு மதிப்பையும் அளவிடுக. கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளையும் போக்கு மதிப்புகளையும் வரைபடத்தில் குறித்து காட்டுக.

வருடம்	93	94	95	96	97	98	99	00	01	02
மதிப்பு	50	36.5	43	44.5	38.9	38.1	32.6	41.7	41.1	33.8

39. கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திற்கு 5 வருட நகரும் சராசரியை கணக்கிடுக.

வருடம்	1987	88	89	90	91	92	93	94
உற்பத்தி டன்களில்	4	5	6	7	9	6	5	7

வருடம்	95	96	97	98	99	2000	01	02
உற்பத்தி டன்களில்	8	7	6	8	9	10	7	9

40. பின்வரும் விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்க முறையில் பொருத்தமான நேர்க்கோடு வரைந்து போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

கூருடம்	1996	1997	1998	1999	2000
தொலைக்காட்சி பெட்டிகளின் விற்பனை (ரு '000)	4	6	7	8	10

41. ஒரு சர்க்கரை ஆலையின் உற்பத்தி விவரங்கள் 1000 குவிண்டால்களில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மீச்சிறு வர்க்க முறையில் போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

வருடம்	1994	95	96	97	98	99	2000
உற்பத்தி டன்களில்	80	90	92	83	94	99	92

42. பின்வரும் விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்க முறையில் பொருத்தமான நேர்க்கோடு வரைக.

வருடம்	1996	97	98	99	2000	2001
இலாபம்	300	700	600	800	900	700

43. பின்வரும் விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்க முறையில் பொருத்தமான நேர்க்கோடு வரைக. 2002 ம் வருடத்திற்கான ஊதிய விகிதத்ததை மதிப்பிடுக.

வருடம்	1993	94	95	96	97	98	99	2000
ஊதியம்	38	40	65	72	69	60	87	95

44. பின்வரும் விவரங்களுக்கு சராசரி மாறுபாடு கணக்கிடுக.

காலாண்டு

வருடம்	I	II	III	IV
1999	3.5	3.9	3.4	3.6
2000	3.5	4.1	3.7	4.0
2001	3.5	3.9	3.7	4.2
2002	4.0	4.6	3.8	4.5
2003	4.1	4.4	4.2	4.5

45. பின்வரும் காலத் தொடர் வரிசையில் பருவ கால மாறுபாடுகளைக் காண்க. நான்கு வருடங்களின் நிலக்கரி காலாண்டு உற்பத்தி அளவு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

வருடம்

காலாண்டு	2000	2001	2002	2003
I	65	58	70	60
II	58	63	59	55
III	56	63	56	51
IV	61	67	52	58

விடைகள்

I.

1. (இ) 2.(ஈ) 3. (இ) 4. (இ) 5. (அ)
6. (ஆ) 7. (அ) 8.(ஈ) 9. (இ) 10.(ஆ)

II.

11. காலம்சார் 12. பருவ கால 13. சுழல்கள்
14. நான்கு 15. போக்கு
16. மிகப்பொருத்தமான நேர்கோடு
17. யூகித்தல் , விரிவாக்குதல்
18. முறையற்ற மாறுபாடுகள்

III.

33. போக்கு மதிப்புகளாவன 200.94, 205.31, 209.69, 214.06, 218.43, 222.80, 227.19, 231.56

34. 700, 800, 900, 1000, 1100, 1200, 1300

35. 16.7, 18.3, 20, 22.7, 25.7, 29, 32.7, 36.3

36. 15137, 17003, 20363, 26363, 31.147, 34330

37. 110.0, 99.88, 92.38

38. 42.1, 40.9, 39.8, 38.2, 38.1, 37.8,

39. 6.2, 6.6, 6.6 , 6.8, 7.0, 6.6, 6.6, 7.2, 7.6, 8.0, 8.0

40. போக்கு மதிப்புகளாவன 4.2 , 5.6 , 7, 8.4, 9.8

41. 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96

42. 446.67, 546.67, 626.67, 706.67, 786.67, 866.67

43. 40.06, 47.40, 54.74, 62.08, 69.42, 76.76, 84.10, 91.44

44. 94.18, 105.82, 95.19, 105.32

45. 106.4, 98.7, 94.9,100

9. பண்புசார் கோட்பாடுகள்

9.0 அறிமுகம்:

பொதுவாக புள்ளியியல் என்பது எண்ணளவை விவரங்களுடன் தொடர்புடையது. ஆனால் நடத்தை சார் அறிவியலில் எண் அளவுகள் மூலம் அளவிட இயலாத பண்புகளை மாறிகளாகக் கருத வேண்டியுள்ளது. சரியாக கூறவேண்டும் எனில் பண்பு என்பது தனி இயல்பு அல்லது குண நலனைக் குறிக்கின்றது. எண்சார் அளவீடுகளுடன் தொடர்பில்லாத பண்புசார் குணங்களைப் பற்றி தெரிந்து கொள்வதே 'பண்பு சார் கோட்பாடு' களின் நோக்கமாகும். எடுத்துக்காட்டாக உடல்நலம், நேர்மை, குருட்டுத்தன்மை போன்ற பண்புகளை நேரிடையாக அளக்க இயலாது. ஆனால் இப்பண்புகள் ஒருவரிடம் உள்ளதா அல்லது இல்லையா என்பதை நம்மால் காண இயலும். பண்புசார் புள்ளியியல் என்பது பண்புகளின் விளக்கத் தன்மையை அடிப்படையாகக் கொண்டது.

9.1 குறியீடுகள்:

ஒரு குறிப்பிட்ட பண்பு 'உண்டு' அல்லது 'இல்லை' என்பதைப் பற்றி 'பண்புகளின் உறவுகள்' என்ற தலைப்பில் படிக்கலாம். ஒரே ஒரு பண்பினை மட்டும் கருத்தில் கொண்டால் முழுமைத் தொகுதியானது, அந்த பண்பினைப் பொறுத்து அப்பண்பு உள்ள தொகுதி, பண்பு இல்லாத தொகுதி என இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. மேலும் அத்தகைய பாகுபாடு 'இரு பிரிவுப் பாகுபாடு' (dichotomy) எனப் படுகிறது.

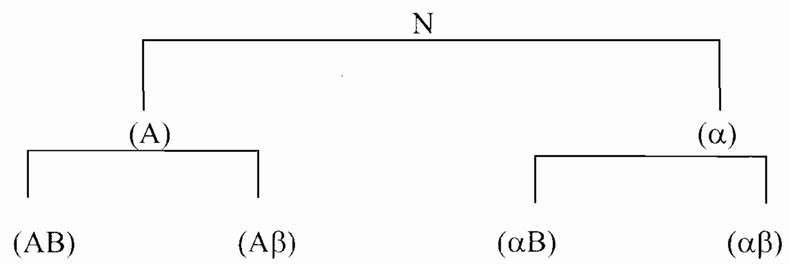
இத்தகைய பிரிவு ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட பண்புகளின் அடிப்படையில் பல பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டால் அத்தகைய பாகுபாடு 'பல பண்புப் பாகுபாடு' (manifold attribute) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

பொதுவாக பண்பினப் பாகுபாட்டில், இடம் பெறுகின்ற பண்புகள், உள்ள பிரிவுகளை 'நேரிடைப் பிரிவுகள்' (Positive classes) என்றும் அவை A, B, C ... என்ற ஆங்கிலப் பெரிய எழுத்துக்களாலும், அப்பண்புகள் இல்லாத பிரிவுகளை ' எதிரிடைப் பிரிவுகள்' (Negative Classes) என்றும் அவை α, β, γ ... என்ற கிரேக்க எழுத்துக்களாலும் குறிக்கப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, A என்பது ' கல்வியறிவு' என்ற

பண்பையும் B என்பது 'குற்றவாளி' என்பதையும் குறிப்பிட்டால் α, β என்பன முறையே 'கல்வியறிவற்ற' 'குற்றவாளி அல்ல' என்ற பண்புகளையும் குறிக்கின்றன.

9.2 பிரிவுகள் மற்றும் பிரிவு அலைவெண்கள்:

வெவ்வேறு பண்புகள், அவற்றின் உட்பிரிவுகள் மற்றும் அவற்றின் சேர்வுகள் ஆகியவை வெவ்வேறு பிரிவுகளாக கருதப்படுகின்றன. அவற்றிற்கு ஒதுக்கப்பட்ட கண்டறிந்த மதிப்புகள் அந்த பிரிவுகளின் அலைவெண்கள் என கருதப்படுகின்றன. இரு பண்புகளைப்பற்றி படிக்கும் பொழுது 9 பிரிவுகள் கிடைக்கின்றன. அதாவது, (A) , (α), (B), (β), (A B) (A β), (α B), (α β) , N. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படம் இதனை தெளிவாக்கும்.



ஒரு பிரிவில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதன் அலைவெண் என்றும், அப்பிரிவு அடைவு குறியீடு மூலமும் குறிப்பிடப்படுகிறது. அதாவது (A) என்பது A பண்பினைப் பெற்றவர்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையையும், (AB) என்பது A,B என்ற இரு பண்புகளையும் ஒருங்கே பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கையையும் குறிக்கின்றது. A,B என்ற இரு பண்புகளுக்கான நேர்வு பட்டியலில் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்தப்படுகிறது.

	A	α	மொத்தம்
B	(AB)	(αB)	(B)
β	(Aβ)	($\alpha\beta$)	(β)
மொத்தம்	(A)	(α)	N

பிரிவு அலைவெண்களுக்கிடையிலான தொடர்பு:

எப்பொழுதும் மேல்நிலைப்பிரிவு அலைவெண்கள் மூலமாக கீழ்நிலைப்பிரிவு அலைவெண்களை எழுத இயலும்.

$$N = (A) + (\alpha) = (B) + (\beta)$$

$$(A) = (AB) + (A\beta)$$

$$(\alpha) = (\alpha B) + (\alpha\beta)$$

$$(B) = (AB) + (\alpha B)$$

$$(\beta) = (A\beta) + (\alpha\beta)$$

பண்புகளின் எண்ணிக்கை 'n' எனில் 3^n என்ற பிரிவுகளும் 2^n என்ற கட்ட அலைவெண்களும் கிடைக்கும்.

9.3 புள்ளி விவரத்தின் பொருத்தமுடைமை :

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள் பொருத்தமுடையனவா இல்லையா என்பதை அறிய ஒரு எளிய சோதனையை மேற்கொள்ள வேண்டும். கிடைக்கின்ற எல்லா பிரிவு அலைவெண்களில் ஒரு பிரிவு அலைவெண்ணோ ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட பிரிவுகளின் அலைவெண்ணோ குறை எண்ணாக இருக்கின்றனவா என காண வேண்டும். குறை எண்ணை அலைவெண்ணாக உடைய எந்த ஒரு பிரிவும் இல்லையெனில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் பொருத்தமுடையன (அதாவது எல்லா அலைவெண்களும் ஒன்றுடன் ஒன்று எவ்வகையிலும் முரண்படாது) மாறாக ஏதேனும் ஒரு பிரிவு அலைவெண் குறை எண்ணாக இருந்தால் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் பொருத்த முடையவை இல்லை அல்லது முரணானவை என அறியலாம்.

எனவே ஒன்றையொன்று சாராத பிரிவுகளின் அலைவெண்கள் எதுவும் குறை எண்கள் இல்லை என்ற விவரங்கள் பொருத்தமுடைமைக்கு தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை ஆகும்:

எடுத்துக்காட்டு 1 :

வழக்கமான குறியீடுகளின் படி N = 2500, (A) = 420, (AB) = 85, (B) = 670 என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. விடுபட்ட மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$$N = (A) + (\alpha) = (B) + (\beta) \text{ ------- } (1)$$

$$(A) = (AB) + (A\beta) \text{ ------------- } (2)$$

$$(\alpha) = (\alpha B) + (\alpha\beta) \text{ ------------ } (3)$$

$$(B) = (AB) + (\alpha B) \text{ ---------- } (4)$$

$$(\beta) = (A\beta) + (\alpha\beta)$$

(2) லிருந்து $420 = 85 + (A\beta)$

$\therefore \quad (A\beta) = 420 - 85$

$(A\beta) = 335$

(4) லிருந்து $670 = 85 + (\alpha B)$

$\therefore \quad (\alpha B) = 670 - 85$

$(\alpha B) = 585$

(1) லிருந்து $2500 = 420 + (\alpha)$

$\therefore \quad (\alpha) = 2500 - 420$

$(\alpha) = 2080$

(1) லிருந்து $(\beta) = 2500 - 670$

$(\beta) = 1830$

(3) லிருந்து $= 2080 = 585 + (\alpha\beta)$

$\therefore (\alpha\beta) = 1495$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

வழக்கமான குறியீடுகளில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் பொருத்தமுடைமையை ஆராய்க.

$$N = 1000, (A) = 600, (B) = 500, (AB) = 50$$

தீர்வு:

	A	α	மொத்தம்
B	50	450	500
β	550	-50	500
மொத்தம்	600	400	1000

$(\alpha\beta) = -50$ என்பது ஒரு குறை எண். எனவே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் பொருத்தமுடைமையில் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் பொருத்தமுடையனவா என ஆராய்க.

$$N = 60, (A) = 51, (B) = 32, (AB) = 25$$

தீர்வு:

	A	α	மொத்தம்
B	25	7	32
β	26	2	28
மொத்தம்	51	9	60

எல்லா அலைவெண்களும் மிகை எண்களாக இருப்பதால் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் பொருத்தமுடையவை ஆகும்.

9.4 பண்புகளின் சார்பற்ற தன்மை:

இரு பண்புகளுக்கிடையே தொடர்பு இல்லையெனில், அதாவது A, B என்ற பண்புகளில் 'A' என்ற பண்பு 'உண்டு' அல்லது 'இல்லை' என்பது மற்றொரு பண்பு B 'உண்டு' அல்லது 'இல்லை' என்பதைப் பொறுத்து அமையாது எனில் அவ்விரு பண்புகளும் சார்பற்றவை எனலாம். எடுத்துக்காட்டாக ஒருவரின் 'நிறம்' 'புத்தி கூர்மை' என்ற இரு பண்புகளும் சார்பற்ற பண்புகள் ஆகும். A , B என்ற இரு பண்புகளும் சார்பற்றவை எனில் A,B என்ற இரு பண்புகளும் ஒருங்கே நிகழ்வதற்குரிய அலைவெண், Nல் A பண்பு நிகழ்வதற்குரிய அலைவெண் × Nல் B-பண்பு நிகழ்வதற்குரிய அலைவெண்ணிற்கு சமம்.

அதாவது (AB) ன் காணப்படுகின்ற அலைவெண் (AB) ன் எதிர்பார்க்கபடும் அலைவெண்ணிற்கு சமம் எனில் A, B சார்பற்றவை ஆகும்.

அதாவது $\quad (AB) = \dfrac{(A).(B)}{N}$

இதேபோல் $\quad (\alpha\beta) = \dfrac{(\alpha).(\beta)}{N}$

9.4.1 பண்புகளின் தொடர்பு (உறவு) :

A, B என்ற இரு பண்புகள் ஏதேனும் ஒரு விதத்தில் ஒன்றை ஒன்று சார்ந்து, அமையும் எனில் அதாவது ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்புடையது எனில் A, B பண்புகள் தொடர்புடையவை ஆகும்.

மேலும் $(AB) > \dfrac{(A).(B)}{N}$ எனில் A மற்றும் B ஆகியவை நேரிடையாகத் தொடர்புடையவை எனவும் $(AB) < \dfrac{(A).(B)}{N}$ எனில் அவை எதிரிடைத் தொடர்புடையவை எனவும் அழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து A,B என்ற பண்புகள் சார்பற்றவையா அல்லது நேரிடைத் தொடர்புடையவையா அல்லது எதிரிடைத் தொடர்புடையவையா எனக் காண்க.

$$(AB) = 128, \ (\alpha B) = 384, \ (A\beta) = 24, \ (\alpha\beta) = 72$$

தீர்வு :

$$(A) = (AB) + (A\beta)$$
$$= 128 + 24$$
$$(A) = 152$$
$$(B) = (AB) + (\alpha B)$$
$$= 128 + 384$$
$$(B) = 512$$
$$(\alpha) = (\alpha B) + (\alpha\beta)$$
$$= 384 + 72$$
$$\therefore (\alpha) = 456$$
$$(N) = (A) + (\alpha)$$
$$= 152 + 456$$
$$= 608$$
$$\frac{(A)\times(B)}{N} = \frac{152\times512}{608} = 128$$
$$(AB) = 128$$
$$\therefore (AB) = \frac{(A)\times(B)}{N}$$

எனவே A யும் B யும் சார்பற்றவை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5:

பின்வரும் விவரங்களில் இருந்து A, B க்கிடையில் உள்ள உறவின் தன்மையைக் காண்க.

1) N = 200	(A) = 30	(B) = 100	(AB) = 15
2) N = 400	(A) = 50	(B) = 160	(AB) = 25
3) N = 800	(A) = 160	(B) = 300	(AB) = 50

தீர்வு:

1. (AB) ன் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் $(AB) = \frac{(A).(B)}{N}$

$$= \frac{(30)(100)}{200} = 15$$

காணப்படும் அலைவெண் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்ணிற்கு சமம்.: அதாவது 15 =15

எனவே A மற்றும் B சார்பற்றவை ஆகும்

2. (AB) ன் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் $(AB) = \frac{(A).(B)}{N}$

$$= \frac{(50)(160)}{400} = 20$$

காணப்படுகின்ற அலைவெண் > எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் அதாவது 25 > 20

எனவே A, B நேரிடை தொடர்புடையவை ஆகும்.

3. (AB) ன் எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண்

$$(AB) = \frac{(A).(B)}{N} = \frac{(160)(300)}{800} = 60$$

காணப்படுகின்ற அலைவெண் < எதிர்பார்க்கப்படும் அலைவெண் அதாவது 50 < 60

எனவே A,B எதிரிடைத் தொடர்புடையவை ஆகும்.

9.5 'யூலின் தொடர்புக் (உறவு) கெழு:

மேலே கூறப்பட்ட எடுத்துக்காட்டு A, B க்கிடையே எவ்வகை உறவு உள்ளது என்பதை கூறுகிறதே தவிர அவ்வுறவின் அளவை

விளக்கவில்லை. பேராசிரியர் G. ஊன்டி யூல் (G. Undy Yule) என்பவர் தொடர்பின் அளவை அளவிடுவதற்கு ஒரு வாய்பாட்டினைக் கூறினார். இது A, B பண்புகளுக்கிடையிலான 'சார்பு அளவை' ஆகும். A, B, α மற்றும் β என்பவற்றின் நான்கு வெவ்வேறு சேர்வுகள் (AB), (αB), $(A\beta)$ மற்றும் $(\alpha\beta)$ எனில் யூலின் பண்பு உறவுக்கெழு ஆனது

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta).(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta).(\alpha B)}$$

குறிப்பு:

1. Q = + 1 எனில் A, B க்கிடையே முழுமையான நேரிடை உறவு உள்ளது.

   Q = −1 எனில் A, B க்கிடையே முழுமையான எதிரிடை உறவு உள்ளது.

   Q = 0 எனில் A, B அவற்றிற்கிடையே உறவு இல்லை.

   அதாவது A மற்றும் B சார்பற்றவை
2. இதை நினைவில் வைத்து கொள்வதற்கு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

	A	α
B	AB	αB
β	$A\beta$	$\alpha\beta$

எடுத்துக்காட்டு 6:

கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தில் இருந்து தந்தை மற்றும் மகன் கண்களின் கருமை நிறங்களுக்கிடையிலான உறவின் தன்மையை ஆராய்க.

கருமை நிறக் கண்களுடைய மகன்களைப் பெற்ற கருமை நிறக் கண்களுடைய தந்தையர் = 50

கருமை நிறமற்ற கண்களுடைய மகன்களைப் பெற்ற கருமை நிறக் கண்களுடைய தந்தையர் = 79

கருமை நிறக் கண்களுடைய மகன்கள் கருமை நிறமற்ற கண்களுடைய தந்தையர் = 89

கருமை நிறமற்ற கண்களுடைய மகன்கள், கருமை நிறமற்ற கண்களுடைய தந்தையர் = 782

தீர்வு :

'A' என்பது கருமை நிறக் கண்களைப் பெற்ற தந்தையும் 'B' என்பது கருமை நிறக் கண்களைப் பெற்ற மகன்களையும் குறிக்கட்டும்.

	A	α	மொத்தம்
B	50	89	139
β	79	782	861
மொத்தம்	129	871	1000

'யூல்' உறவு கெழு

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta)-(A\beta).(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta)+(A\beta).(\alpha B)}$$
$$= \frac{50\times 782-79\times 89}{50\times 782+79\times 89}$$
$$= \frac{32069}{46131} = 0.69$$

தந்தை மகன்களின் கண்களுக்கிடையே முழுமையான நேரிடை உறவு உள்ளது எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு 'அம்மை குத்துதலை' ஒரு தடுப்பு முறையாக ஏற்றுக் கொள்ளலாமா என ஆராய்க.

அம்மை நோயால் பாதிக்கக்கூடிய சூழ்நிலையில் உள்ள 1482 பேர்களில் 368 பேர் அம்மை நோயால் பாதிக்கப்பட்டனர். அந்த 1482 பேரில் 343 பேர் தடுப்பு ஊசி போடப்பட்டவர்கள். அவர்களில் 35 பேர்கள் அம்மையால் பாதிக்கப்பட்டனர்.

தீர்வு:

'A' என்பது அம்மை குத்தி கொண்டவர்களையும் 'B' என்பது அந்நோயால் பாதிக்கப்பட்டவர்களையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

	A	α	மொத்தம்
B	35	333	368
β	308	806	1114
மொத்தம்	343	1139	1482

'யூல்' தொடர்பு கெழு

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta)-(A\beta).(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta)+(A\beta).(\alpha B)}$$
$$= \frac{35\times 806-308\times 333}{35\times 806+308\times 333}$$
$$= \frac{-74354}{130774} = -0.57$$

அதாவது 'அம்மை குத்துதலுக்கும் 'பாதிக்கபட்டவர்களுக்கும் இடையே எதிரிடைத் தொடர்பு உள்ளது. இதையே 'அம்மைகுத்துதலுக்கும்' பாதிக்கப்படாமைக்கும் நேரிடையான தொடர்பு உள்ளது எனலாம். எனவே அம்மை குத்திக் கொள்வதன் மூலம் இந்நோயை தடுக்க இயலும் என்ற முடிவிற்கு வரலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8:

இருபாலர் பயிலும் ஒரு கல்வி நிலையத்தில் படிக்கும் 200 பேர்களில் 150 பேர் மாணவர்கள். அவர்களில் 120 பேர் தேர்வில் தேர்ச்சி அடைந்தனர். 10 மாணவிகள் தோல்வியுற்றனர். தேர்வில் 'வெற்றி பெற்றமைக்கும் பாலினத்திற்கும் இடையே ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதா என ஆராய்க.

தீர்வு:

$N = 200 \quad (A) = 150 \quad (AB) = 120 \quad (\alpha\beta) = 10$

'A' என்பது மாணவர்களையும் 'α' என்பது மாணவியரையும் குறிக்கட்டும்.

'B' என்பது தேர்வில் வெற்றி பெற்றவரையும் β என்பது தோல்வி அடைந்தவரையும் குறிக்கட்டும்.

நமக்கு கொடுக்கப்பட்டவை N =200

மற்ற அலைவெண்களை கீழ்க்கண்ட அட்டவணை மூலம் கணக்கிடலாம்.

	A	α	மொத்தம்
B	120	40	160
β	30	10	40
மொத்தம்	150	50	200

யூல் தொடர்புக் கெழு

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta).(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta).(\alpha B)}$$

$$= \frac{120\times10 - 30\times40}{120\times10 + 30\times40} = 0$$

எனவே, தேர்வில் வெற்றி பெறுதலுக்கும் ' பாலினத்திற்கும்' தொடர்பு இல்லை என அறியலாம்.

நினைவு கூர்க

(A), (B) என்பவை நேரிடை பண்புகள்

(α) , (β) என்பவை எதிரிடை பண்புகள்

	A	α	மொத்தம்
B	(AB)	(αB)	(B)
β	$(A\beta)$	$(\alpha\beta)$	(β)
மொத்தம்	(A)	(α)	N

மொத்தம் நேர்குத்தாக

$(AB) + (A\beta) = (A)$

$(\alpha B) + (\alpha\beta) = (\alpha)$

$(B) + (\beta) = N$

மொத்தம் கிடையாக

$(AB) + (\alpha B) = (B)$

$(A\beta) + (\alpha\beta) = (\beta)$

$(A) + (\alpha) = N$

உறவுகளின் தன்மைகள்

$(AB) > \frac{(A).(B)}{N}$ எனில் நேரிடைத் தொடர்பு

$(AB) < \frac{(A).(B)}{N}$ எனில் எதிரிடைத் தொடர்பு

$(AB) = \frac{(A).(B)}{N}$ எனில் அவை சார்பற்றவை

யூல் தொடர்புக் கெழு

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta).(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta).(\alpha B)}$$

பயிற்சி - 9

I. சரியான விடையைத் தெரிந்து எடுக்கவும்:

1. 'உறவுகளின் அளவை' என்பது வழக்கமாக கீழ்க்கண்டவற்றுள் எதனுடன் தொடர்புடையவை.
   (அ) பண்புகள் (ஆ) எண்சார் காரணிகள்
   (இ) மாறிகள் (ஈ) எண்கள்
2. ஒரு பிரிவின் அலைவெண் என்பது எப்பொழுதும் எவ்வரிசை அலைவெண்களின் கூடுதலைக் கொண்டது .
   (அ) கீழ்வரிசை பிரிவுகள் (ஆ) மேல்வரிசை பிரிவுகள்
   (இ) பூஜ்ஜிய வரிசை பிரிவுகள் (ஈ) இவற்றில் எதுவும் இல்லை
3. இரு பண்புகளைக் கருதும் போது பிரிவு அலைவெண்களின் எண்ணிக்கை
   (அ) இரண்டு (ஆ) நான்கு
   (இ) எட்டு (ஈ) ஒன்பது
4. A,B என்ற இரு பண்புகளுக்கு $AB > \frac{(A).(B)}{N}$ எனில் அவ்விரு பண்புகளும்
   (அ) சார்பற்றவை
   (ஆ) நேரிடைத் தொடர்பு உடையவை
   (இ) எதிரிடைத் தொடர்பு உடையவை
   (ஈ) ஒரு முடிவிற்கும் வர இயலாது
5. A, B என்ற இரு பண்புகளுக்கு $(AB) = 0$ எனில் Q ன் மதிப்பு
   (அ) 1 (ஆ) -1
   (இ) 0 (ஈ) $-1 \le Q \le 1$

II. கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக

6. ஒரு பண்பு இரு பிரிவுகளை கொண்டிருந்தால் அது ________ என்று அழைக்கப்படும்.
7. விவரங்கள் பொருத்தமுடைமை பெற்றிருப்பின் எந்த பிரிவு அலைவெண்ணும் ________ இருக்க இயலாது.
8. A, B என்ற பண்புகள் ஒன்றை ஒன்று சாராதவை எனில் யூலின் கெழுவானது ________
9. A, B என்பவை எதிரிடைப் பண்புகளைப் பெற்றிருப்பின் ________

10. $N = 500, (A) = 300, (B) = 250$ மற்றும் $(AB) = 40$ என்ற விவரங்கள் ________

III. கீழ்க்கண்டவற்றிற்கு விடையளி:

11. பண்பின பாகுபாட்டில் பயன்படுத்தப்படும் குறியீடுகளைப் பற்றி சுருக்கமாக கூறுக.
12. பலவித பண்புகளின் அலைவெண்கள் எவ்விதம் நேர்வுபட்டியலில் அமைக்கப்படுகின்றன?
13. 'பொருத்தமுடைமை' விவரங்கள் பற்றி நீவிர் புரிந்து கொண்டது என்ன?
14. பண்புகளின் உறவு பற்றி சுருக்கமாக விவரிக்கவும்.
15. யூலின் தொடர்புக் கெழுவை கூறுக.

IV. கணக்குகள்

16. A,B என்ற இரு பண்புகளுக்கு $(AB) = 35, (A) = 55, N=100$ $(B) = 65$.எனில் விடுபட்ட மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.
17. பின்வரும் பண்பு அலைவெண்களில் இருந்து நேர்பண்புகள் மற்றும் எதிர் பண்புகளின் அலைவெண்களையும் மொத்த எண்ணிக்கையும் காண்க. $(AB) = 9, (A\beta) = 14, (\alpha B) = 4$ $(\alpha\beta) = 37$
18. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் $N = 100, (A) = 75, (B) = 60$ $(AB) = 15$ என்பன பொருத்தமுடைமை உடையனவா என சரிபார்க்கவும்.
19. $(AB) = 256$ $(\alpha B) = 768$ $(A\beta) = 48$ $(\alpha\beta) = 144$ என்ற விவரங்களில் இருந்து A மற்றும் B என்பன சார்பற்ற பண்புகளா என ஆராய்க
20. நுகர்வோர் விருப்பத்தை பற்றிய ஆய்வறிக்கையில் 500 பேரில் 410 பேர் A வகையையும் 380 பேர் B வகையையும் 270 பேர் இரண்டையும் விரும்புகின்றனர். இவ்விவரங்கள் பொருத்த முடைமை தன்மை பெற்றுள்ளதா எனக் காண்க.
21. A, B என்ற இரு பண்புகளுக்கு $(AB) = 35, (A) = 55, N =100,$ $(\alpha\beta) = 20$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விவரங்களுக்கு யூலின் தொடர்புக் கெழுவைக் காண்க.
22. $N = 1500, (A) = 383, (B) = 360$ மற்றும் $(AB) = 35.$ இதற்கான 2×2 நேர்வுப்பட்டியலையும் யூலின் தொடர்புக் கெழுவையும் கணக்கிடுக. மேலும் இம்முடிவினை விளக்குக.

23. கீழ்க்கண்ட, கால்நடைகளுக்கான காசநோய் தடுப்பு அட்டவணையிலிருந்து யூல் தொடர்புக் கெழுவைக் காண்க.

	பாதிக்கப் பட்டவைகள்	பாதிக்கப் படாதவைகள்
தடுப்பு ஊசி போடப்பட்டவை	12	26
தடுப்பு ஊசி போடப்படாதவை	16	6

மேலும் இத்தடுப்பூசி போடப் படுவதால் இந்நோயைத் தடுக்க முடியுமா? எனக் காண்க.

24. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து தந்தை மகன்களின் புத்தி கூர்மைக்கிடையே உள்ள தொடர்பினை கணக்கிடுக.
புத்தி கூர்மை உடைய மகன்களை பெற்ற
புத்தி கூர்மை உடைய தந்தையர்கள் = 300
மந்தமான மகன்களைப் பெற்ற புத்திச்சாலி தந்தையர் = 100
புத்திசாலி மகன்களைப் பெற்ற மந்தமான தந்தையர் = 50
மந்தமான மகன்களைப் பெற்ற மந்தமான தந்தையர் = 500

25. ஒரு தொழிற்சாலையில் உள்ள 3000 திறமையற்ற தொழிலாளிகளில் 2000 பேர் கிராமப்புறத்தவர்கள் 1200 திறமையான தொழிலாளிகளில் 300 பேர் கிராமபுறத்தினர் இதிலிருந்து திறமைக்கும் இருப்பிடத்திற்கும் இடையே ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதா என ஆராய்க.
26. மலேரியாத் தடுப்புத் துறைமுகாம் மூலம் ஒரு ஊரில் மொத்தமுள்ள 3248 பேர்களில் 812 பேர்களுக்கு கொய்னா மாத்திரைகள் கொடுக்கப்பட்டன. மலேரியா காய்ச்சல் கண்டவர்கள் பற்றிய விவரம் பின்வருமாறு

சிகிச்சை	காய்ச்சல் கண்டவர்கள்	காய்ச்சல் வராதவர்கள்
கொய்னா சாப்பிட்டவர்கள்	20	792
சாப்பிடாதவர்கள்	220	2216

மலேரியா தடுப்பில் கொய்னாவின் பயனை ஆராய்க

27. 1500 பேர் எழுதிய போட்டித் தேர்வில் 425 பேர் வெற்றி பெற்றனர். இதில் தனிப்பயிற்சி பெற்ற 250 பேரில் 150 பேர் வெற்றி பெற்றனர். தனிப்பயிற்சியின் பயன்பாட்டை மதிப்பிடுக.
28. ஒரு தேர்வெழுதிய 600 பேர்களில் 348 பேர் மாணவர்கள். தோல்வியுற்றவர்களை விட தேர்ச்சி அடைந்தவர்கள் 310 பேர் அதிகம். தேர்வில் தோல்வியுற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 88 பேர். தேர்வில் வெற்றி பெறுதல் பாலினம் இவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்புக் கெழு காண்க.
29. 500 பேர்களைக் கொண்ட தொகுதியில் கல்வியறிவிற்கும் வேலையில்லாமைக்கும் உள்ள தொடர்பினை பின்வரும் விவரம்அளிக்கிறது. கல்வியறிவிற்கும் வேலையில்லாமைக்கும் இடையே உள்ள யூல் தொடர்பு கெழுவைக் காண்க.

கல்வியறிவு பெற்ற வேலை இல்லாதோர் = 220
கல்வியறிவு பெற்ற வேலை உள்ளவர்கள் = 20
கல்வியறிவற்ற வேலை இல்லாதோர் = 180

30. 400 பேரைக் கொண்ட மாணவர் தொகுதியில் 160 பேர் திருமணமானவர்கள். தோல்வியுற்ற 120 மாணவர்களில் 48 பேர் திருமணமானவர்கள். திருமணமும் தேர்வில் பெற்ற தோல்வியும் ஒன்றுடன் ஒன்று சார்பற்றவையா எனக் காண்க.

விடைகள்:

I.

1. (அ) 2. (ஆ) 3. (ஈ) 4. (ஆ) 5. (ஆ)

II.

6. இருபிரிவு பாகுபாடு 7. குறையெண்ணாக 8. 0

9. $AB < \frac{(A).(B)}{N}$ 10. பொருத்தமுடையன அல்ல

IV.

16

	A	α	மொத்தம்
B	35	30	65
β	20	15	35
மொத்தம்	55	45	100

17.

	A	α	மொத்தம்
B	9	4	13
β	14	37	51
மொத்தம்	23	41	64

மொத்த எண்ணிக்கை = 64

18. பொருத்த முடையன அல்ல
19. A , B இரண்டும் ஒன்றை ஒன்று சராதாவை
20. பொருத்தமுடையன அல்ல
21. 0.167
22. – 0.606, எதிரிடை தொடர்புடையன
23. – 0.705, தடுப்பூசி போட்டு கொள்ளுதல் நல்லது
24. + 0.935
25. திறமையும் இருப்பிடமும் எதிரிடைத் தொடர்புடையவை
26. – 0.59. எதிரிடைத் தொடர்பு எனவே கொய்னா எடுத்துக் கொள்வது நல்லது.
27. + 0.68. சிறப்பு பயிற்சி பலனளிக்கக் கூடியது.
28. – 0.07
29. 0.92 கல்வியறிவிற்கும் வேலை இல்லாமைக்கும் இடையே நேரிடைத் தொடர்பு உள்ளது.
30. Q = 0, திருமணமும், தேர்வில் தோல்வியும் ஒன்றை ஒன்று சராதாவை.

10. தீர்மானக் கோட்பாடு

10.0 அறிமுகம் :

தீர்மானக் கோட்பாட்டின் முதலாவதான தொடர்பானது மக்கள் மற்றும் அமைப்புகள் மேற்கொள்ளப்படும் தீர்வுகளுக்கு உதவிபுரிதலாகும். இது தீர்வுகளுக்கான முக்கிய முடிவுகளை மேற்கொள்ள பொருள்தருகின்ற கருத்துணர்வுகளை திரட்டித் தருகிறது. தீர்மானித்தல் என்பது எதனை குறிப்பிடுகிறது எனில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூழ்நிலையில் பல்வேறான செயற்பாங்குகளில சிறந்ததொரு செயற்பாங்கினை தேர்வு செய்வதாகும்.

திட்டமிடுதல், அமைப்புகள், வழிகாட்டுதல் உத்திரவிடுதல் மற்றும் கட்டுப்படுத்துதல் என பல்வேறான தோற்றங்களை மேலாண்மையாளர்கள் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும். பலவிதமான செயற்பாங்குகளை செயல்படுத்தும்போது மேலாண்மையாளர்கள் பல்வேறான சூழ்நிலைகளை எதிர்கொண்டு அவற்றில் சிறந்த ஒன்றை தேர்வு செய்தல் வேண்டும். இவ்வாறு சிறந்த ஒன்றை தேர்வு செய்தல் என்பதை தொழில் நுட்ப சொல்லால் கூறும் பொழுது தீர்மானம் மேற்கொள்வது "அல்லது" தீர்மானம் எடுத்துக் கொள்வது எனப்படும். தீர்மானம் மேற்கொள்வது என்பது வரையறைப்பதாவது "பல்வேறான செயற்பாங்குகளின் தொகுதியிலிருந்து சிறந்த செயற்பாங்கை தேர்வு செய்வதாகும். அவ்வாறு தேர்வு செய்யப்பட்ட செயற்பாங்கு தீர்மானம் மேற்கொள்பவரின் நோக்கங்களை திருப்தி செய்வதாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது.

சிறந்த செயற்பாங்கினை தேர்வு செய்வதற்கு புள்ளியியல் அறிவு உத்தி முறை உதவி புரிகின்றது. ஐயப்பாட்டு நிலையில் உகந்ததொரு தீர்வினை தேர்வு செய்ய புள்ளியியல் தீர்மானக்கோட்பாடு வழிகாட்டுகிறது. இத்தகைய சூழ்நிலையில் நிகழ்தகவுக் கொள்கை இன்றியமையாத பங்கு வைக்கின்றது. ஐயப்பாட்டு நிலை மற்றும் இடையூறு உள்ள நிலையில் தீர்மானக்கோட்பாடு நிலைக்கு நிகழ்தகவு கொள்கை மிக அதிக அளவில் அடிக்கடி பயன்படுகிறது.

புள்ளியியல் தீர்மானக் கோட்பாடானது காரண காரியத் தொடர்புடைய பிரச்சினை அமைப்புகளை செயற்பாங்கின் மாற்று நடவடிக்கை, சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகள், நிகழக் கூடிய விளைவுகள் மற்றும் ஒவ்வொரு விளைவுக்கான நிகழக் கூடிய

அளித்தல்களையும் வெளிப்படுத்துகிறது. தற்பொழுது பிரச்சினைக்கான தீர்வினை தீர்மானக் கோட்பாடு அணுகு முறையில் தீர்வு காண அதன் தொடர்புடைய கருத்துக்களை விளக்குவோம்.

தீர்மானித்தல் முடிவு எடுப்பவர்:

தீர்மானித்தல் முடிவு எடுப்பவர் என்பது ஒரு தனி நபரோ அல்லது ஒரு குழுவிலுள்ள நபர்களோ, கிடைக்ககூடிய செயற்பாங்கு நடவடிக்கைகளில் தகுந்ததொரு செயற்பாங்கு நடவடிக்கையை தேர்ந்தெடுப்பதற்கு பொறுப்பானவரை குறிப்பது ஆகும்.

செயற்பாங்கு (அல்லது செயற்பாங்கின் நடவடிக்கைகள்)

பிரச்சினைகளுக்கு தீர்மானக் கோட்பாட்டின் பங்கானது, மாற்று நடவடிக்கைகளைக் கொண்ட செயற்பாங்குகளிலிருந்து ஒரு செயற்பாங்கினை தேர்வு செய்தலாகும். இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட செயற்பாங்குகளைக் கொண்ட பிரச்சினை சூழ்நிலையில் தீர்மானக்கோட்பாட்டைக் கொண்டு ஒரு செயற்பாங்கு நடவடிக்கையை தேர்வு செய்ய அவசியமாகிறது.

a_1, a_2, a_3…எனக்கொண்டுள்ள செயற்பாங்குகள் அல்லது செயல்கள் என எடுத்துக் கொண்டால், அனைத்து செயற்பாங்குகளின் மொத்தமானது 'செயற்பாங்குவெளி'(action space) எனவும், இதனை A என குறிப்பிடப்படுகிறது. மூன்று செயற்பாங்குகள் a_1, a_2 a_3 எனில் A= செயற்பாங்குவெளி = (a_1, a_2 a_3) அல்லது A = (A_1,A_2,A_3) செயற்பாங்குவெளி அல்லது செயற்பாங்குகளைக் கீழ்க்கண்ட அணி வாயிலாக நிரையாகவோ அல்லது நிரல்களாகவோ தெரிவு செய்யலாம்.

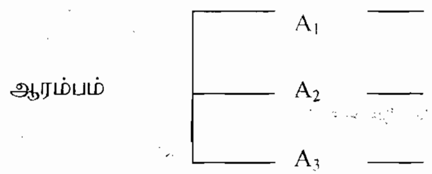
செயற்பாங்குகள்
A_1
A_2
. .
An

அல்லது

செயற்பாங்குகள்

A_1	A_2	…	A_n

செயற்பாங்கு அல்லது செயற்பாங்குகளை ஒரு மர வடிவ விளக்கபடம் மூலமாகவும் காண்பிக்கலாம்.



நிகழ்ச்சிகள் (அல்லது சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடு)

தீர்மானித்தலின் முடிவு எடுப்பவரின் கட்டுப்பாட்டிற்கு வெளியே உள்ள பொழுது கொடுக்கப்பட்டுள்ள செயற்பாங்கு எந்த அளவு வெற்றி அடைந்துள்ளது என்பதை நிர்ணயம் செய்ய நிகழ்கின்ற நிகழ்ச்சிகள் அடையாளம் காண்பிக்கின்றது. இத்தகைய நிகழ்ச்சிகளை சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடு அல்லது விளைவுகள் என அழைக்கின்றோம். ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளுக்கு நிர்ணயிக்கப்பட்ட கால அளவில் சந்தையில் தேவையின் அளவை நிகழ்ச்சி அல்லது சூழ்நிலையின் நிலைப்பாட்டிற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டாகும்.

ஒரு கணத்தின் வாயிலாக சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாட்டைக் கீழ்க்கண்ட ஏதேனும் ஒரு முறையில் தெரிவு செய்யலாம்.

$$S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$$

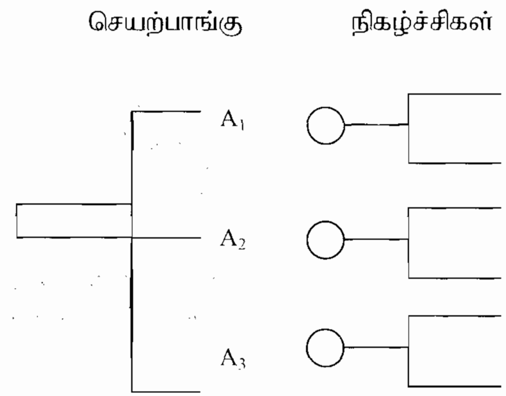
$$\text{or } E = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$$

$$\text{or } \Omega = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$$

எடுத்துகாட்டாக ஒரு சந்தையில் சலவைத்தூள் விற்பனைக்கு வருகையில் அதனை அதிகப்படியான அளவில் விரும்புகின்றவர்களின் விளைவுகள் (விளைவு θ_1)அல்லது வெளிப்பாடு வாடிக்கையாளர்கள் கவனத்திற்கு செல்லாதது (விளைவு θ_2) அல்லது ஒரு சிறிய விகிதாச்சரா வாடிக்கையாளர்களால் விரும்பப்படுவது அதனை 25% என்போம். (விளைவு θ_3).

ஆகவே $\Omega = \{ \theta_1, \theta_2, \theta_3 \}$

மர வடிவ விளக்கப்படத்தில் செயற்பாங்குகளுக்கு அடுத்த இடத்தில் குறிக்கப்படுகிறது. ஏற்படுகின்ற நிகழ்ச்சிகள் மூலம் மற்றொரு செயற்பாங்கு நமக்கு கிடைப்பதை கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்பிடலாம்.



இதனை அணி வாயிலாக, இரு வழிகளில் ஏதேனும் ஒரு வழியில் தெரிவு செய்யலாம்.

சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடு கள் → செயற்பாடுகள் ↓	S_1	S_2
A_1 A_2		

அல்லது

செயற்பாடுகள் → சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடு கள் ↓	$A_1, A_2, \ldots, A_n$
S_1 S_2	

10.1 அளித்தல்கள் (Pay-Off):

அளித்தல் என்பது ஒவ்வொரு சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகளின் செயற்பாங்கு சேர்வுகளின் முடிவானது ஒவ்வொரு சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகளின் விளைவு மற்றும் கணநேரமே நிலைக்கின்ற ஒவ்வொரு விளைவின் ஆதாயம் அல்லது இழப்பு ஆகும். இதை எண் அளவையில் குறிப்பிட்டப் படவேண்டும் எனக் குறிக்கின்றது.

அளித்தல்கள் பண சேமிப்பு அல்லது நேர சேமிப்பு எனவும் குறிப்பிடப்படுகிறது. பொதுவாக k மாற்று நடவடிக்கைகள் மற்றும் n சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகள் இருக்குமானால் அதன் விளைவு களானது $k \times n$ எண்ணிக்கை அல்லது அளித்தல்கள் ஆகும்.

இத்தகைய $k \times n$ அளித்தல்களை, மிக வசதியாக $k \times n$ அளித்தல்கள் அட்டவணையாக தெரிவு செய்யலாம்.

சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடு	தீர்மானத்தின் மாற்று நடவடிக்கை		
	A_1	A_2	...A_k
E_1	a_{11}	a_{12}	a_{1k}
E_2	a_{21}	a_{22}	a_{2k}
.	.	. ...	.
.	.	. ...	.
.	.	. ...	.
E_n	a_{n1}	a_{n2}	a_{nk}

மேற்கண்ட அளித்தல் அட்டவணையை அளித்தல் அணி எனக் கூறலாம். இங்கு a_{ij} = i என்கிற நிகழ்ச்சியில் j என்கிற மாற்று நடவடிக்கை என தேர்வு செய்யும் பொழுது கட்டுப்பாட்டு வெளிப்பாடாகும். எடுத்துகாட்டாக ஒரு விவசாயி தன் விளை நிலத்தில் மூன்று வகையான பயிர்களில் ஏதேனும் ஒன்றை பயிரிடுகிறார். பயிர் விளைச்சல் வானிலையைப் பொறுத்து அமைகின்றது. ஓவ்வொரு பயிறுக்கும் தனித்தனியாக அளித்தல்களை மூன்று விளை பொருட்களின் விளைச்சல்களின் விலைகளை அட்டவணையின் கடைசி நிரலாக காண்பிக்கப்படுகிறது.

		வானிலை			
		வறட்சி (E_1)	**நடுத்தரமான (E_2)**	**ஈரம் (E_3)**	**விலை ரூ (கிலோ வுக்கு)**
ஒரு ஹெக்டேரில் விளைச்சல் (கிலோவில்)	நெல் (A_1)	500	1700	4500	1.25
	கடலை (A_2)	800	1200	1000	4.00
	புகையிலை (A_3)	100	300	200	15.00

அளித்தல்கள் அட்டவணை

	E_1	E_2	E_3
A_1	$500 \times 1.25 = 625$	$1700 \times 1.25 = 2125$	$4500 \times 1.25 = 5625$
A_2	$800 \times 4 = 3200$	$1200 \times 4 = 4800$	$1000 \times 4 = 4000$
A_3	$100 \times 15 = 1500$	$300 \times 15 = 4500$	$200 \times 15 = 3000$

10.1.1 இழப்பு (அல்லது சந்தர்ப்ப இழப்பு) :

ஒரு சூழ்நிலைப்பாடுகளில் கிடைக்ககூடிய அதிகபட்ச லாபத்திற்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட செயற்பாங்கில் கிடைக்கக்கூடிய அதிக பட்ச லாபத்திற்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசம் சந்தர்ப்ப இழப்பு ஆகும். அதாவது சந்தர்ப்ப இழப்பு என்பது சிறந்த செயற்பாங்கினை செயற்படுத்தாமல் இருந்ததற்கான இழப்பு ஆகும். ஒவ்வொரு சூழ்நிலைப்பாட்டிற்கும் தனித்தனியாக சந்தர்ப்ப இழப்பு கணக்கிடப்படுகிறது. கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூழ்நிலைபாடுகளில் சந்தர்ப்ப இழப்பின் செயற்பாடு அச்செயற்பாட்டின் அளித்தல் மற்றும் தேர்வு செய்யப்பட்ட சிறந்த செயற்பாட்டின் அளித்தலுக்கும் உள்ள வித்தியாசமாகும்.

$P_{11}, P_{12} \ldots P_{in}$ என்பன அளித்தலின் விளைவுகள் முதல் நிறையில் உள்ளது என்றும், இதுபோலவே மற்ற நிறைகளிலும் குறிக்கலாம்.

அளித்தல் அட்டவணை

செயற்பாடு	சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடு		
	S_1	S_2	S_n
A_1	P_{11}	P_{12}	P_{1n}
A_2	P_{21}	P_{22}	P_{2n}
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
A_m	P_{m1}	P_{m2}	P_{mn}

ஒரு நிலையான சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடு S_i ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$P_{i1}, P_{i2} \ldots P_{in}$ என்பன n உத்திகளுக்கான அளித்தல்கள் ஆகும். இவைகளில் M_i என்பது அதிகபட்சம் அளித்தல் என்போம். P_{i1}

என்பது செயற்பாடு A_1 ஐ பயன்படுத்தும் பொழுது தீர்மானம் எடுத்துக் கொள்கின்றவரின் சந்தர்ப்ப இழப்பு $M_1 - P_{i1}$ மற்றும் பிற.

கீழ்க்கண்ட அட்டவணை சந்தர்ப்ப இழப்பு கணக்கிடப்படுவதைக் காட்டுகின்றது.

கழிவிரக்கம் (அல்லது சந்தர்ப்ப இழப்பு அட்டவணை)

செயற்பாடுகள்	சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகள்		
	S_1	S_2 ...	S_n
A_1	$M_1 - P_{11}$	$M_2 - P_{12}$ ...	$Mn - P_{1n}$
A_2	$M_1 - P_{21}$	$M_2 - P_{22}$ ...	$M_n - P_{2n}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
A_m	$M_1 - P_{m1}$	$M_2 - P_{m2}$ ...	$M_n - P_{mn}$

தீர்மானம் மேற்கொள்வதின் வகைகள்:

கிடைக்ககூடிய நிகழ்ச்சிகளுக்கான விவரங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டும் மற்றும் தீர்மானத்தின் சூழ்நிலைக்கு ஏற்றவாறும் தீர்மானம் மேற்கொள்ளப்படுகிறது. மூன்று வகையான சூழ்நிலைகளில் தீர்மானம் மேற்கொள்ளப்படுகிறது: நிச்சயமான நிலை நிச்சயமற்ற நிலை மற்றும் இடர்பாடு.

நிச்சயமான சூழ்நிலையில் தீர்மானம் மேற்கொள்வது:

இங்கு தீர்மானம் மேற்கொள்பவருக்கு தான் தேர்வு செய்யும் தீர்மானங்களுக்கு அதனால் ஏற்படும் விளைவுகளை பற்றிய தகவல்களை நிச்சயமாக முழுமையாக தெரிந்திருப்பார். இத்தகைய தீர்மான அமைப்பில் ஒரே ஒரு சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடு மட்டுமே நிகழகூடும் என அனுமானிக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1:

ஒரு சிற்றுண்டி விடுதியில் தயாரிக்கப்படும் உணவின் ஒரு தட்டிற்கான மொத்த சராசரி விலை ரூ 4 மற்றும் அது ரூ 6 க்கு விற்கப்படுகிறது. காலையில் உணவு தயாரிக்கப்பட்டு அன்றைய தினமே அவை விற்கப்படுகின்றது. அன்றைய தினமே விற்கப்படாத உணவுகளை கெட்டுப்போனவை எனக்கொண்டு வெளியே வீசப்படுகிறது. கடந்த கால விற்பனையைக் கொண்டு 50 தட்டுகளுக்கு

குறைவில்லாமலும் அல்லது 53 தட்டுகளுக்கு மிகையாகமலும் உணவு தயாரிக்கப்படுகிறது. நீவிர் (i) செயற்பாங்கு வெளி (ii) சூழ்நிலையின் நிலைப்பாட்டு வெளி (iii) அளித்தல் அட்டவணை (iv) இழப்பு அட்டவணை ஆகியவற்றை முறைப்படுத்திக் கூறுக.

தீர்வு:

i) சிற்றுண்டி விடுதியில் 50 தட்டுகளுக்கு குறைவில்லாமலும் 53 தட்டுகளுக்கு மிகையாகமலும் உணவு தயாரிக்கப்படுகிறது. ஆகவே செயற்பாங்குகள் அல்லது செயற்பாங்கின் நடவடிக்கைகளானது

$a_1 = 50$ தட்டுகள் தயாரிக்கப்படுவது

$a_2 = 51$ தட்டுகள் தயாரிக்கப்படுவது

$a_3 = 52$ தட்டுகள் தயாரிக்கப்படுவது

$a_4 = 53$ தட்டுகள் தயாரிக்கப்படுவது

ஆகவே செயற்பாங்கு வெளியானது $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

ii) தினசரி தேவையான உணவு தயாரிப்பது சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடு எனில் நிகழக்கூடிய நான்கு வகையான சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகளானது

$S_1 = 50$ தட்டுகள் தேவைப்படுகிறது

$S_2 = 51$ தட்டுகள் தேவைப்படுகிறது

$S_3 = 52$ தட்டுகள் தேவைப்படுகிறது

$S_4 = 53$ தட்டுகள் தேவைப்படுகிறது

ஆகவே சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடு வெளியானது

$$S= \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$$

iii) கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்கில் தினசரி தேவை என்பது நிச்சயமற்றதாகும். சிற்றுண்டி விடுதியின் இலாபம் தினசரி தேவையை பொருத்தது.

$n =$ தேவையான அளவு என்க

$m =$ உற்பத்தி செய்யப்பட்ட அளவு என்க

$n \geq m$ எனில்

இறுதி நிலை இலாபம் = (அடக்கவிலை – விற்கும் விலை) x m

$= (6 - 4) \times m = 2m$

$m > n$ எனில்,

இலாபம் = {(அடக்கவிலை – விற்கும் விலை) x n}- {அடக்கவிலை x (m-n)}

$= 2n - 4(m-n) = 2n-4m + 4n$

$= 6n - 4m$

அளித்தல் அட்டவணை

அளிப்பு (m)	தேவை (n) (S1) 50	(S2) 51	(S3) 52	(S4) 53
(a1) 50	100	100	100	100
(a2) 51	96	102	102	102
(a3) 52	92	98	104	104
(a4) 53	88	94	100	106

iv) சந்தர்ப்ப இழப்பைக் கணக்கிட நாம் முதலில் அதிகபட்ச அளித்தல்களை ஒவ்வொரு சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளுக்கும் காண வேண்டும்.

முதல் சூழ்நிலையில் அதிக பட்ச அளித்தல் = 100

இரண்டாம் சூழ்நிலையில் அதிக பட்ச அளித்தல் = 102

மூன்றாம் சூழ்நிலையில் அதிக பட்ச அளித்தல் = 104

நான்காம் சூழ்நிலையில் அதிக பட்ச அளித்தல் = 106

மேற்கண்ட அளித்தல் அட்டவணைக்கு தொடர்பான இழப்பு அட்டவணை

மேற்கண்ட அளித்தல் அட்டவணைக்கு தொடர்பான இழப்பு அட்டவணை

அளிப்பு (m)	தேவை (n) (S1) 50	(S2) 51	(S3) 52	(S4) 53
(a1) 50	100 -100 = 0	102-100 = 2	104-100 = 4	106 -100 = 6
(a2) 51	100 - 96 = 4	102-102 = 0	104-102 = 2	106 -102 = 4
(a3) 52	100 - 92 = 8	102 - 98 = 4	104-104 = 0	106 -104 = 2
(a4) 53	100 - 88 =12	102 - 94 = 8	104-100 = 4	106 -106 = 0

10.2 நிச்சயமற்ற நிலையில் தீர்மானம் எடுத்தல் (நிகழ்தகவு கொடுக்கப்படாமல் இருக்கையில்)

நிபந்தனைகளின் அடிப்படையில் நிச்சயமற்ற நிலையில் அளித்தல்கள் மட்டுமே தெரியும் மற்றும் ஒவ்வொரு சூழ்நிலைப் பாட்டின் நிகழ்தகவுத் தன்மை தெரிவதில்லை. இத்தகைய சூழ்நிலை ஒரு புதிய பொருளை சந்தையில் அறிமுகப்படுத்தும் பொழுது அல்லது புதியதாக தொழிற்சாலையிலுள்ள ஒரு இயந்திரத் தொகுதியை நிறுவும் பொழுது ஏற்படலாம். நிபந்தனைகளின் அடிப்படையில் பல வகையான தீர்மானித்தல் அளவைகள் கீழ்க்கண்டவாறு நமக்கு கிடைக்கின்றது.

உகந்த அளவை (மீப்பெருவின் மீப்பெரு மதிப்பு)

மீப்பெருவின் மீப்பெரு மதிப்பு மூலம் செயற்பாங்கின் நடவடிக்கைகளைக் காண அல்லது மிகையான அளித்தலை மிகைப்படுத்தும் மாற்று உத்தியை கணக்கிடலாம். இத்தகைய தீர்மானத்தின் அளவை மாற்று நடவடிக்கைகளை கொண்டும் அதிக அளவிலான ஆதாயத்தையும் குறிப்பதால், உகந்த தீர்மானத்தின் அளவை என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. இதன் செயல் முறையானது

(i) ஒவ்வொரு மாற்று நடவடிக்கைக்கும் சிறந்ததொரு விளைவை தீர்மானிக்கவும்.

(ii) தொடர்புடைய மாற்று நடவடிக்கைகளில் சிறந்த ஒன்றினை தேர்ந்தெடுக்கவும்.

எதிர்பார்க்கப்படும் பணம் சார்ந்த மதிப்பு: (EMV)

மாற்று நடவடிக்கையின் செயற்பாங்கினை மதிப்பீடு செய்வதற்கு எதிர்பார்க்கப்படும் பணம் சார்ந்த மதிப்பு பரவலாக பயன்படுத்தப்படுகிறது. கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாற்று நடவடிக்கைக்கு எதிர்பார்க்கப்படும் பணம் சார்ந்த மதிப்பு கணக்கிடப்படுவது, ஒவ்வொரு மாற்று நடவடிக்கைகளுக்கான நிகழ்தகவை அதன் அளித்தல்களால் பெருக்கப்பட்டு அதனை கூட்டும் பொழுது கிடைக்கப் பெறுவதாகும்.

பாதகமான அளவை அல்லது மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மதிப்பு:

இந்த தீர்மான அளவையானது எடுக்கப்பட்ட செயற்பாங்கின் நடவடிக்கையில் நிகழக் கூடிய அளித்தல்களின் மீப்பெரு மதிப்புகளில் மீச்சிறு மதிப்பாகும். இத்தீர்மான அளவை மாற்று உத்திகளால் நிகழக் கூடிய மிகக்குறைந்த இழப்பை குறிக்கின்றது. அதனால் இதனை பாதகமான தீர்மான அளவை எனவும் கூறப்படுகிறது. இதன் செயல் முறையானது

1. ஒவ்வொரு மாற்று நடவடிக்கைக்கும் குறைந்த பட்ச விளைவை தீர்மானிக்க வேண்டும்.
2. இவற்றில் சிறந்தொரு தொடர்புடைய மாற்று நடவடிக்கையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

மீப்பெரு மதிப்பின் மீச்சிறு இழப்பு அளவை (சாவேஜி அளவை):

இந்த அளவையை சந்தர்ப்ப இழப்பு தீர்மான அளவை என்றும் கூறலாம். ஏனென்றால் தீர்மானம் மேற்கொள்பவர் தான் மேற்கொண்ட தவறான செயற்பாட்டினால் (அல்லது மாறுபட்ட) அளித்தலில் சந்தர்ப்ப இழப்பு ஏற்பட்டுள்ளது என பின்னர் வருந்தலாம். ஆகவே, எப்பொழுதும் இவர் இந்த அளவையை குறைவாகவே இருக்க கருதுவார். இதன் செயல் முறையானது

(அ) அளித்தல் அணியை அமைத்து, அதனின்று சந்தர்ப்ப இழப்பு அணியை உருவாக்குக.

- (i) ஒவ்வொரு சூழ்நிலை நிலைபாட்டிற்கும் சிறந்த அளித்தலைக் காண்க.
- (ii) இம்மதிப்பிலிருந்து அந்த நிறையிலுள்ள மதிப்புகளை (அளித்தல் மதிப்புகள்) கழிக்கவும்.

(ஆ) ஒவ்வொரு செயற்பாட்டிற்கும் (உத்திக்கும்) அதிக பட்ச இழப்பு மதிப்பை கண்டறிக.

(இ) இவைகளில் மிகச்சிறிய சந்தர்ப்ப இழப்பு மதிப்பைக் கொண்ட செயற்பாட்டை (மாறுபட்ட) தேர்வு செய்க.

சரிசமவாய்ப்பு தீர்மான ('பேயிஸ் அல்லது லாப்லாஸ்) அளவை:

சூழ்நிலை நிலைப்பாட்டின் நிகழ்தகவுகள் தெரியாத காரணத்தால் அனைத்து சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளும் சமமான நிகழ்தகவை கொண்டுள்ளது என அனுமானிக்கப்படுகிறது. அதாவது ஒவ்வொரு சூழ்நிலை நிலைப்பாட்டிற்கும் சமமான நிகழ்தகவை ஒதுக்கீடு செய்கின்றோம். சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகள் ஒன்றையொன்று விலக்குவதாகவும் மற்றும் கூட்டாக முழுமையானதாகவும் உள்ளதால், ஒவ்வொன்றுக்குமான நிகழ்தகவானது

1 / (சூழ்நிலைப்பாடுகளின் எண்ணிக்கை)

இதன் செயல் முறையானது

அ) ஒவ்வொரு சூழ்நிலை நிலைப்பாட்டிற்கும்

1 / (சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளின் எண்ணிக்கை)

என்கிற சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி நிகழ்தகவை ஒதுக்கீடு செய்க.

ஆ) ஒவ்வொரு செயல்பாட்டிற்கும் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பைக்காண, ஒவ்வொரு விளைவிற்குமான அதன் நிகழ்தகவுகளால் பெருக்கி பின்னர் அதனை கூட்ட வேண்டும்.

இ) சிறந்த எதிர்பார்ப்பு அளித்தல் மதிப்பை தேர்வு செய்யவும். (இலாபம் எனில் மீப்பெரு மதிப்பு மற்றும் செலவு எனில் மீச்சிறு மதிப்பு)

இந்த அளவையை போதுமானதற்ற அளவை எனக் கூறப்படுகிறது. ஏனெனில், ஒரு சில நிகழ்ச்சிகளை தவிர, சூழ்நிலை நிலைப்பாடு பற்றிய நிகழ்தகவு தகவல்கள் சிறிதேனும் கிடைக்கப்பெறும்.

மெய்யான அளவை (ஹர்விட்ஸ் அளவை):

இது உகந்த மற்றும் பாதகமான தீர்மான அளவைகளின் உடன்படிக்கை அளவையாகும். முதலில் α உகந்த கெழுவை தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். α மதிப்பு ஒன்றுக்கு அருகில் இருந்தால் தீர்மானம் எடுப்பவர் உகந்ததொரு எதிர்காலத்தை மேற்கொள்வார் அல்லது α மதிப்பு பூஜ்ஜியத்திற்கு அருகே இருக்குமானால் தீர்மானம் எடுப்பவர் பாதகமான தீர்மானத்தை எதிர்காலத்தில் மேற்கொள்வார்.

அதிக பட்ச உத்தியை தேர்வு செய்ய H= α (அளித்தலின் மீப்பெரு மதிப்பு நிறையில்) + (1- α) (அளித்தலின் மீச்சிறு மதிப்பு நிறையில்) என ஹார்விட்ஸ் கூறுகிறார்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

கீழ்க்கண்ட அளித்தல் (இலாபம்) அணியை கருதுக.

செயற்பாடு	சூழ்நிலை			
	(S_1)	(S_2)	(S_3)	(S_4)
A_1	5	10	18	25
A_2	8	7	8	23
A_3	21	18	12	21
A_4	30	22	19	15

சூழ்நிலைப்பாட்டின் நிகழ்தகவுகள் தெரியாத நிலை. கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொரு அளவைகள் மூலமாக தீர்வு காணப்பட்டு ஒப்பிடுக.

(i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு (ii) லாப்லாஸ் (iii) ஹர்விட்ஸ் (α = 0.5 என அனுமானிக்கவும்)

தீர்வு:

i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு

					மீச்சிறு மதிப்பு
A_1:	5	10	18	25	5
A_2:	8	7	8	23	7
A_3:	21	18	12	21	12
A_4:	30	22	19	15	**15** மீப்பெரு மதிப்பு

சிறந்த செயல்பாடு A_4 ஆகும்.

(ii) ‘லாப்லாஸ்’ அளவை

$E(A_1) = 1/4\ [5 + 10 + 18 + 25] = 14.5$

$E(A_2) = 1/4\ [8 + 7 + 8 + 23] = 11.5$

$E(A_3) = 1/4\ [21 + 18 + 12 + 21] = 18.0$

$E(A_4) = 1/4\ [30 + 22 + 19 + 15] = 21.5$ மீப்பெரு மதிப்பு

$E(A_4)$ மீப்பெரு மதிப்பாகும். ஆகவே. சிறந்த செயற்பாடு A_4 ஆகும்.

(iii) ஹர்விட்ஸ் அளவை ($\alpha = 0.5$ என்க)

	மீச்சிறு மதிப்பு	மீப்பெரு மதிப்பு	α (மீப்பெரு மதிப்பு) + $(1-\alpha)$ மீச்சிறு மதிப்பு
A_1	5	25	$0.5(25) + 0.5(5) = 15$
A_2	7	23	$0.5(7) + 0.5(23) = 15$
A_3	12	21	$0.5(12) + 0.5(21) = 16.5$
A_4	15	30	$0.5(15)+0.5(30) =$ **22.5** மீப்பெரு மதிப்பு

சிறந்த செயற்பாடு A_4 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3:

ஒரு தீர்மானம் மேற்கொள்பவர் 3 தீர்மான மாற்று நடவடிக்கைகள் மற்றும் 2 சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளை எதிர் கொள்கின்றனர். (i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மதிப்பு மற்றும் (ii) மீப்பெரு மதிப்பின் மீச்சிறு இழப்பு முறைகளை கையாண்டு கீழ்க்கண்ட அளித்தல் அட்டவணையைக் கொண்டு மேற்கொள்ளும் தீர்மானத்தை பரிந்துரைக்கவும்.

சூழ்நிலை நிலைப்பாடு / செயற்பாடு	S_1	S_2
A_1	10	15
A_2	20	12
A_3	30	11

தீர்வு :

(i) மீச்சிறு மீப்பெருமதிப்பு

செயற்பாடு	மீச்சிறு மதிப்பு
A_1	10
A_2	**12** மீப்பெரு மதிப்பு
A_3	11

A_2 செயற்பாடு பரிந்துரைக்கப்படுகிறது.

(ii)மீப்பெரு மீச்சிறு இழப்பு

செயற்பாடுகள்	சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகள்		மீப்பெரு இழப்பு
	S_1	S_2	
A_1	30-10 = 20	15-15 = 0	20
A_2	30-20 = 10	15-12 = 3	10
A_3	30-30 = 0	15-11 = 4	**4**

மீப்பெரு இழப்பில் மீச்சிறு மதிப்பு 4. ஆகவே A_3 செயற்பாங்கு பரிந்துரைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4:

ஒரு வியாபாரி மூன்று மாற்று நடவடிக்கைகளைத் தேர்வு செய்ய வெளிப்படையாக உள்ளது. ஒவ்வொன்றும் ஏதேனும் நான்கு நிகழக் கூடிய நிகழ்ச்சிகளைக் கொண்டுள்ளது. கட்டுப்பாடு அளித்தல்கள் ஒவ்வொரு செயற்பாட்டு நிகழ்ச்சிகளுக்கும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மாற்று நடவடிக்கை	அளித்தல்கள் -கட்டுப்பாடு நிகழ்ச்சிகள்			
	A	B	C	D
X	8	0	-10	6
Y	- 4	12	18	- 2
Z	14	6	0	8

வியாபாரி பின்வரும் அளவைகளைப் பயன்படுத்தினால் எந்த மாற்று நடவடிக்கையை தேர்வு செய்வது என்பதை தீர்மானிக்கவும்

அ) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு அளவை

ஆ) மீப்பெருவின் மீப்பெரு அளவை

இ) ஹர்விட்ஸ் அளவை ($\alpha = 0.7$) என உகந்த அளவாக கொள்க

ஈ) மீப்பெருவின் மீச்சிறு இழப்பு அளவை

உ) லாப்லாஸ் அளவை

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளித்தல் அணியில் ஒவ்வொரு மாற்று நடவடிக்கைக்காண மீப்பெருமதிப்பு மற்றும் மீச்சிறு மதிப்பும் நிகழக் கூடிய அளித்தல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மாற்று நடவடிக்கை	மீப்பெரு அளித்தல் (ரூ)	மீச்சிறு அளித்தல் (ரூ)	(α =0.7) H = α (மீப்பெரு அளித்தல்) + (1- α) (மீச்சிறு அளித்தல்)
X	8	-10	2.6
Y	18	- 4	**11.4**
Z	14	0	9.8

அ) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு அளவை முறையில், மீச்சிறு அளித்தலில் மீப்பெரு மதிப்பு Z என்பதால் மாற்று நடவடிக்கை Z தேர்வு செய்யப்படுகிறது.

ஆ) மீப்பெருவின் மீப்பெரு மதிப்பு அளவையில் வியாபாரி மாற்று நடவடிக்கை Y - ஐ தேர்வு செய்வார்.

இ) ஹர்விட்ஸ் அளவையில் Y- ஐ தேர்வு செய்வது உகந்ததாகும்.

ஈ) கொடுக்கப்பட்ட அளித்தல் அணிக்கு, இழப்பை கீழ்க்கண்டவாறு கண்டறியலாம். A என்கிற நிகழ்ச்சிக்கு இழப்பு அளித்தல் = A-ன் மீப்பெரு அளித்தல் மதிப்பு – அளித்தல் மதிப்பு. இது போலவே மற்ற நிகழ்ச்சிகளுக்கும் கணக்கிடப்படுகிறது.

மாற்று நடவடிக்கை	அளித்தல் (ரூ) A	B	C	D	இழப்பு அளித்தல் (ரூ) A	B	C	D	மீப்பெரு இழப்பு
X	8	0	-10	6	6	12	28	2	28
Y	- 4	12	18	- 2	18	0	0	10	18
Z	14	6	0	8	0	6	18	0	18
மீப்பெரு அளித்தல்	14	12	18	8					

மாற்று நடவடிக்கைகளான Y மற்றும் Z மீப்பெரு இழப்பில் மீச்சிறு மதிப்பாக உள்ளதால் தீர்மானம் மேற்கொள்பவர் இரண்டில் ஒன்றைத் தேர்வு செய்வார்.

உ) லாப்லாஸ் அளவை:

இம்முறையில் ஒவ்வொரு உத்திக்கும் சமமான நிகழ்தகவை பகிர்ந்தளிக்கப்படுகிறது. இதன் முடிவாக கீழ்க்கண்ட எதிர்பார்க்கப்படும் அளித்தல் கிடைக்கின்றது.

மாற்று நடவடிக்கை	அளித்தல் (ரூ) A P=1/4	B P=1/4	C P=1/4	D P=1/4	எதிர்பார்க்கப்படும் அளித்தல் மதிப்பு
X	8	0	–10	6	¼ [8 + 0 –10 + 6] = 1
Y	- 4	12	18	- 2	¼ [- 4 + 12 +18 -2] = 6
Z	14	6	0	8	¼ [14 + 6 +0 + 8] = 7

எதிர்பார்க்கப்படும் அளித்தல் மதிப்பு Z க்கு மீப்பெரு மதிப்பு ஆகையால் வியாபாரி மாற்று நடவடிக்கையாக Z-ஐ தேர்வு செய்யலாம்.

10.3 இடர்பாட்டு நிலையில் தீர்மானம் மேற்கொள்வது (நிகழ்தகவுடன்):

இங்கு தீர்மானம் மேற்கொள்பவர் பலவகையான சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளும் எதிர்கொள்கின்றார். அவர் நம்பத்தகுந்த தகவல்களை நம்புவதாகவும், அறிவு, முன் அனுபவம் அல்லது நடக்கின்ற நிகழ்ச்சிகளுக்கும் நிகழ்தகவை ஒவ்வொரு நிகழகூடிய சூழ்நிலை நிலைபாடுகளுக்கும் ஒதுக்குவதாக கொள்வோம். சில வேளைகளில் முந்தைய ஆவணங்கள், அனுபவம் அல்லது தகவல்களை சான்றாக கொண்டு வருங்காலத்தில் நிகழ்ச்சிகள் ஒதுக்கப்படலாம்.

நிகழ்தகவு பரவலை அடிப்படையாக கொண்டு ஒவ்வொரு சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளுக்கும் எதிர்பார்க்கப்படும் அளித்தல் மதிப்பில் மிக அதிக மதிப்பைக் கொண்டு சிறந்ததொரு மாற்று நடவடிக்கையை ஒருவர் தேர்வு செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5:

மூன்று செயற்பாங்கு நடவடிக்கைகளும் (A) மூன்று சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளும் (E) (அல்லது நிகழ்ச்சிகள்) மற்றும் அவற்றின்

நிகழ்தகவுகளும் முறையே அளித்தல் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. சிறந்ததொரு நடவடிக்கையைக் காண்க.

நிகழ்ச்சிகள்	E_1	E_2	E_3
நிகழ்தகவு → செயற்பாங்கு ↓	0.2	0.5	0.3
A_1	2	1	-1
A_2	3	2	0
A_3	4	2	1

தீர்வு:

ஒவ்வொரு செயற்பாங்கிற்கும் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பானது

$$A_1 : 2(0.2) + 1(0.5) - 1(0.3) = 0.6$$

$$A_2 : 3(0.2) + 2(0.5) + 0(0.3) = 1.6$$

$$A_3 : 4(0.2) + 2(0.5) + 1(0.3) = 2.1$$

செயற்பாங்கு 3 க்கு எதிர்பார்க்கப்படும் பணம் சார்ந்த மதிப்பு அதிகமாக உள்ளது, ஆகவே சிறந்ததொரு நடவடிக்கை A_3 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6:

3 செயற்பாங்குகள் (A_1, A_2, A_3) மற்றும் நிகழ்ச்சி (E_1, E_2, E_3) களின் அளித்தல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடு	செயற்பாங்கு		
	A_1	A_2	A_3
E_1	35	-10	-150
E_2	200	240	200
E_3	550	640	750

ஒவ்வொரு சூழ்நிலை நிலைப்பாட்டிற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.3, 0.4 மற்றும் 0.3 ஆகும். EMV மதிப்பை கணக்கிட்டு

அட்டவணையிடுக மற்றும் எந்தவொரு செயற்பாங்குகளில் சிறந்த ஒன்றை தேர்வு செய்வாய் என்பதை முடிவு செய்க.

தீர்வு:

நிகழ்ச்சி	நிகழ் தகவு	A_1	A_2	A_3
E_1	0.3	$35\times0.3 = 10.5$	$-10\times0.3= -3$	$-150\times0.3= -45$
E_2	0.4	$200\times0.4= 80.0$	$240\times0.4= 96$	$200\times0.4= 80$
E_3	0.3	$550\times0.3=165.0$	$640\times0.3=192$	$750\times0.3= 225$
EMV		255.5	285	260

இங்கு A_2-ன் EMV மீப்பெரு மதிப்பாக உள்ளது. ஆகவே செயற்பாங்கு A_2 வை தேர்வு செய்யவும்.

எடுத்துக்காட்டு 7:

ஒரு கடைக்காரருக்கு அழியக் கூடிய நிறையப்பொருட்களை சேமித்து வைக்க தேவையான வசதியுள்ளது. அவர் ஒரு பொருளை ரூ 3 க்கு வாங்கி அதனை ஒரு பொருள் ரூ 5 என விற்பனை செய்கின்றார். ஒரு நாளில் பொருள் விற்கபடவில்லையெனில் அவருக்கு இழப்பு ஒரு பொருளுக்கு ரூ 3 ஆகும். தினசரி தேவையானது கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவு பரவலைச் சார்ந்துள்ளது.

தேவையான பொருள்களின் எண்ணிக்கை	:	3	4	5	6
நிகழ்தகவு	:	0.2	0.3	0.3	0.2

எவ்வளவு பொருட்களை அவர் சேமித்தால் அவரது தினசரி எதிர்பார்க்கப்படும் இலாபம் மீப்பெரு மதிப்பாகும்?

தீர்வு:

m = தினசரி சேமித்து வைக்ககூடிய பொருட்களின் எண்ணிக்கை என்க.

n = தினசரி தேவையான பொருட்களின் எண்ணிக்கை என்க.

$n \geq m$, எனில்

இலாபம் $= 2m$

மற்றும் $m > n$,

இலாபம் = $6n - 3(m-n)$
$= 6n - 3m + n$
$= 5n - 3m$

அளித்தல் அட்டவணை

சேமிப்பு (m)	தேவை (n)			
	3	**4**	**5**	**6**
3	6	6	6	6
4	3	8	8	8
5	0	5	10	10
6	–3	2	7	12
நிகழ்தகவு	0.2	0.3	0.3	0.2

சேமிப்பு (m)	எதிர்பார்க்கப்படும் ஆதாயம்
3	$6 \times 0.2 + 6 \times 0.3 + 6 \times 0.3 + 6 \times 0.2$ = Rs. 6.00
4	$3 \times 0.2 + 8 \times 0.3 + 8 \times 0.3 + 8 \times 0.2$ = Rs. 7.00
5	$0 \times 0.2 + 5 \times 0.3 + 10 \times 0.3 + 10 \times 0.2$ = Rs. 6.50
6	$-3 \times 0.2 + 2 \times 0.3 + 7 \times 0.3 + 12 \times 0.2$ = Rs. 4.50

4 பொருட்களை சேமிக்கையில் அதிகபட்ச எதிர்பார்க்கப்படும் ஆதாயம் ரூ 7, ஆகவே 4 பொருட்களை சேமித்து வைத்தால் எதிர்பார்க்கப்படும் தினசரி இலாபம் வியாபாரிக்கு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 8:

ஒரு மாத இதழ் பங்கீட்டாளர் மாத இதழ் தேவைக்கான கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவை ஒதுக்கீடு செய்கின்றார்.

தேவையான மாத இதழ்களின் எண்ணிக்கை	:	2	3	4	5
நிகழ்தகவு	:	0.4	0.3	0.2	0.1

ஒரு இதழின் விலை ரூ 6 க்கு வாங்கி அதனை ரூ 8 க்கு விற்கின்றனர். எத்தனை மாத இதழ்களை அவர் சேமிக்கையில் அவருக்கு அதிகபட்ச எதிர்பார்க்கப்படும் இலாபம் கிடைக்கும்? மேலும் அவர் விற்பனையாகாத இதழ்கள் ஒவ்வொன்றையும் ரூ 5க்கு விற்கின்றார்.

தீர்வு:

m = தினசரி சேமிக்கப்படும் மாத இதழ்களின் எண்ணிக்கை
n = தேவையான மாத இதழ்களின் எண்ணிக்கை

தற்பொழுது

$n \geq m$ எனும் பொழுது,

இலாபம் = ரூ 2 m

மற்றும்

$m > n$ எனில்

இலாபம் = $8n - 6m + 5(m-n)$
$= 8n - 6m + 5m - 5n$
$= 3n - m$

அளிப்பு அட்டவணை

சேமிப்பு (m)	தேவை (n)			
	2	**3**	**4**	**5**
2	4	4	4	4
3	3	6	6	6
4	2	5	8	8
5	1	4	7	10
நிகழ்தகவு	0.4	0.3	0.2	0.1

சேமிப்பு	எதிர்பார்க்கப்படும் ஆதாயம் (ரூபாயில்)
2	$4 \times 0.4 + 4 \times 0.3 + 4 \times 0.2 + 4 \times 0.1 = 4.0$
3	$3 \times 0.4 + 6 \times 0.3 + 6 \times 0.2 + 6 \times 0.1 = 4.8$
4	$2 \times 0.4 + 5 \times 0.3 + 8 \times 0.2 + 8 \times 0.1 = 4.7$
5	$1 \times 0.4 + 4 \times 0.3 + 7 \times 0.2 + 10 \times 0.1 = 4.0$

3 மாத இதழ்களை சேமிக்கும் பொழுது அதிகபட்ச எதிர்பார்க்கப்படும் ஆதாயம் ரூ 4.8. ஆகவே பங்கீட்டாளர் 3 மாத இதழ்களை சேமிக்கும் பொழுது அதிக பட்ச இலாபம் கிடைக்கும்.

10.4 தீர்மான மர வடிவ ஆய்வு:

ஒரு தீர்மானித்தல் பிரச்சினையை விளக்கப்பட உதவியுடன் தெரிவு செய்யலாம். இவ்விளக்கப்படம் அனைத்து நிகழகூடிய செயற்பாடு, சூழ்நிலை நிலைப்பாடு மற்றும் சூழ்நிலைப்பாட்டிற்கு தொடர்பான நிகழ்தகவுகளையும் காண்பிக்கின்றது. இந்த தீர்மான விளக்கப்படம் ஒரு மரத்தை வரைந்து பார்க்கும் பொழுது இருப்பது போல இருப்பதால் இதனை 'தீர்மான மரம்' என்றும் கூறலாம்.

ஒரு தீர்மான மரம் கணுக்கள், கிளைகள், நிகழ்தகவு மதிப்பீடுகள் மற்றும் அளித்தல்களையும் கொண்டுள்ளது. கணுக்கள் இருவகைப்படும். தீர்மான கணு (சதுரத்தால் குறியீடு செய்கிறோம்) மற்றும் வாய்ப்பு கணு (வட்டத்தால் குறியீடு செய்கிறோம்). மாறுபட்ட செயற்பாடுகளின் ஆதியானது தீர்மான கணுவிலிருந்து முக்கிய கிளையாக (தீர்மான கிளையாக) தொடங்குகின்றது. தீர்மான கணுவின் முடிவாக உள்ள புள்ளியில், வாய்ப்புகணு தொடங்குகிறது. வாய்ப்புகணுக்கள் உட்கிளைகளாக வெளிப்படுத்துகின்றன. அவற்றிற்குரிய அளித்தல்கள் மற்றும் மாறுபட்ட செயற்பாடுகளுக்குத் தொடர்புடைய நிகழ்தகவுகள் மற்றும் வாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் பக்கத்துப் பக்கமாக வாய்ப்பு கிளைகளில் காண்பிக்கப்படுகிறது. வாய்ப்பு கிளைகளின் முடிவில் எதிர்பார்க்கப்படும் அளித்தல் மதிப்புகளின் விளைவுகள் காண்பிக்கப்படுகிறது.

அடிப்படையில் தீர்மான மர வடிவங்கள் - முடிவான தீர்மானம் மற்றும் நிகழக்கூடிய தீர்மானம் என இரு வகைப்படும். இவை மேலும் ஒருபடி மற்றும் பலபடி மரங்கள் என பிரிக்கப்படுகின்றது. ஒருபடி முடிவான தீர்மானத்தில் தீர்மான மரமானது ஒரே ஒரு தீர்மானத்தை நிச்சயமான நிபந்தனைகளுடன் உள்ளடக்கியுள்ளது. பலபடி தீர்மானத்தில் ஒரு தொடர் அல்லது சங்கிலியான தீர்மானங்கள் மேற்கொள்ளப்படுகிறது. EMV ன் உச்ச மதிப்பு ஆனது உகந்ததொரு பாதை (உத்தி) ஆகும்.

தீர்மான மரவடிவம் வரைய ஒருவர் பின்பற்றபட வேண்டிய குறிப்பிட்ட அடிப்படை விதிகள் மற்றும் இணக்க விதிகள் கீழே நிறுவப்படுகிறது.

1. அனைத்து தீர்மானங்கள் (மற்றும் அதன் மாற்று) அவை எந்த வரிசையில் மேற்கொள்ளப்படுகிறது என்பதை கண்டறியவும்.
2. வாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் அல்லது ஒவ்வொரு மாற்று தீர்மானங்களின் முடிவால் ஏற்படும் சூழ்நிலை நிலைப்பாட்டை கண்டறிக.
3. வாய்ப்பு நிகழ்ச்சி மற்றும் வரிசை தீர்மானங்களை காட்டுகின்ற மர வடிவ விளக்கபடத்தை விரிவாக்குக. மரவிளக்கபடம் அமைக்கும் பொழுது இடது புறமாக தொடங்கி வலது புறமாக நகர்கின்றது. சதுரப்பெட்டி விளக்குவது தீர்மானப்புள்ளி, அங்கு கிடைக்ககூடிய செயற்பாட்டு நடவடிக்கைகள் கருத்தில் எடுத்துகொள்ளப்படுகிறது. வட்டம் தெரிவு செய்வது வாய்ப்பு கணு அல்லது நிகழ்ச்சி, பல்வேறான சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகள் அல்லது இவ்வாய்ப்பு நிகழ்ச்சியிலிருந்து விளைவுகள் வெளிப்படுத்துகின்றது.

4. நிகழக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகள் அல்லது மாற்று தீர்மானங்களால் கிடைக்கக்கூடிய சூழ்நிலைப்பாடுகளை மதிப்பீடு செய்க.
5. நிகழக்கூடிய எதிர்விளைவுகளின் தீர்மான மாற்றங்கள் மற்றும் நிகழ்ச்சிகளின் விளைவுகளைக் காண்க.
6. எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பை அனைத்து நிகழக் கூடிய தீர்மான மாற்றுகளை கணக்கிடுக.
7. மிகவும் கவரக் கூடிய எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பை கொடுக்ககூடிய தீர்மான மாற்றை (அல்லது செயற்பாங்கு) தேர்ந்தெடுக்கவும்.

தீர்மான மர வடிவத்தின் பயன்பாடுகள்:

1. தீர்மான மரம் வரைவதால், தீர்மானம் மேற்கொள்பவர் அனைத்து சிக்கலான பிரச்சினைகளையும் விரிவுபடுத்தி பார்க்கமுடியும்.
2. தீர்மானம் மேற்கொள்பவருக்கு, பிரச்சினைகளின் பல வேறான மூலக்கூறுகளை உள்ளடக்கி மற்றும் முறையாகவும் பார்க்க உதவியளிக்கிறது.
3. ஒரு தீர்மான மரவிளக்கப் படத்தின் மூலம் கருத்துக்களை மாற்றாமல் பல பரிமான தீர்மான வரிசைகளாக கோர்வைப் படுத்தலாம்.
4. தீர்மான மர வடிவம் பல்வேறான இடங்களிலும் பயன்படுத்தபடுகிறது. புதியதாக அறிமுகபடுத்தப்பட உள்ள பொருள், சந்தை உத்தி முறைகள் எனப்பல.

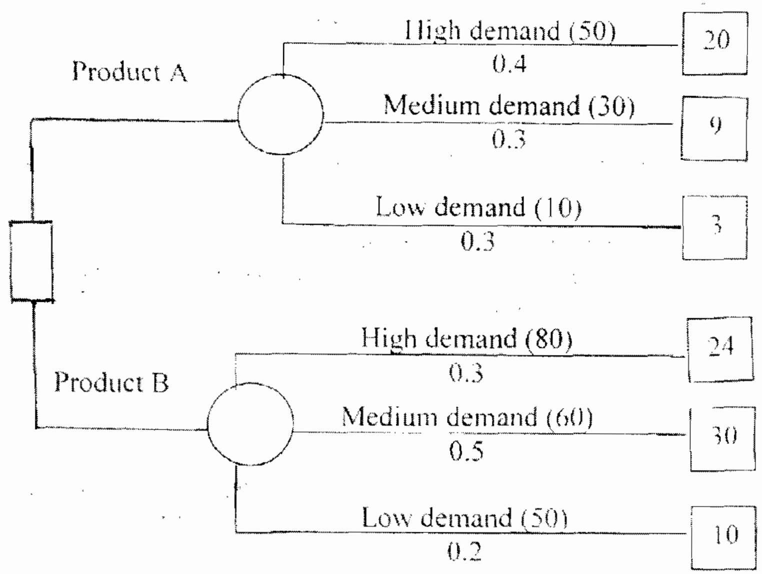
எடுத்துக்காட்டு 9:

ஒரு உற்பத்தி செய்யும் நிறுவனத்தில் A அல்லது B என்கிற உற்பத்திக்குப் பயன்படுத்தப்படும் பொருள்களில் ஒன்றை தேர்வு செய்தல் வேண்டும். A என்கிற பொருளுக்கு ரூ 20000 மற்றும் B என்கிற பொருளுக்கு ரூ 40000 ம் மூலதனமாகத் தேவைப்படுகின்றது. சந்தை ஆய்வை மேற்கொண்டதில் அதிக தேவை, நடுத்தரத் தேவை, மற்றும் குறைந்த தேவை, அவற்றின் நிகழ்தகவுகள் மற்றும் இரு பொருள்களின் விலைகள் ரூ. ஆயிரத்தில் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

சந்தை தேவை	நிகழ்தகவு		விற்பனை	
	A	B	A	B
அதிகம்	0.4	0.3	50	80
நடுத்தரம்	0.3	0.5	30	60
குறைந்த	0.3	0.2	10	50

பொருத்தமான தீர்மான மரம் அமைக்கவும். தொழிற்சாலை எத்தகைய தீர்மானத்தை எடுக்க உள்ளது?

தீர்வு:



சந்தை தேவை	A			B		
	X('000)	P	PX	X('000)	P	PX
அதிகம்	50	0.4	20	80	0.3	24
நடுத்தரம்	30	0.3	9	60	0.5	30
குறைந்த	10	0.3	3	50	0.2	10
மொத்தம்			32			64

பொருள்	வரவு (ரூ)	மூலதனம் (ரூ)	இலாபம் (ரூ)
A	32,000	20,000	12,000
B	64,000	40,000	24,000

தொழிற்சாலையின் தீர்மானம் B க்கு சாதகமாக உள்ளது ஏனெனில் B-பொருளின் இலாபம் அதிகம்.

எடுத்துக்காட்டு 10:

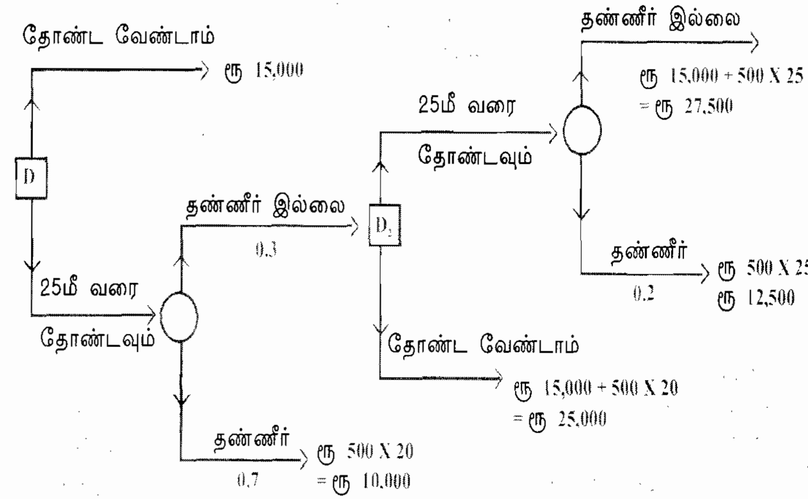
ஒரு பண்ணைக்கு சொந்தக்காரர் தனது பண்ணையில் கிணறு ஒன்றை தோண்ட உள்ளார். அந்தப் பகுதியில் கடந்த காலங்களில் 20 மீட்டர்கள் ஆழத்தில் தோண்டியதில் 70 சதவீதம்

வெற்றியடைந்துள்ளது. மேலும் 25 மீட்டர்கள் தோண்டியும் 20 சதவிகிதமே தண்ணீர் கிடைத்துள்ளது. பண்ணையார் கிணறு தோண்டவில்லையெனில் அடுத்த 10 ஆண்டுகளுக்கு தனது பக்கத்து பண்ணையாரிடமிருந்து தண்ணீர் வாங்க ரூ15000 செலவு ஆகும் என மதிப்பீடு செய்கிறார்.

பொருத்தமான தீர்மான மரம் வரையவும் மற்றும் பண்ணையாரின் உத்திகளை EMV முறையில் நிர்ணயிக்கவும்.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் கீழ்க்கண்ட மர விளக்கப்படத்தின் மூலம் தெரிவு செய்யப்படுகிறது.



தீர்மானம்	நிகழ்ச்சி	நிகழ் தகவு	பணச் செலவு	எதிர் பார்க்கப் படும் பணச் செலவு
தீர்மானப் புள்ளி D_2				
1. 25 மீட்டர்கள் வரை தோண்டவும்	தண்ணீர் கிடைப்பது	0.2	ரூ.12,500	ரூ. 2,500
	தண்ணீர் கிடைப்பதில்லை	0.8	ரூ. 27,500	ரூ.22,000
			EMV	ரூ.24,500
2. தோண்ட வேண்டாம்	EMV = ரூ. 25,000			

D_2 புள்ளியில் தீர்மானம் : 25 மீட்டர்கள் வரை தோண்டவும்

தீர்மானப் புள்ளி D_1				
1. 20 மீட்டர்கள் வரை தோண்டவும்	தண்ணீர் கிடைப்பது	0.7	ரூ. 10,000	ரூ. 7,000
	தண்ணீர் கிடைப்பதில்லை	0.3	ரூ. 24,500	ரூ.7,350
			EMV	ரூ.14,350
2. தோண்ட வேண்டாம்	EMV = ரூ.15,000			

D_1 புள்ளியில் தீர்மானம் : 20 மீட்டர்கள் வரை தோண்டவும். ஆகவே உகந்த உத்தியானது பண்ணையார் 20 மீட்டர்கள் வரை தோண்டுவது மற்றும் தண்ணீர் கிடைக்கவில்லை எனில் மேலும் 25 மீட்டர்கள் வரை தோண்டவும்.

பயிற்சி 10

I. சரியான விடையை தேர்வு செய்க:

1. தீர்மானக் கோட்பாடு தொடர்புடையது
   அ) கிடைக்ககூடிய தகவல்களின் அளவு
   ஆ) நம்பகத்தன்மைக் கொண்ட தீர்மானத்தை அளவீடு செய்வது
   இ) வரிசைத் தொடர் பிரச்சினைகளுக்கு உகந்த தீர்மானங்களை தேர்ந்து எடுப்பது
   ஈ) மேற்கூறிய அனைத்தும்

2. நிச்சயமற்ற நிலையில் கீழ்க்கண்ட எந்த அளவையைக்கொண்டு தீர்மானம் மேற்கொள்ள பயன்படுத்துவதில்லை
   அ) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மூலம் விடை கூறுதல்
   ஆ) மீப்பெருவின் மீப்பெரு மூலம் விடை கூறுதல
   இ) மீப்பெருவின் மீச்சிறு மூலம் விடை கூறுதல
   ஈ) எதிர்பார்க்கப்படும் விடையை மீப்பெருமம் ஆக்குதல்
3. மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மூலம் விடை கூறுதல், மீப்பெருவின் மீப்பெரு மூலம் விடை கூறுதல் மற்றும் மீப்பெரு மீச்சிறு இழப்பு அளவைகளானது
   அ) அனைத்தும் ஒரே உகந்த முடிவை தருகின்றன.
   ஆ) நிகழ்தகவு பயன்படுத்துவதில்லை
   இ) அ மற்றும் ஆ இவை இரண்டும்.
   ஈ) மேற்கூறியவற்றில் எவையுமில்லை
4. மர வடிவ தீர்மானத்திற்கு கீழ்க்கண்டவற்றில் எவை செயற்படுத்துவதில்லை?
   அ) ஒரு சதுர கணுப்புள்ளி அங்கு தீர்மானம் மேற்கொள்ள வேண்டும்.
   ஆ) ஒரு வட்ட கணு தெரிவிப்பது நிச்சயமற்ற நிலையை சந்திப்பது
   இ) ஒருவர் தொடர்பான தீர்மானங்களை தேர்வு செய்வது அது வெற்றிக்கு அதிகமான நிகழ்தகவை தரும்.
   ஈ) ஒருவர் முயன்று எதிர்பார்க்கும் விடை கூறுதல் மீப்பெரு மதிப்பாக்குதல்
5. இவ்வளவையைக் கொண்டு மீப்பெரு அளித்தல் குறைவாக இருக்கையில் செயற்பாட்டை தேர்வு செய்வது
   அ) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு அளவை
   ஆ) மீப்பெருவின் மீச்சிறு அளவை
   இ) மீப்பெருவின் மீப்பெரு அளவை
   ஈ) இவற்றில் ஒன்றுமில்லை

II. கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக

6. தீர்மான மரவடிவம் கொண்டுள்ளது ________ தீர்மானங்கள் மற்றும் சமவாய்ப்பு விளைவுகள்
7. நிச்சயமற்ற நிலையில் தீர்மானம் மேற்கொள்ள ஒரு வழியானது எல்லா சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளையும் ________ மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் விடை கூறுதலை மீப்பெருப்படுத்துவதாகும்.
8. எப்பொழுதும் எதிர்பார்க்கப்படும் வரவின் நிகர பணத்தை மீப்பெருமம் ஆக்குவது என்பதும் எதிர்பார்க்கப்படும் இழப்பை

________ ஆக்குவது என்பதும் ஒரே மாதிரியான உகந்த கொள்கையாகும்.

9. இடர்பாடு நிலையில் பல வகையான அளவைகளில் தீர்மானம் மேற்கொள்வது என்பது எப்பொழுதும் கிடைக்க கூடிய ஒரே மாதிரியான ________ தேர்வே ஆகும்.

10. நிச்சயமற்ற நிலையில் தீர்மானம் மேற்கொள்வது லாப்லாஸ் அளவை மாறுதல் விரும்பாத மிகச்சிறியதாகவும் அதே சமயத்தில் ________ அளவையானது மிகப்பெரும்பாலான மாறுதல் விரும்பத்தகாதவையாகும்.

III. கீழ்க்கண்டவற்றிற்கு விடை தருக

11. புள்ளியியல் தீர்மானக் கோட்பாடு என்பதின் பொருளை விளக்குக.
12. நிச்சயமற்ற நிலையில் எத்தகைய தொழில் நுணுக்கங்களைப் பயன்படுத்தி தீர்மானப் பிரச்சினைகள் தீர்வு மேற்கொள்ளப் படுகிறது.
13. தீர்மான வடிவ மரம் - சிறுகுறிப்பு வரைக.
14. அளித்தல் அணி என்றால் என்ன?
15. EMV அளவையுடன் மர வடிவ தீர்மானத்தை பயன்படுத்தி சிறந்த முடிவான தீர்மானம் காண்பது எவ்வாறு என்பதை விளக்குக.
16. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளித்தல் அட்டவணையில் மூன்று செயற்பாடுகளுடன் (A) அவற்றின் மூன்று சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகள் (E) (அல்லது நிகழ்ச்சி) இவற்றுடன் முறையான நிகழ்தகவுகளும் (P) தரப்பட்டுள்ளது. சிறந்ததொரு செயற்பாங்கை தேர்வு செய்க.

நிகழ்ச்சிகள் / செயற்பாடுகள்	E_1	E_2	E_3
A_1	2.5	2.0	–1
A_2	4.0	2.6	0
A_3	3.0	1.8	1
நிகழ்தகவு	0.2	0.6	0.2

17. EMV மதிப்பை கணக்கிட்டு கீழ்க்கண்ட அளித்தல் அட்டவணையில் சிறந்ததொரு செயலை தேர்வு செய்க.

சூழ்நிலை நிலைப்பாடு	நிகழ்தகவு	விளையாட்டு வீரரின் அளித்தல் (ரூபாயில்) A	B	C
X	0.3	–2	–5	20
Y	0.4	20	–10	–5
Z	0.3	40	60	30

18. அளித்தல் அணியை கருதுக.

சூழ்நிலை நிலைப்பாடு	நிகழ் தகவு	செயல் (A_1) விரிவாக்க வேண்டாம்	செயல் (A_2) 200 அலகுகள் விரிவாக்குக	செயல் (A_3) 400 அலகுகள் விரிவாக்குக
அதிகத் தேவை	0.4	2500	3500	5000
நடுத்தர தேவை	0.4	2500	3500	2500
குறைந்த தேவை	0.2	2500	1500	1000

EMV அளவையைப் பயன்படுத்தி சிறந்த செயலை முடிவு செய்க

19. (i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு (ii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு இழப்பை பயன்படுத்தி கீழ்க்கண்ட அளித்தல் அணியில் நிகழ்தகவைப் பற்றி தெரியாத நிலையில் எந்த தீர்மானத்தை பரிந்துரை செய்வாய்?

சூழ்நிலை நிலைப்பாடு

செயல்	S_1	S_2	S_3
a_1	14	8	10
a_2	11	10	7
a_3	9	12	13

20.ஒரு கடைக்காரரிடம் சில அதிக அளவில் அழுகக்கூடிய பழங்கள் உள்ளன. தான் வாழ்கின்ற பகுதியில் தினசரி பழத் தேவையை x எனக் கொண்ட நிகழ்தகவு பரவல் கீழ்கண்டவாறு உள்ளது.

தினசரி தேவை (டஜன்களில்) :	6	7	8	9
நிகழ்தகவு :	0.1	0.3	0.4	0.2

வியாபாரி ஒரு டஜன் பழங்களை ரூ 4 க்கு வாங்கி அதனை ரூ 10 க்கு விற்கின்றார். ஒரு நாளில் விற்பனையாகாத பழங்களை அடுத்த நாள் ஒரு டஜன் ரூ 2க்கு விற்கின்றார். பழங்கள் டஜன் கணக்கில் சேமிப்பு செய்கிறார் என அனுமானம் மேற்கொண்டு எதிர்பார்க்கப்படும் இலாபம் மீப்பெருமம் ஆக எவ்வளவு சேமிக்க வேண்டும்

[குறிப்பு: $n \geq m$ எனில் இலாபம் $= 6m$

$n < m$ எனில் இலாபம் $= 10n - 4m + 2(m-n)$

$= 8n - 2m$]

21. ஒரு பூங்கொத்து விற்பனையாளர் தனது வழக்கமான வாடிக்கையாளர்களின் தேவையை பூர்த்தி செய்ய பூக்களை சேமித்து வைக்கிறார். ஒரு டஜன் பூக்களை ரூ 3 க்கு வாங்கி அதனை ரூ 10 க்கு விற்கிறார். பூக்கள் அதே நாளில் விற்கவில்லையெனில் அவை பயனற்றவையாகும். ஒரு டஜன் பூக்களுக்கான தேவைப்பரவல் கீழேத் தரப்பட்டுள்ளது.

தேவை (டஜன்களில்)	1	2	3	4
நிகழ்தகவு	0.2	0.3	0.3	0.2

இவரது எதிர்பார்க்கப்படும் நிகர லாபத்தை அடைய எத்தனை பூக்களை அவர் சேமித்து வைக்கவேண்டும்?

22. ஒரு பூ விற்பனையாளர் மிகவும் அழுகக்கூடிய பூக்களை சேமிக்கின்றார். ஒரு டஜன் பூக்களின் விலை ரூ 3 மற்றும் விற்கும் விலை ரூ 10 ஏதேனும் பூ அன்றைய நாளில் விற்காமல் இருந்தால் அவை பயனற்றவை. ஒரு டஜன் பூக்களுக்கான தேவை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தேவை (டஜன்களில்)	0	1	2	3	4
நிகழ்தகவு	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

ஏதேனும் ஒரு வாடிக்கையாளரின் தேவையை பூர்த்தி செய்ய தவறினால் அதன் பாதிப்பு இலாபத்தில் நஷ்டம் ரூ5 ஆகும் மற்றும் இலாபம் இழப்பதுடன் உடனடி விற்பனையும் பாதிக்கப்படுகின்றது எனில், எதிர்பார்க்கப்படும் மீப்பெரும் லாபத்தை அடைய எத்தனை பூக்களை அவர் சேமித்து வைக்கவேண்டும்?

23. ஒரு செய்திதாள் விற்பனையாளரின் அனுபவத்தில் x என்கிற செய்திதாளுக்கு தனது பகுதியில் உள்ள தேவையை, கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவு பரவல் காண்பிக்கிறது.

தினசரித்தேவை (x)	300	400	500	600	700
நிகழ்தகவு	0.1	0.3	0.4	0.1	0.1

அவர் செய்தித்தாள் ஒவ்வொன்றையும் ரூ 1 க்கு வாங்கி அவை ஒவ்வொன்றையும் ரூ 2 க்கு விற்கின்றார். விற்கப்படாத பிரிதிகள் பயனற்றவை எனக்கழிக்கப்பட்டு அத்தகைய ஒவ்வொரு பிரிதியும் 10 பைசா விலைக்கு விற்கப்படுகிறது. 100 ன் மடங்குகளாக செய்திகாள்களை சேமிக்கின்றார் என அனுமானம் கொள்வோம்.இவரது எதிர்பார்க்கப்படும் மீப்பெரும் லாபத்தை அடைய எத்தனை செய்திதாள்களை சேமிக்க வேண்டும்?

24. ஒரு தீர்மானம் மேற்கொள்பவர் மூன்று தீர்மான மாற்று நடவடிக்கைகள் மற்றும் நான்கு சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளை எதிர்கொள்கிறார் எனக் கொள்வோம். அளித்தல் அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

செயல்கள்	சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடு			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	16	10	12	7
A_2	13	12	9	9
A_3	11	14	15	14

சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளின் நிகழ்தகவுகள் தெரியாது என அனுமானித்து கீழ்க்கண்ட அளவைகளைக் கொண்டு எந்த தீர்மானம் பரிந்துரை செய்யப்படுகிறது?

(i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு

(ii) மீப்பெருவின் மீப்பெரு

(iii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு இழப்பு

25. A, B மற்றும் C அளித்தல் மற்றும் X, Y மற்றும் Z ஆகியவற்றின் சூழ்நிலை நிலைப்பாடு கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

சூழ்நிலை நிலைப்பாடு	அளித்தல் (ருபாயில்) செயல்கள்		
	A	B	C
X	– 20	–50	2000
Y	200	–100	–50
Z	400	600	300

சூழ்நிலை நிலைப்பாடுகளின் நிகழ்தகவுகள் 0.3 , 0.4 மற்றும் 0.3 ஆகும். EMV கணக்கிட்டு சிறந்த செயலைத் தேர்வு செய்யவும்.

விடைகள்

I. 1. (ஈ) 2. (ஈ) 3. (ஆ) 4. (இ) 5. (அ)

II.

6. தொடர் 7. சமவாய்ப்பு 8. மீச்சிறு 9.உகந்த

10. மீப்பெருவின் மீச்சிறு

16. A_2 சிறந்தது

17. மிக அதிக EMV ரூ194, A ஐ தேர்வு செய்க

18. EMV 3200 செயல் A_3 ஐ தேர்வு செய்து, 400 அலகுகள் விரிவாக்குக

19. i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மதிப்பு : செயல் a_3

ii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு இழப்பு : செயல் a_1

20.கடைக்காரர் 8 டஜன் பூக்களை சேமிக்கும் பொழுது எதிர்பார்க்கப்படும் அதிக பட்ச லாபத்தை பெறுவார்.

21. கடைக்காரர் 3 டஜன் பூக்களை சேமிக்கும் போது எதிர்பார்க்கப்படும் அதிக பட்ச லாபத்தை பெறுவார்.

22. அவர் 3 டஜன் பூக்களை சேமிக்கும் பொழுது எதிர்பார்க்கப்படும் அதிக பட்ச லாபமான ரூ 9.50 பெறுவார்.

23. 405 செய்தித்தாள்களை (காப்பிகள்) சேமிக்கும் பொழுது இவரது எதிர்பார்க்கப்படும் லாபம் அதிகபட்சமாகும்.

24.(i) செயல் a_3 பரிந்துரைக்கப்படுகிறது

(ii) செயல் a_1 பரிந்துரைக்கப்படுகிறது

(iii) செயல் a_3 பரிந்துரைக்கப்படுகிறது

25. EMV- A வுக்கு அதிகம். ஆகவே செயல் A-ஐ சிறந்த செயலாக தேர்ந்தெடுக்கவும்.